

B Ö L Ü M 1

E L E M A N T E R İ L K E L E R

Mekanik'in herhangi bir şekilde ortaya konmasında esas; uzay, zaman, eşzamanlı olma, kütle ve kuvvet gibi bazı temel fizik kavramlarıdır.

1.1. Bir maddesel noktanın mekaniği (Tek parçacık mekaniği) :

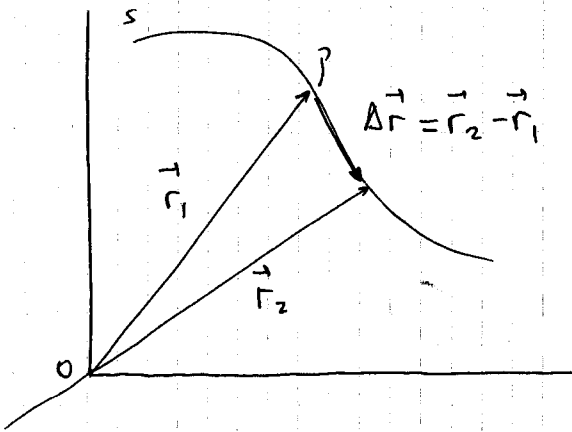
Bir parçacık üzerine $\vec{F}$ kuvveti uygulanacak olursa, parçacığın çizgisel momentumundaki değişim

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (\text{Newton II. yasası})$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

(P noktasındaki anlık hız)



$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (m\vec{v}) \quad \text{küçük hızlarda kütle sabit.}$$

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad \text{maddesel noktanın ivmesi}$$

$$\text{Açısal momentum : (O noktasına göre)} \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\text{Kuvvet momenti : (O noktasına göre)} \quad \vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}_{\vec{r} \parallel \vec{p}} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Korunum Yasaları: Korunum teoremleri değişik mekaniik büyüklüklerin hangi şartlar altında zaman süresince sbt olduklarını gösterir.

1.) Lineer mom. korunumu: Cisim üzerine uygulanan $\vec{F}$ toplam kuvveti sıfırsa,

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{p}} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{sbt} \text{ ve lineer mom. korunur.}$$

2.) Açısal mom. korunumu: Cisim üzerine etki eden kuvvet momentlerinin toplamı sıfır ise,

$$\vec{N} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{L}} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{sbt. ve Açısal mom. korunur.}$$

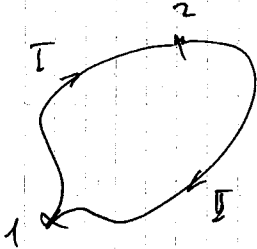
3.) Korunumlu Kuvvet: İşerkin Korunumu:

İş: $\vec{F}$ dış kuvvetli bir parçacığın (1) noktasından (2) noktaya giderken parçacık üzerinde yaptığı iş:

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \int_1^2 \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \frac{1}{2} m \int_1^2 \frac{d}{dt}(\vec{v}^2) dt \\ &= \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = T_2 - T_1. \end{aligned}$$

Bir kuvvetin kapalı bir yol boyunca yaptığı W işi "0" ise bu kuvvetlere korunumlu kuvvetler denir.

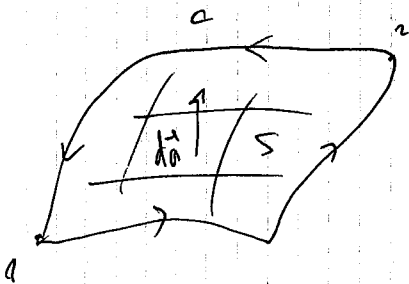
$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{F} \text{ korunumlu.}$$



$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_2^1 \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Korunumlu kuvvetlerde yapılan iş yoldan bağımsızdır. Sadece yolun uç noktalarına bağlıdır. (Sürtünme ya da başka kayıp kuvvetleri varsa kuvvet konservatif değildir).

Çünkü $\vec{F} \cdot d\vec{r} > 0$ daima pozitifdir.



Stokes yasa

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{a}$$

$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ olarak yazılabilir ve bir gradyanın rotasyoneli her zaman sıfır olduğundan

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \quad \text{pot. ya da pot. enerji. yazılır.}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = dV \Rightarrow W = -V \Big|_1^2 = V_1 - V_2 \text{ pot. pot. enerjisi.}$$

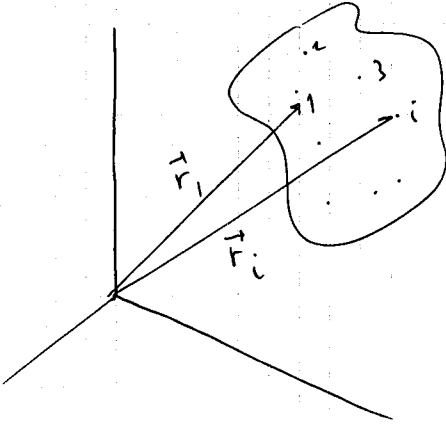
$$T_2 - T_1 = V_1 - V_2$$

$$\Rightarrow V_1 + T_1 = V_2 + T_2$$

(Eğer bir maddesel noktaya etkiyen kuvvetler konservatif ise maddenin $T+V$ toplam enerjisi korunur.)

1.2.) Bir maddesel nokta sisteminin mekaniği (Çok parçacık Mekaniği):

$$i=1, 2, \dots, N$$

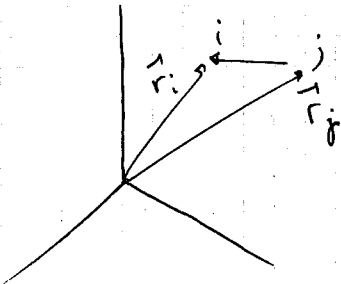


Dış kuvvetler: Sistemin dışındaki kaynakların maddesel noktalara ettiği kuvvetler.

İç. Kuvvetler: Sistemdeki bütün maddesel noktaları, (i) maddesel noktaya ettiği kuvvetler.

$$\vec{F}_i^{(dis)} + \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} = \vec{\dot{p}}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt} \quad \vec{F}_{ii} = \vec{0}$$

(N-1) kuvvet.



$\vec{F}_{ji} = j$. parçacığına i . ye uyguladığı kuvvet.

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij} \quad \text{III. Yasa.}$$

Bütün maddesel noktalar üzerinden toplam alırsak oluruz

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i^{(dis)} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{F}_{ji} \quad \vec{F}_{ji} + \vec{F}_{ij} = \vec{0}$$

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

maddesel noktaların için vektörlerinin kütlelerine göre ağırlıklı ortalaması.

$$= \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} \Rightarrow M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i^{(dis)} = \vec{F}^{(dis)}$$

$$\vec{F}^{(dis)} = M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \dot{\vec{P}} \quad (\text{parçacık sist. için LMK})$$

Sistemimize uygulanan kuvvetlerin bileşkesi sisteminin toplam mom. 'unun zamanı göre değişimi.

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

i. parçacık için ;

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(dis)} + \sum_j \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} = \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

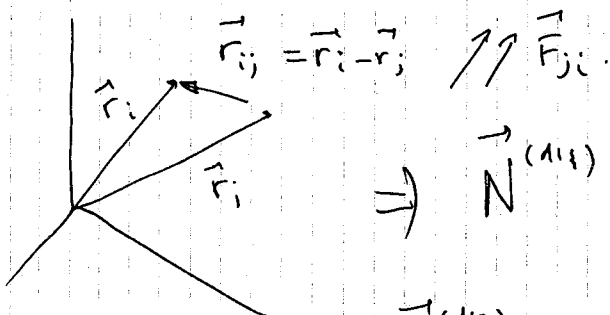
$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(dis)} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} = \sum_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

$$\sum_i \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \sum_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} + \sum_i \cancel{\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i}^0$$

$$\Rightarrow \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(dis)} + \underbrace{\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji}} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \dot{\vec{L}}$$

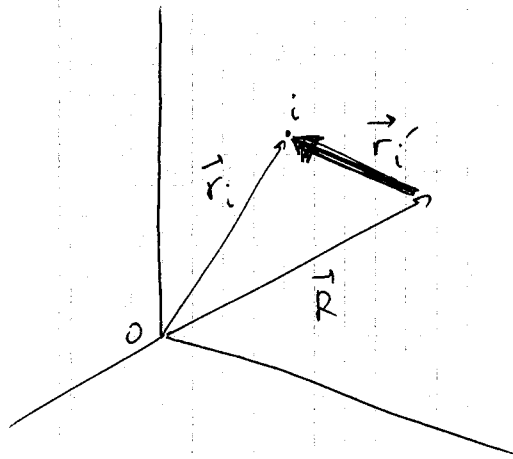
$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ji} = \vec{0}$$

$$\vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ji} = 0$$



$$\Rightarrow \vec{N}^{(dis)} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\vec{N}^{(dis)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = \text{sbtl.}$$



$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{R}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{V}$$

K.M.'nin hızı.

i. m'n K.M.'ne göre hızı.

$$\vec{v}_i' = \frac{d\vec{r}_i'}{dt}$$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i (\vec{r}_i' + \vec{R}) \times m_i (\vec{v}_i' + \vec{V})$$

$$= \sum_i \vec{R} \times m_i \vec{V} + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' + \left(\sum_i m_i \vec{r}_i' \right) \times \vec{V} + \vec{R} \times \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \vec{r}_i' \right)$$

$$= \vec{R} \times M \vec{V} + \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{p}_i'$$

O noktasına göre açısal mom. = K.M. 'de toplanmış sistemin
açısal momentumu + K.M. 'ne göre hesaplanan açısal mom.

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i^{(dis)} \cdot d\vec{r}_i + \sum_i \sum_{j \neq i} \int_1^2 \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_i$$

$$= \sum_i \int_1^2 m_i \dot{v}_i \cdot v_i dt = \sum_i \int_1^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) dt = T_2 - T_1$$

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

K.M. koordinatlarına dönüşüm yapalım.

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{V} + \vec{V}_i') \cdot (\vec{V} + \vec{V}_i')$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i V^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i V_i'^2 + \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

$$= \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i'^2$$

(Bütün kütle K.M. toplamı olan sistemin enerjisi + K.M. etrafındaki hareketin K.E.).

$\vec{F}_i^{(dis)}$ 'ler potansiyelden türesin:

$$\vec{F}_i^{(dis)} = -\vec{\nabla}_i V_i$$

$$\begin{aligned} - \int_1^2 \sum_i \vec{\nabla}_i V_i \cdot d\vec{r}_i &= - \sum_i \int_1^2 dV_i = - \sum_i V_i \Big|_1^2 \\ &= \left(\sum_i V_i \right)_1 - \left(\sum_i V_i \right)_2 \end{aligned}$$

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{\nabla}_i V_{ij} = +\vec{\nabla}_j V_{ij} = -\vec{F}_{ij} \quad \vec{\nabla}_i \rightarrow \vec{\nabla}_j$$

$$V_{ij} = V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

$$d\vec{r}_i - d\vec{r}_j = d\vec{r}_{ij}$$

$$\sum_i^2 \sum_{\substack{j \\ \neq i}} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ \neq}} \sum_1^2 \nabla_{ij} V_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{ij} V_{ij} \Big|_1^2$$

$$V = \sum_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ \neq}} V_{ij}$$

→ sist. in iç. pot. enerjisi.

Sadece ri'yi cisimlerin için daima sbt olacaktır.

Kate cisim : $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2 = \text{sbt.}$

$$|\vec{r}_{ij}|^2 = \text{sbt.}$$

$$2 \vec{r}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{ij} \perp d\vec{r}_{ij}$$

$$\vec{F}_{ij} // \vec{r}_{ij} \Rightarrow \vec{F}_{ij} \perp d\vec{r}_{ij} \Rightarrow V_{ij} = 0$$

1.3. Bağ şartları :

Gerek çok ve gerekse tek parçacıklı sistemlerin hareketini Newton'un II. yasası ile inceliyorduk

$$\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(dus)} + \sum_j \vec{F}_{ji} \quad (i=1,2,\dots,N)$$

Bu denklemlerin çözümünü yapar iten sistemin hareketini sınırlayan bağları gözömine almak gerekir. Örneki, rijid cisimler, abaküs-
teki halkaların hareketi, bir kap içindeki gaz molekülleri, katı bir kürenin yüzeyi üzerine konan maddesel nokta, hareketi kısıtlayanlardır.

N parçacıklı bir sistem $3N$ bağımsız koordinata sahip olacaktır. Bağlar da bu serbestlik derecesini kısıtlayacaklardır.

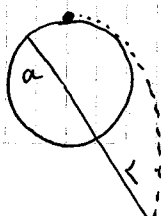
① Holonomik Bağlar: Bağ şartları noktanın koordinatlarını (ve zamanı) bağlayan denklemler olarak ifade edilebilirse ve

$$f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$$

şeklinde bir denklem ile veriliyorsa. Örneğin rijid cisimlerde bağlar

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 - C_{ij}^2 = 0$$

② Holonomik Olmayan Bağlar: Yukarıdaki tarzda ifade edilemeyen birtelli bağlar.



$$r^2 \geq a^2$$

$$r^2 - a^2 \geq 0$$

2137440 / Akbante

* Bağlar zamandan bağımsız (skleronom) ya da zamana bağlı (reonom) olup olmamalarına da göre sınıflandırılır.

* Bağ sınıflarında iki tip güçlük ortaya çıkar

(1) $\vec{r}_i$ ($i=1, \dots, N$) koordinatlarının hepsi ayrı ayrı bağımsız değil çünkü bağ denklemleri ile bağlıdır.

(2) Başlangıçta bağlar bilinen ~~koordinatlar~~ ^{koordinatlar} ve aradığımız görülden elde edilmelidir.

(#) Holonom bağlar halinde 1. güçlük genelleştirilmiş koordinatlar yardımı ile çözülebilir.

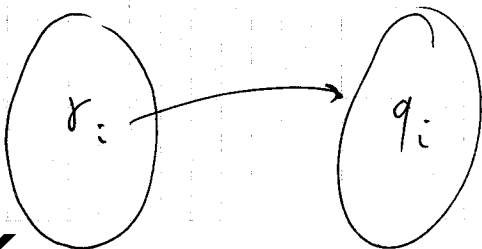
$3N$ serbestlik derecesine sahip N maddesel nokta sistemi'nin k denklem ile ifade edilen holonom bağları varsa, sistemin $n = 3N - k$ bağımsız koordinatı kalır. Bağlı koordinatların yok edilmesi, yeni $3N - k$ tane bağımsız $q_1, \dots, q_{3N-k}$ tane değişkenin ortaya konulması ile de ifade edilebilir. ^{Fisikleri} ~~Bunları~~ ^{bunlar} ~~estileri~~ cinsinden şu şekilde yazmak mümkündür; (tersi)

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1(q_1, \dots, q_{3N-k}, t)$$

$$\vdots$$

$$\vec{r}_N = \vec{r}_N(q_1, \dots, q_{3N-k}, t)$$

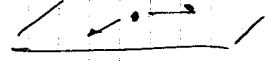
Bağlar bunların içinde uygun şekilde ifade edilir.



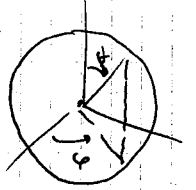
ya da parametrik gösterim.

Genelleştirilmiş koord.

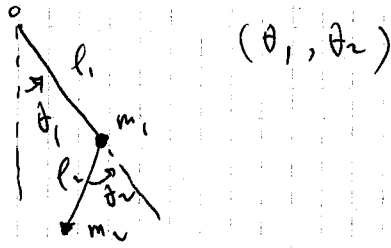
1-) Bir düzlem üzerinde hareket zorlanan bir parçacık için (X, Y) veya (r, θ)



2-) Bir küre yüzeyi üzerinde (θ, φ) enlem ve boylam.



3-) Güç soruları:

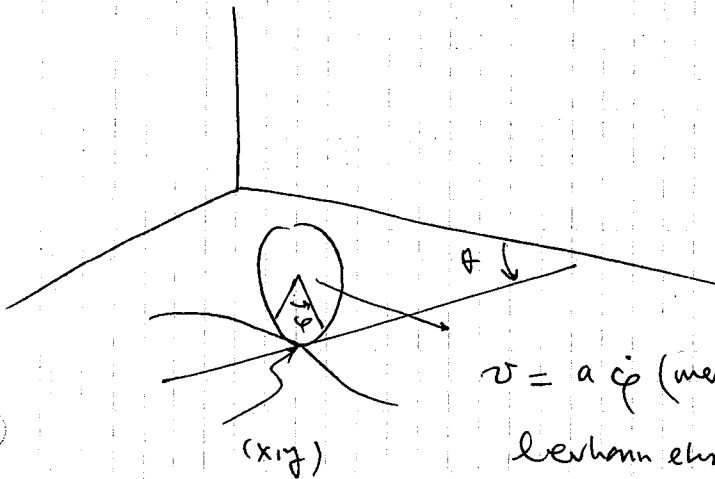


4-) m_1 $\xrightarrow{l}$ m_2 uzayda serbest olsun.

$$\text{Bağ koşulu: } (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l^2$$

$$3N = 6 \text{ serbestlik derecesi} - 1 = 5 \quad (\text{3uzamlık, 2 açı.})$$

(#) Bağ kelamı değilse bağı ifade eden denklemler bağı koşulların yokedilmesinde kullanılmaz (pürüzlü yüzey üzerinde kayan, den yuvarlanan bir cisim).



$$\dot{x} = v \sin \theta$$

$$\dot{y} = -v \cos \theta$$

$v = a \dot{\varphi}$ (meridiyen hızı)
denklemi ele alalım.

$$dx - a \sin \theta d\varphi = 0$$

$$dy + a \cos \theta d\varphi = 0$$

problemi görmeden
integre edilemezler.

1.4.) D'Alembert ilkesi ve Lagrange denklemleri :

Bir sistemin sonsuz küçük sanal yerdeğiştirmesi ; verilen bir t anında sistem üzerine uygulanan bağlar ve kuvvetlerle uyruşan keyfi sonsuz küçük $\delta \vec{r}_i$ koord. değişiminin sonucu olarak sistemin konumundaki değişme. Terdeęiřtirme süresince, kuvvetlerin ve bağların değişebilirleceği dt zaman aralığında sistemin yapacağı gercek yerdeğiştirmeden ayrılmak için virtüel denir.

① Sistem dengede olsun.

$$\vec{F}_i = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \text{ olur}$$

$$\begin{array}{cc} \vec{F}_i^{(u)} & \vec{f}_i \\ \text{uygulanan ve bağ kuvvetleri} \end{array}$$

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(u)} + \vec{f}_i$$

$$\Rightarrow \sum_i \vec{F}_i^{(u)} \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_i \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

İncelememizi bağ kuvvetleri için virtüel işinin sıfır olmağı sistemlerde sınırlandırır. (rijit cisimler) iş yapmaya bağ kuvvetleri

Bu $\vec{F}_i^{(u)}$ 'ların sıfır olduğunu varsayalım

$$\sum_i \vec{F}_i^{(u)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (\text{Virtüel iş ilkesi})$$

② Dengede always sitemler:

$$\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i \quad \vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0$$

$$\sum_i (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(u)} + \vec{f}_i$$

$$\sum_i (\vec{F}_i^{(u)} + \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_i \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Kendimizi iş yapmayan bağ kuvvetleri haline sıvılayalım.

$$\boxed{\sum_i (\vec{F}_i^{(u)} + \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0} \quad \text{D'Alembert ilkesi}$$

İlkkiyi genelleştirilmiş koord.'ların virtüel yerdeğiştirilmesi cinsinden bir ifadeye dönüştürmeliyiz. Şimdi $\vec{r}_i$ 'lerden q_i 'lere geçelim.

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n, t)$$

$$\vec{v}_i = \frac{d}{dt} \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n, t) = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial t} + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$\sum_i \left(\vec{F}_i^{(u)} \leftrightarrow \dot{\vec{p}}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

$$\rightarrow \sum_i \vec{F}_i^{(u)} \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i \sum_j \vec{F}_i^{(u)} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$= \sum_j \left(\sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

Q_j generalisiertes Elementarverm. lautet.

$$\rightarrow \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i,j} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i m_i \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

$$= \sum_i m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial q_j} \frac{d}{dt} \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow \sum_j \left[Q_j - \sum_i \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) + \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0$$

$$Q_j - \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{v}_i^2}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{1}{2} \sum_i m_i \frac{\partial \vec{v}_i^2}{\partial q_j} = 0$$

$$Q_j - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = 0$$

Lagrange denkleme

1.5. Hıza bağlı potansiyel ve kayıp fonksiyonu:

Lagrange denklemleri, sistem alışılan anlamda konservatif olmasa bile, genelleştirilmiş kuvvetler bir $U(q_i, \dot{q}_i)$ fonksiyonundan

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

formülü ile elde edilebiliyorsa $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_j} = 0$ formuna konulabilir. Lagrange forkları

$$L = T - U$$

formunda yazılabilir. U genelleştirilmiş potansiyel. ya da hıza bağlı potansiyel.

Örnek:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{Faraday yasa.}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Ampère kanunu.

$$\vec{F} = q \left\{ \vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{v} \times \vec{B}) \right\}$$

$\vec{E}$ bir skaler forklunun gradienti değildir çünkü $\vec{\nabla} \times \vec{E} \neq 0$ 'dır. fakat $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ olduğundan

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

olabilir yazılabilir.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = q \left\{ -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right\}$$

$$(\vec{\nabla} \phi)_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$[\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})]_x = v_y (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z - v_z (\vec{\nabla} \times \vec{A})_y$$

$$= v_y \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) - v_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right)$$

$$= \underbrace{\left(v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} \right)}_{\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{A}} - \underbrace{\left(v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right)}_{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) A_x}$$

$\vec{A}$ 'nin zamanına göre toplam türevi: $\frac{\partial}{\partial t} (\vec{v} \cdot \vec{A})$

$$\frac{d}{dt} A_x = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right)$$

$$[\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})]_x = \frac{\partial}{\partial x} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{d}{dt} A_x + \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

$$F_x = q \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right) - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial v_x} (\vec{A} \cdot \vec{v}) \right) \right\}$$

$$= q \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \left(q \phi - \frac{q}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right) + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v_x} \left(-q \phi + \frac{q}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right) \right\}$$

$$U = q\phi - \frac{q}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \quad \text{elektromagnetik pot. genelleştirilmiş pot.}$$

$$L = T - q\phi + \frac{q}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}$$

olarak yazılabilir. Eğer bir sisteme etkiyen kuvvetlerin bazıları bir potansiyelden türetilenliğine, Lagrange denklemleri her zaman

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j$$

← bir pot. 'den türemeyen kuvvetlerin

şeklinde yazılabilir.

Örnek: Sürtünme kuvvetleri maddesel noktanın hızı ile orantılıdır.

$$F_{fx} = -k_x v_x$$

Bu tipteki sürtünme kuvvetleri

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_i (k_x v_{ix}^2 + k_y v_{iy}^2 + k_z v_{iz}^2)$$

① sistemin modelerel noktaları üzerinde.

Rayleigh kayıp fonksiyonundan türetilir.

$$F_{fx} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_x}$$

$$\vec{F}_f = -\vec{\nabla}_v \mathcal{F}$$

sistem tarafından sürtünmeye karşı yapılan iş

$$dW_f = -\vec{F}_f \cdot d\vec{r} = -\vec{F}_f \cdot \vec{v} dt = -(k_x v_x^2 + k_y v_y^2 + k_z v_z^2) dt$$

2 $\mathcal{F}$: sürtünme nedeniyle sisteme giren birim zamanda enerji miktarı

Sürtünme kuvvetinden oluşan genelleştirilmiş kuvvet bileşeni

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_{if} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = - \sum \vec{\nabla}_v \mathcal{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

$$= \sum \vec{\nabla}_v \mathcal{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j}$$

Lagrange denklemleri

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

1.6. Lagrange formülasyonunun basit uygulamaları:

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i; t)$$

1 genelleştirilmiş koordinata geçecek olursak kinetik enerji

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 + \sum_{ij} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \dot{q}_j + \sum_{jk} \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

$$= a + \sum_j a_j \dot{q}_j + \sum_{jk} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

Eğer dönüşüm denklemlerinde zaman açık olarak mevcut değilse

Sadece son terim sıfırdan farklıdır.

1. Uzayda tek maddesel nokta

a. Kartezyen koordinatlar:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

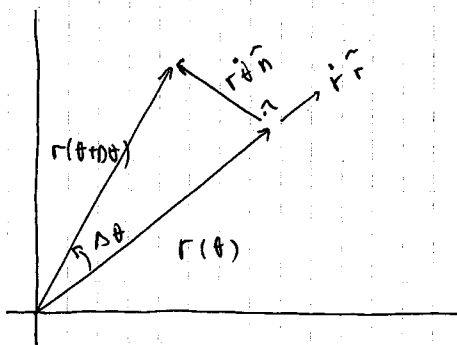
Genelleştirilmiş kuvvetler: F_x, F_y, F_z

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = F_x \quad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = F_y \quad \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = F_z$$

b. Düzlem kutupsal koordinatlar:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta} \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta} \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2)$$



$$Q_r = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \vec{F} \cdot \hat{r} \quad \vec{r} = |\vec{r}| \hat{r}$$

$$= F_r$$

$$Q_\theta = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \vec{F} \cdot r \hat{\theta} = r F_\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2 \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) = m \ddot{r}$$

$$m \ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 = F_r$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\theta}) = 2mr \dot{r} \dot{\theta} + mr^2 \ddot{\theta} = r F_{\theta}$$

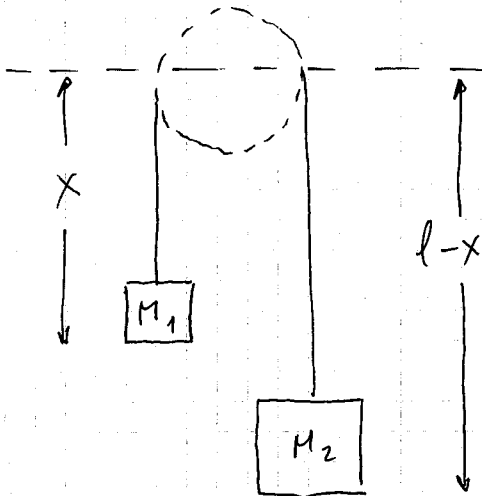
$$\frac{dL}{dt} = N$$

2. Atwood makinası :

holonom, skleronom bağı olan konservatif

bir sistem.

ipin uzunluğu l .



$$V = -M_1 g x - M_2 g (l-x)$$

$$T = \frac{1}{2} (M_1 + M_2) \dot{x}^2$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} (M_1 + M_2) \dot{x}^2 + M_1 g x + M_2 g (l-x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (M_1 - M_2) g \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M_1 + M_2) \dot{x}$$

$$(M_1 + M_2) \ddot{x} = (M_1 - M_2) g$$

$$\ddot{x} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} g$$

Bağ kuvvetleri: burada ipteki gerilme kuvveti L 'de akmıyor dolay

ile Lagrange methodu ile gerilme kuvvetini buluyoruz.

3. Kuwetsiz bir uzayda düzgün olarak dönen tır tel
üzerinde kayan halka.

$$x = r \cos \omega t$$

ω : dönme açısal hızı.

$$y = r \sin \omega t$$

bağ zamana bağlı.

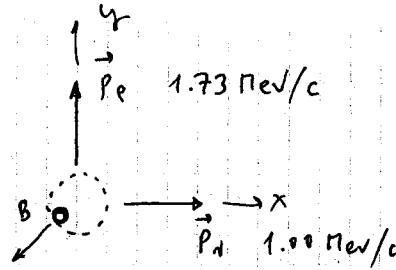
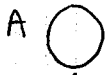
$$\dot{\theta} = \omega$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2)$$

$$m\ddot{r} - m r \omega^2 = 0 \quad \ddot{r} = r \omega^2$$

BS K

1.)



$$1 \text{ MeV} = 1.59 \times 10^{-6} \text{ erg}$$

$$m_B = 3.90 \times 10^{-22} \text{ gr}$$

$$A \longrightarrow B + e + \bar{\nu}$$

$$\vec{0} = \vec{p}_A = \vec{p}_B + \vec{p}_e + \vec{p}_{\bar{\nu}}$$

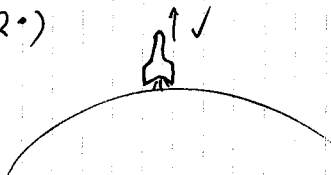
$$0 = p_{Bx} + p_{ex} + p_{\bar{\nu}x} \quad p_{Bx} = - (p_{ex} + p_{\bar{\nu}x}) = -1.00 \text{ MeV}/c$$

$$0 = p_{By} + p_{ey} + p_{\bar{\nu}y} \quad p_{By} = - (p_{ey} + p_{\bar{\nu}y}) = -1.73 \text{ MeV}/c$$

$$p_B = (1^2 + (1.73)^2)^{1/2} \approx 2 \text{ MeV}/c \quad \tan \theta = (1 / 1.73)$$

$$T = \frac{p_B^2 c^2}{2m_B c^2} \approx 9 \text{ MeV}$$

2.)



$$E = T + V = \frac{1}{2} M v^2 + G \frac{M m_0}{r}$$

we da top. energi 0

$$\frac{1}{2} M v_k^2 = G \frac{M m_0}{R} \Rightarrow v_k^2 = \frac{2GM}{R} = 2gR$$

$$v_k = 11.5 \text{ km/s}$$

3.

↑ V yere göre hızı.

 $V - V'$ yere göre hızı

giden gazın iletke göre hızı.

$$\frac{d}{dt} (\vec{P}_r + \vec{P}_g) = m\vec{g} \quad \frac{d}{dt} (P_r + P_g) = -mg$$

Birim zamanda gazın momentumundaki değişim = Birim zamanda gazın kütlesindeki değişim $\times$ Hızı.

$$\frac{dP_g}{dt} = - \frac{dm}{dt} (V - V')$$

$$\frac{dP_r}{dt} = \frac{d}{dt} (mV) = m \frac{dV}{dt} + V \frac{dm}{dt}$$

$$m \frac{dV}{dt} + V \frac{dm}{dt} - \frac{dm}{dt} (V - V') = -mg$$

$$m \frac{dV}{dt} + V' \frac{dm}{dt} = -mg$$

$$m(t) = m_0 - kt$$

(↓ to oranındaki) - (birim zamanda çıkan gaz miktarı)

$$-k = \frac{dm}{dt} \text{ integre edersek } -kt$$

$$\frac{dV}{dt} - \frac{V'k}{m} = -g \Rightarrow \frac{dV}{dt} - \frac{V'k}{m_0 - kt} = -g$$

$$\Rightarrow \int_{V_0}^V dV = -g \int_0^t dt + V'k \int_0^t \frac{dt}{m_0 - kt}$$

$$V - V_0 = -gt + V'k \int_0^t \frac{dt}{m_0 - kt}$$

$$V = V_0 - gt - V' \ln \left(\frac{m_0 - kt}{m_0} \right)$$

$$V_0 = 0 \quad V' = 2060 \text{ m/s}$$

$$k = \frac{1}{60} m$$

$$t = 60 \text{ s sonra.}$$

$$V = V_{\text{maksimum}} =$$

BS K

4.

$$F_r = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2\ddot{r}r}{c^2} \right) \quad (1) = -\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u}{\partial \dot{r}} \right) \quad (2)$$

böyle bir kuvvetin vereceği genelleştirilmiş potansiyel.

$u = 1/r$ almalı (1) ifadenin ilk terimi $1/r^2$.

$$u = \frac{1}{r} + \frac{\dot{r}^2}{c^2 r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \dot{r}} = \frac{2\dot{r}}{c^2 r}$$

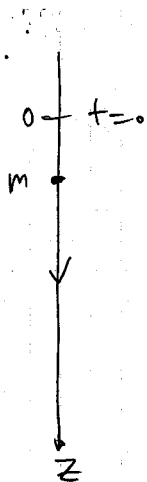
$$F_r = -\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u}{\partial \dot{r}} \right)$$

$$= \frac{1}{r^2} + \frac{d}{dt} \left(\frac{2\dot{r}}{c^2 r} \right) = \frac{1}{r^2} + \frac{2\ddot{r}}{c^2 r} - \frac{2\dot{r}^2}{c^2 r^2} + \frac{\dot{r}^2}{c^2 r^2}$$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) - \frac{1}{r} - \frac{\dot{r}^2}{c^2 r}$$

26

5.



$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{z}} = 0 \quad \mathcal{F} = \frac{1}{2} k \dot{z}^2$$

$$V = -mgz \quad T = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 \quad L = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + mgz$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \dot{z} \quad m \ddot{z} = +mg + k \dot{z}$$

$$\ddot{z} + \frac{k}{m} \dot{z} = g \quad \dot{z} = v$$

$$\dot{v} + \frac{k}{m} v = g \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} v \Rightarrow v(t) = C e^{-(k/m)t}$$

$$C = C(t) \cdot \text{const.}$$

$$\dot{C} e^{-kt/m} + C \left(-\frac{k}{m} \right) e^{-kt/m} + \frac{k}{m} C e^{-kt/m} = g$$

$$\Rightarrow \dot{C} = \frac{dC}{dt} = g e^{kt/m} \quad C(t) = g \frac{m}{k} e^{kt/m} + C_0$$

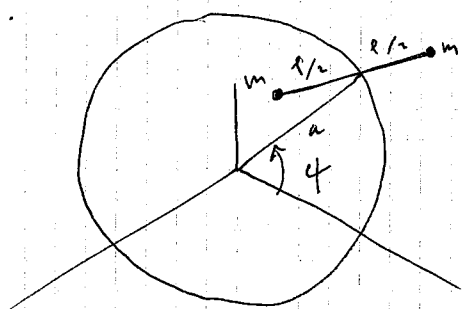
$$v(t) = e^{-kt/m} \left[C_0 + g \frac{m}{k} e^{kt/m} \right]$$

$$= C' e^{-kt/m} + g \frac{m}{k}$$

$$v(0) = C' + g m/k = 0 \Rightarrow C' = -gm/k.$$

$$v(t) = g \frac{m}{k} \left[1 - e^{-kt/m} \right]$$

6.



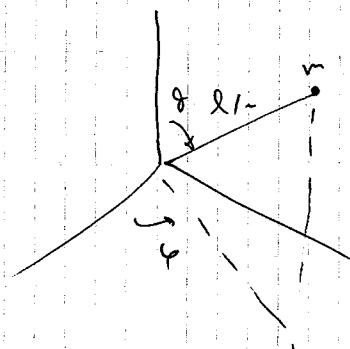
$$\text{Toplam K.E} = \frac{1}{2} M V^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

$$V = a \dot{\varphi}$$

$$x = \frac{l}{2} \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = \frac{l}{2} \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = \frac{l}{2} \cos \theta$$



$$\dot{x} = \frac{l}{2} [\cos \theta \cos \varphi \dot{\theta} - \sin \theta \sin \varphi \dot{\varphi}]$$

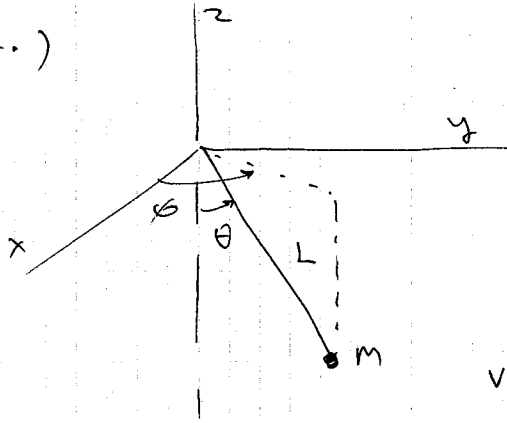
$$\dot{y} = \frac{l}{2} [\cos \theta \sin \varphi \dot{\theta} + \sin \theta \cos \varphi \dot{\varphi}]$$

$$\dot{z} = \frac{l}{2} \sin \theta \dot{\theta}$$

$$v'^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \Rightarrow v_i'^2 = \frac{l^2}{4} [\dot{\theta}_i^2 + \sin^2 \theta_i \dot{\varphi}_i^2]$$

$$T = \frac{1}{2} (2m) (a \dot{\varphi})^2 + 2 \frac{1}{2} \left[\left(\frac{l}{2} \dot{\theta} \right)^2 + \left(\frac{l}{2} \sin \theta \dot{\varphi} \right)^2 \right]$$

7.)



$$x = L \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = L \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = L \cos \theta$$

$$v^2 = L^2 [\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2]$$

$$T = \frac{1}{2} m L^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)$$

$$V = -m g L \cos \theta$$

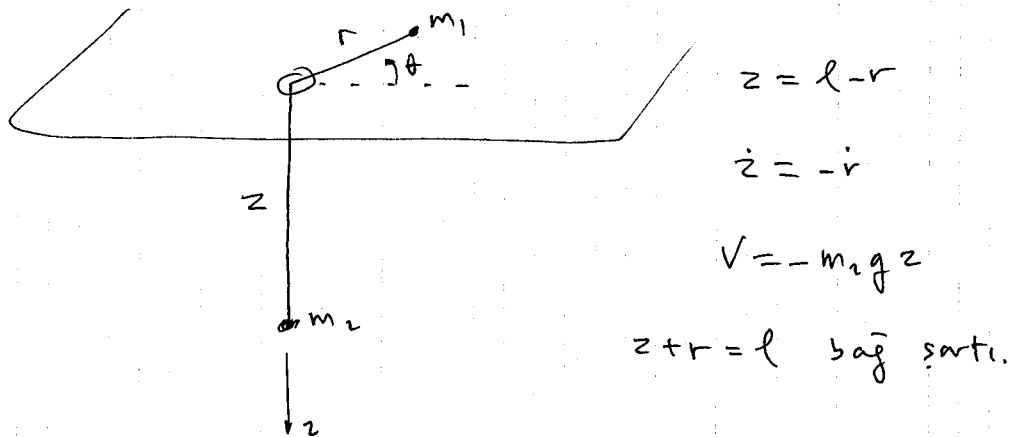
$$L = \frac{1}{2} m L^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - m g L \cos \theta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m L^2 \dot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m L^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = m L^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 - m g L \sin \theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \end{array} \right.$$

$$\theta: m L^2 \ddot{\theta} - m L^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 + m g L \sin \theta = 0$$

$$\varphi: \frac{d}{dt} (m L^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}) = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\text{const}}{m L^2 \sin^2 \theta} \quad \text{azisal hız.}$$

9.



$$L = \frac{1}{2} m_1 (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}^2 + m_2 g (l - r)$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_1 r^2 \dot{\theta}^2 + m_2 g (l - r)$$

$$(m_1 + m_2) \ddot{r} - m_1 r \dot{\theta}^2 + m_2 g = 0$$

$$\frac{d}{dt} (m_1 r^2 \dot{\theta}) = 0 \quad m_1 r^2 \dot{\theta} = L \quad \Rightarrow \dot{\theta} = L / m_1 r^2$$

$$(m_1 + m_2) \ddot{r} = \left(-m_2 g + \frac{L^2}{m_1 r^3} \right) \quad / \dot{r}$$

$$\dot{r} (m_1 + m_2) \ddot{r} = - \frac{d}{dt} \left[m_2 g r + \frac{L^2}{2 m_1 r^2} \right] \quad \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \frac{d}{dt} (\dot{r}^2) = - \frac{d}{dt} \left[m_2 g r + \frac{L^2}{2 m_1 r^2} \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{r}^2 + m_2 g r + \frac{L^2}{2 m_1 r^2} \right] = 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 radyal KE pot m_1 in D. KE.

(1)

$$f = \frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}} = (1+\dot{y}^2)^{1/2} (2gy)^{-1/2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2} (2gy)^{-3/2} \cdot (2g) (1+\dot{y}^2)^{1/2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{(2gy)^{-1/2} \dot{y}}{(1+\dot{y}^2)^{1/2}} = (2gy)^{-1/2} \dot{y} (1+\dot{y}^2)^{-1/2}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = -\frac{1}{2} (2gy)^{-3/2} (2g\dot{y}) \dot{y} (1+\dot{y}^2)^{-1/2}$$

$$+ (2gy)^{-1/2} \ddot{y} (1+\dot{y}^2)^{-1/2}$$

$$- \frac{1}{2} (1+\dot{y}^2)^{-3/2} \cdot 2\dot{y} \ddot{y} (2gy)^{-1/2} \dot{y}$$

$$= \frac{\ddot{y}}{\cancel{\sqrt{2gy}} \sqrt{1+\dot{y}^2}} - \frac{\cancel{g} \dot{y}^2}{(2g) \cancel{(2gy)^{1/2}} \sqrt{1+\dot{y}^2}}$$

$$= \frac{\ddot{y}^2 \ddot{y}}{\cancel{\sqrt{2gy}} (1+\dot{y}^2) \sqrt{1+\dot{y}^2}}$$

$$= - \frac{\cancel{g} \sqrt{1+\dot{y}^2}}{(2g) \cancel{\sqrt{2gy}}}$$

$$\ddot{y} - \frac{\dot{y}^2}{2y} - \frac{\dot{y}^2 \ddot{y}}{(1+\dot{y}^2)} = - \frac{1+\dot{y}^2}{2y}$$

$$2\ddot{y}(1+\dot{y}^2)y - \dot{y}^2(1+\dot{y}^2) - 2y\dot{y}^2\ddot{y} = -(1+\dot{y}^2)^2$$

$$2y\ddot{y} + 2y\dot{y}^2\ddot{y} - \dot{y}^2 - \dot{y}^4 - 2y\dot{y}^2\ddot{y} = -1 - \dot{y}^4 - 2\dot{y}^2$$

$$2y\ddot{y} + \dot{y}^2 = -1$$

$$\boxed{2y\ddot{y} + \dot{y}^2 + 1 = 0}$$

(x**2)

Pi x** (1/2.)

(x**2)*(Pi**2)

$$\frac{d}{dx}(\dot{y}^2) = 2\dot{y}\ddot{y}$$

BS K