

BÖLÜM 2

DEĞİŞİM İLKELERİ ve LAGRANGE DENKLEMLERİ

2.1. Hamilton İlkesi : Lagrange denklemlerini, sistemin t_1, t_2 zamanları arasındaki bütün hareketini ve gerçek hareketten başlayarak bütün hareketin küçük virtüel yerdeğişimlerini gözönüne alan bir ilke den de çıkamak mümkündür. "integral ilke".

Bir sist.'in anı konumu $q_1, \dots, q_n$ genelleştirilmiş koordinatları ile tanımlanır ve q 'ların n koordinat eksenini meydana getirdiği kartezyen hiperuzaya bir noktaya karşı gelir. Zaman geçtikçe sistem noktası bu konum uzayında "hareketin yörüngesi" adını alan bir eğri çizer. Zaman formal olarak eğrinin bir parametresi olarak gözönüne alınabilir: yörünge üzerinde her noktaya zamanın bir veya daha çok değeri karşı gelir.

Konservatif sist. ler için Hamilton ilkesini (genelleştirilmiş potansiyellerin varlığını kabul eden anlamda) ortaya koyabiliriz.

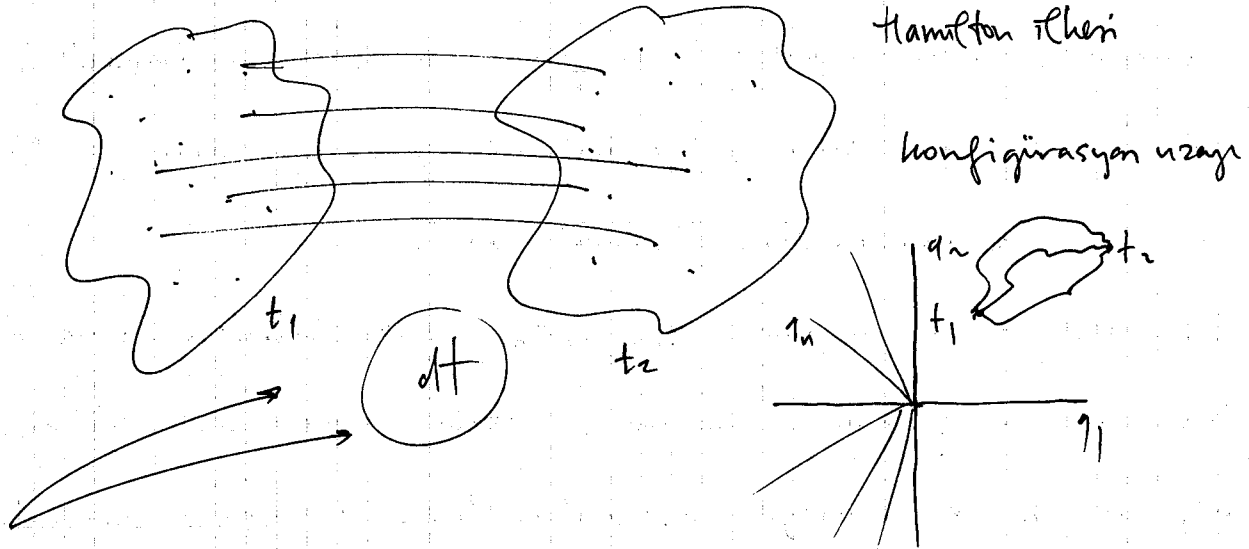
* Sistemin t_1 zamanından t_2 zamanına hareketi, $L = T - V$ olmak üzere

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

Gizgisel integrali, hareketin yörüngesi boyunca ekstremum olacak şekilde dir.



$\delta t = 0$ $\vec{r}_i$ nispetel yerdeğiştirme
D'Alembert ilkesi



Hamilton ilkesi

konfigürasyon uzayı

Öyle bir yol izler ki L , I integralini ext. yavaş yavaş izler.

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt = 0$$

Lagrange denklemleri için hem gerek ve hem de yeterlidir. Yani Hamilton ilkesinin Lagrange denklemlerinden çıkacağı gösterilebilir yada tam tersi. Biz bunu yapacağız.

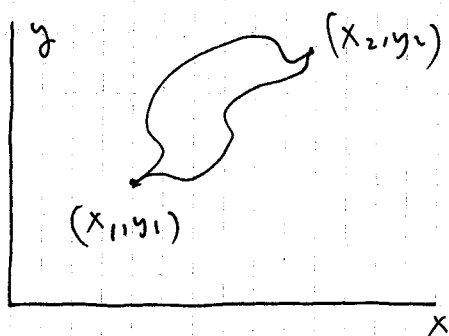
2.2. Değişimler hesabının bazı özel metodları:

Verilen bir çizgisel integrali ext. yavaş eğri nasıl bulunur?

Bir $f(y, \dot{y}, x)$ fonk.-nın x_1 ve x_2 arasındaki çizgisel integrali ext.-yavaş bir $y = y(x)$ yörüngesi bulundu istiyoruz.

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x) dx$$

bir maksimum ya da bir minimum vardır. $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$



$$\dot{y} = \frac{dy}{dx}$$

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha y(x)$$

$\alpha = 0$ gerçek yörünge $y(x_1) = y(x_2) = 0$

$\alpha \neq 0$ diğer yörüngeler.

$$J(\alpha) = \int_1^2 f(y(\alpha, x), \dot{y}(\alpha, x), x) dx$$

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} \quad \text{'am ext. bulur.}$$

$$\delta J = \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha} \right) \delta \alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} \right] dx d\alpha = 0$$

bray gözetim alalım.

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) dx$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) dx$$

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial x} \right] dx$$

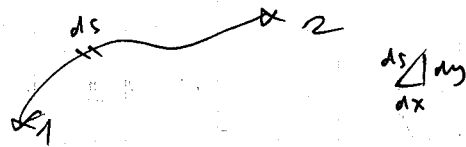
$$= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \frac{\partial y}{\partial x} dx$$

Sy 'y'ın dx'e göre değişimi

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

1. Bir düzlemde iki nokta arasındaki en yakın uzaklık: Düzlemde yay uzunluğu elemanı

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$



- ① ve ② noktaları arasındaki eğrinin toplam uzunluğu;

$$I = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

$f = \sqrt{1 + y'^2}$

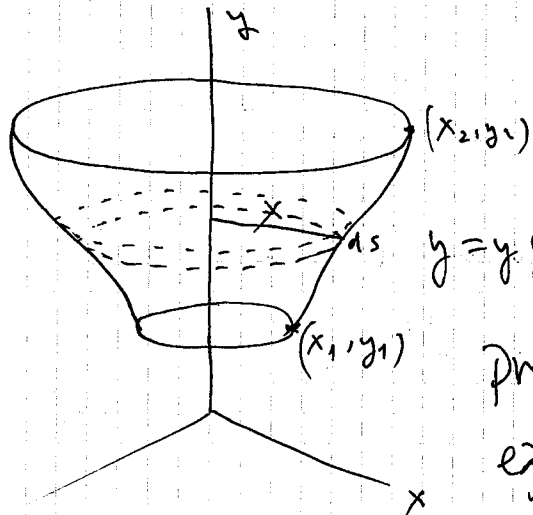
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = c \quad \Rightarrow \quad y'^2 = c^2 (1+y'^2) \quad \Rightarrow \quad y'^2 (1-c^2) = c^2$$

$$y'^2 = \frac{c^2}{1-c^2} \quad \Rightarrow \quad y' = A \quad \Rightarrow \quad \text{çözülür}$$

$$A = c / \sqrt{1-c^2} \Rightarrow y = Ax + B$$

2. Minimum Dönel yüzey:



$y = y(x)$ eğrisi ile elde ediyoruz.

Problem, yüzey alan minimum olacak eğri bulma problemidir.

$$2\pi x ds = 2\pi x \sqrt{1+y'^2} dx \quad \text{yüzey sıradaki alan. Toplam Alan}$$

$$2\pi \int_1^2 x \underbrace{\sqrt{1+y'^2}}_f dx$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = 0$$

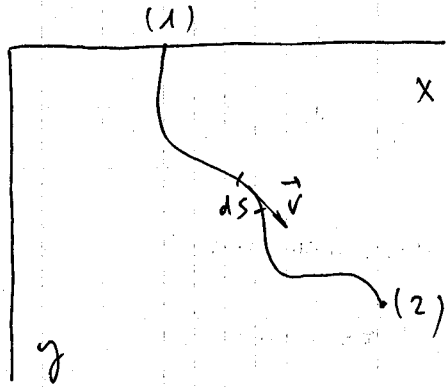
$$\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} = a \Rightarrow y'^2 (x^2 - a^2) = a^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$y = a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} + b = a \operatorname{arcosh} \frac{x}{a} + b$$

$$x = a \cosh \frac{y-b}{a}$$

6.

3. Brakistokron problemi : Bir maddesel noktanın yerçekimi etkisi altında ilk hızsız olarak harekete başladığı, verilen bir noktadan, aşağıda verilen 2. bir noktaya en kısa zamanda varması için iki noktaya birleştirilen eğrinin bulunmasıdır.



ds yolun dt zamanda alırsa

$$dt = \frac{ds}{v}$$

$$v = \sqrt{2gy}$$

problem $t_{12} = \int_1^2 \frac{ds}{v}$ 'nin minimumunu bulma problemi.

Enerji korunum teor. $\frac{1}{2}mv^2 = mgy \Rightarrow v = \sqrt{2gy}$

$$t_{12} = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx \quad f = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} \quad \text{John Bernoulli.}$$

2.3. Lagrange denklemlerinin Hamilton ilkesinden çıkarılması :

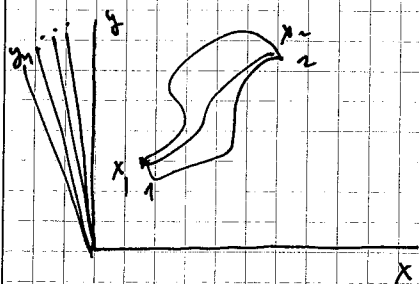
$$J = \int_1^2 f(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \dots, x) dx$$

integralini ext. yapan, yani bu integralin değerini en küçük yapan parametrik denklemler sınıfı nedir?

$$\delta J = \delta \int_1^2 f(y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x), x) dx = 0.$$

$$y_i(x, \alpha) = y_i(x, 0) + \alpha \eta_i(x) \quad i=1, \dots, n$$

$$\eta_i(x_1) = \eta_i(x_2) = 0$$



$$\delta J = \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} \delta \alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y_1} \frac{\eta_1}{\partial \alpha} + \dots \right] dx \delta \alpha$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\eta_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y_i'} \frac{\eta_i'}{\partial \alpha} \right] \delta \alpha dx$$

Küçük integ.

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) \right] \frac{\eta_i}{\partial \alpha} \right\} dx$$

δy_i

$$\frac{1}{\delta \alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial y_i'} = 0 \quad i=1, \dots, n \quad \text{tame denklemler.}$$

Euler - Lagrange Df. Denklemleri.

$$J = \int L(q_i, \dot{q}_i; t) dt \quad \left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow t \\ y_i \rightarrow q_i \\ f \rightarrow L \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

4.2. Konservatif olmayan kuvvetler için Hamilton ilkesi:

Değişim ilkesi $\delta I = \delta \int_1^2 (T+W) dt = 0$

$$W = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

δW : sist. üzerindeki kuvvetlerin, virtüel yerdeğişime etkisine yaptığı iş.

$$\delta W dt = \delta \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i dt = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i dt$$

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_j Q_j \delta q_j$$

$$\delta I = \int_1^2 T dt + \int_1^2 \sum_j Q_j \delta q_j dt$$

$$\int_1^2 \sum_j Q_j \delta q_j dt = - \int_1^2 \sum_j \delta q_j \left[\frac{\partial V}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right] dt \quad \text{genelleştirilmiş pot.}$$

$$= - \int_1^2 \sum_j \left(\frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt \quad (*)$$

$$(*) - \int \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} dt \delta q_j = - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \delta q_j dt$$

bu noktalarda q +'ye eşitlenir.

$$= - \delta \int_1^2 V dt$$

$$\delta \int_1^2 T dt - \delta \int_1^2 V dt = \delta \int_1^2 L dt = 0$$

$$\delta \int_1^2 T dt = \int_1^2 \sum_j \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \ddot{q}_j} \right) \right) \delta \ddot{q}_j dt$$

$$\int_1^2 \sum_j \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + Q_j \right) \delta q_j dt = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = -Q_j \quad (\text{Kuvvetler bir potansiyelden türemiyse})$$

Holonom olmayan bağlar için Hamilton denklemleri;

$$f(q_i, t) = a = \text{sbt} \quad \text{holonom.}$$

Eğer bağ denklemleri

$$\sum_k a_{lk} dq_k + a_{lt} dt = 0$$

formuna kalayca geçtiğimizde sistemi holonom olmasa da ele alabiliriz. Hamilton ilkesindeki değişim işleminde zaman sbt tutulur.

$$\sum_k a_{lk} \delta q_k = 0 \quad \frac{\partial q_k}{\partial x} dx = \delta q_k$$

⇒ λ_l ile çarpımı da sıfır.

$$\lambda_l \sum_k a_{lk} \delta q_k = 0 \quad l = 1, 2, \dots, m \quad \text{Bu m denklemin}$$

Konservatif sistemler için

$$\int_1^2 dt \sum_k \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \delta q_k = 0$$

olar denklemleri sıfırlanabilir.

$$\int_1^2 \sum_{kl} \lambda_l a_{lk} \delta q_k dt = 0$$

$$\int_1^2 dt \sum_{k=1}^n \left(\frac{\mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} + \sum_p \lambda_p a_{pk} \right) \delta q_k = 0$$

Lagrange vargisi.

örneğin m bağlantı var.
bağımsız değişken.

$(n-m) + m$ tane $\sum_k a_{pk} \delta q_k = 0$ ile belirlenir.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} + \sum_p \lambda_p a_{pk} = 0$$

$$k = 1, \dots, n-m+1$$

$$k = n-m+1, \dots, n$$

bağımsız olan k 'ler için katmayı alır.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) + \sum_p \lambda_p a_{pk} = 0 \quad k = 1, \dots, n-m+1$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) + \sum_p \lambda_p a_{pk} = 0 \quad k = 1, \dots, n$$

$$k = 1, \dots, m$$

m tane bilinmeyen.

Simdi sist. üzerindeki bağları kaldırıyoruz $\left(\sum a_{pk} dq_k + a_p dt = 0 \right)$

Ancak bu bağlar varmış gibi sist. üzerine dışardan başka kuvvetler etki ettirelim.

$$\sum_p \lambda_p a_{pk} = Q'_k$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) = Q'_k$$

λ_p 'ler

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk} = 0 \quad k = n-m+1, \dots, n \quad (2.24)$$

ile belirlenmek şartı ile

$$(2.26) \rightarrow \int_1^2 dt \sum_{k=1}^{n-m} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk} \right) \delta q_k = 0$$

olarak yazılabilir. Burada bulunan δq_k 'ler sadece bağımsız olanlar. O halde

$$2.29 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n-m$$

$$2.27 + 2.29 \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = \sum_l \lambda_l a_{lk} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

n : q_k koordinatları ile m tane λ_p bilinmeyenidir. Kalbunli ya koordinatları denklemleri, n denklemler vermekte. Gerçekten m denklemler sağ denklemleri. Bu denklemler

$$\sum_k a_{lk} \dot{q}_k + d_l = 0$$

olarak ele alınmalıdır.

* Sistem üzerindeki bağların kaldırılması olduğunda birim ya da hareketi aynı konumda iken dış kuvvetlerin uygulanması olduğunda varsayalım, 0 zaman

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k'$$

olacaktır.

$$Q_k' \rightarrow \sum_l \lambda_l a_{lk}$$

$$f(q_1, \dots, q_n, t) = 0$$

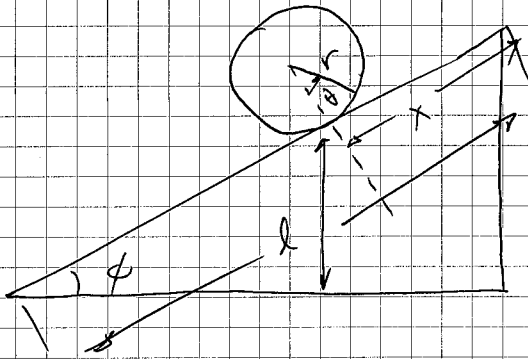
yağsındaki bir holonom bağ denklemini

$$\sum_k \frac{\partial f}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$$

diff. denk.'ine eşdeğerdir. $\Rightarrow a_{qk} = \frac{\partial f}{\partial q_k} \quad a_t = \frac{\partial f}{\partial t}$

Lagrange çarpım methodu: (1) q 'lar bağımsız koordinatlar indirgenmiş olarak elde edildiği zaman (2) bağ denklemlerini elde etmek istediğimiz zaman

Örnek



$$r d\theta = dx \quad \text{Bağ denklemini}$$

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M r^2 \dot{\theta}^2$$

K.M.'nin hareketi için K.E. $\oplus$ K.M. etrafındaki hareketin K.E.

$$V = Mg(l-x)\sin\phi \quad L = T - V$$

$$= \frac{M}{2} \dot{x}^2 + \frac{Mr^2}{2} \dot{\theta}^2 - Mg(l-x)\sin\phi$$

① bağ denk. i ① Lagrange çarpım

$$r d\theta - dx = 0 \Rightarrow a_\theta = r \quad a_x = -r$$

Bundan dolayı:

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x} - Mg\sin\phi + \lambda &= 0 \\ Mr^2\ddot{\theta} - \lambda r &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Bazı } r\ddot{\theta} = \dot{x} \rightarrow r\ddot{\theta} = \ddot{x}$$

$$M\ddot{x} - \lambda x = 0 \text{ olur} \quad M\ddot{x} = \lambda$$

$$\ddot{x} = \frac{g \sin \phi}{2}, \quad \lambda = \frac{Mg \sin \phi}{2}, \quad \ddot{\theta} = \frac{g \sin \phi}{2r}$$

2.6. Korunum teoremleri ve simetri özellikleri:

n serbestlik dereceli bir sistem ~~her~~ zamana göre 2. mertebeden olan n dif. denk. verir. Her denklemin çözümünü ilk integrasyon gereklilik ve işlem sonunda $2n$ integrasyon sabiti ortaya çıkar. Bunlar n tane q_j ve n tane $\dot{q}_j$ 'nin başlangıç değerleri ile seçilir.

Bir çok problemde hareket denklemlerinin bir ilk integrali hemen elde edilebilir. İlk integral den aşağıdaki

$$f(q, \dots, \dot{q}, \dots, t) = \text{abt.}$$

şeklinde 1. mertebe bir dif. denk. dir. Sadece konuma bağlı potansiyellerden türetilen kuvvetlerin etkisi altında olan bir kütle sistemini alalım:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \sum \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = m_i \dot{x}_i = p_{ix}$$

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \quad \text{konsmik mom}$$

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 - \sum_i q_i \phi(x_i) + \sum_i \frac{q_i}{c} \vec{A}(x_i) \cdot \vec{r}_i$$

$$p_{ix} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i + \frac{q_i}{c} A_x(x_i)$$

* Eğer bir sist. in Lagrange form. u q_j koordinatını içinde bulundurmuyorsa bu koordinata genikül koord. denir.

Lagrange denklemleri

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_j} = 0$$

genişletilmiş bir koord. için $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_j} \right) = 0$ veya $\frac{dp_j}{dt} = 0$

$$p_j = \text{sbt.}$$

Genişletilmiş koord. 'a karşı gelen genelleştirilmiş momentum konur.

(*) Ne ϕ 'nin ne de $\vec{A}$ 'nın X 'e bağlı olmadığı bir alanda tek bir maddesel noktamız elim. X : genişletilmiş. p_x kanonik momentum konumudur.

$$p_x = m\dot{x} + \frac{q}{c} A_x = \text{sbt.}$$

Önce sist. 'in bir bütün olarak verilen bir doğrultuda ötelenmesini gösteren bir dq_j değişiminin karşı geldiği bir q_j genelleştirilmiş koord. alalım. Sist. in K.M. 'nin Kartezyen koordinatlarından biri böyle bir koordinata örnektir. q_j T 'de ortaya çıkamaz çünkü hiçbir ötelenmelerden etkilenmezler. $\sim \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 0$ 'dır.

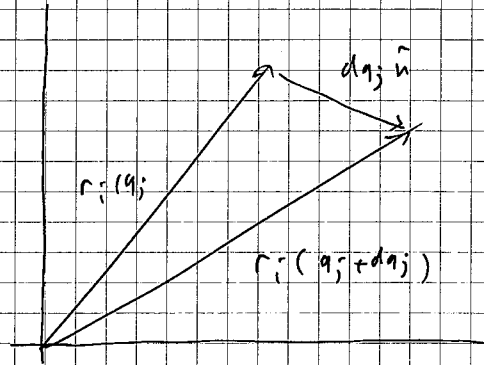
$$(\dagger) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \equiv \dot{p}_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \equiv Q_j \quad (q_j \text{ 'nin ötelenme doğrultusunda toplam kinetik enerjisi})$$

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

$$\frac{d\vec{r}_i}{dq_j} = \lim_{dq_j \rightarrow 0} \frac{\vec{r}_i(q_j + dq_j) - \vec{r}_i(q_j)}{dq_j} = \frac{dq_j \hat{n}}{dq_j} \equiv \hat{n}$$

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \hat{n} = \hat{n} \cdot \vec{F}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{r}_i^2$$



$$\begin{aligned} p_j &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \\ &= \hat{n} \cdot \sum_i m_i \dot{r}_i \end{aligned}$$

q_j genimsel olur ise V 'de yollar dolayısıyla

$$-\frac{\partial V}{\partial q_j} \equiv Q_j = 0$$

Eğer q_j koordinatı; dq_j sist. in bir eksen etrafındaki dönmeye karşı gelecek tarzda ise $\rightarrow$ ağırsal mom. in kosinüsü gelir;

koord. sist. inin dönmeye hızları etkilenen dolayısıyla $\partial T / \partial \dot{q}_j = 0$ ve V q_j den bağımsız olduğundan (I) elde edilir.

Ⓢ q_j bir dönme koordinatı ise, genelleştirilmiş kinetik dönme eksenini etrafında uygulanan toplam moment bileşeni p_j 'nin de toplam ağırsal mom. in aynı eksen boyunca bileşeni olduğu göstermek istiyoruz.

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

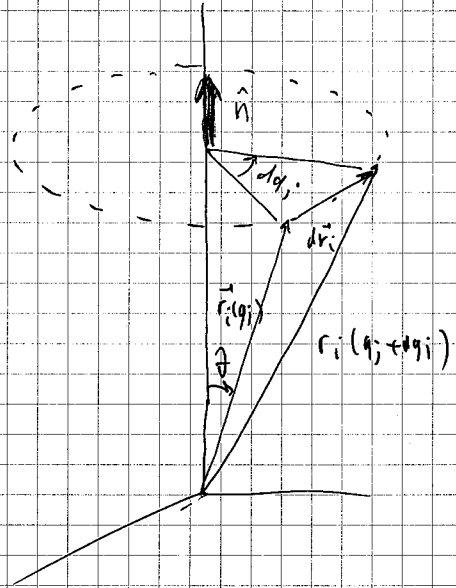
Burada q_j 'denli değişme $\vec{r}_i$ vektörünün sıddetini sbt tutmak şartı ile sonsuz küçük bir dönmeye karşı gelmelidir :

$$|d\vec{r}_i| = r_i \sin\theta dq_j$$

$$\left| \frac{d\vec{r}_i}{dq_j} \right| = r_i \sin\theta$$

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \hat{n} \times \vec{r}_i$$

$$\begin{aligned} Q_j &= \sum_i \vec{F}_i \cdot (\hat{n} \times \vec{r}_i) \\ &= \sum_i \hat{n} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) \\ &= \hat{n} \cdot \sum_i \vec{N}_i = \hat{n} \cdot \vec{N} \end{aligned}$$



$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i \hat{n} \cdot \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \hat{n} \cdot \sum_i \vec{L}_i = \hat{n} \cdot \vec{L}$$

Eğer q_j dönme koordinatı genimsel ise bu halde uygulanan momentin $\hat{n}$ boyunca bileşeni olan Q_j sıfır olur ve $\vec{L}$ 'nin $\hat{n}$ boyunca bileşeni sbt 'dır. A.P.K teoremi genimsel koordinatlarla ilgili genel korunum teoreminden elde edildi.

Simai Lagrange formülasyonundan konservatif sistemler için toplam enerjini koruma teoremini elde edelim.

$\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ ne dolayısı ile L 'nin zamanın açık fonk. olmadığı bir sist. gözönüne alalım.

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_j}$$

$$\Rightarrow = \sum_j \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j$$

$$= \sum_j \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(L - \underbrace{\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{=H} \right) = 0$$

$$H = \sum_j \dot{q}_j p_j - L$$

Konservatif sist. ler için V hızlardan bağımsız

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

ne daha emelden bağların zamandan bağımsız olması neye daha kesin bir dille

$T = T(\dot{q}_j)$ dönüşümünün T 'yi açık bir şekilde ifade etmemesi malum

T 'nin $\dot{q}_j$ 'lerin karesinde bir fonk. olduğu göstermişti. T için f

q_j lerin n mertebeden homojen bir fonk. olduğu

$$\sum_i q_i \frac{\partial T}{\partial q_i} = n T \quad n=2 \text{ 'dır.}$$

$$\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T$$

$$\Rightarrow H = 2T - (T - V) = T + V$$

prb 2.1. Uzakda iki nokta arasındaki en kısa uzaklık.

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \Rightarrow \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} f(q, \dot{q}; t) dt$$

Euler-Lagrange dif. denkle: $\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \right) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = C \text{ olmalıdır}$$

bu ifade α 'nın zamanla değiştiği zamanla değişimden geçilmez.

$$\dot{x} = C\alpha \Rightarrow x = C\alpha t + C'$$

$$\begin{cases} x = a_1 t + b_1 \\ y = a_2 t + b_2 \\ z = a_3 t + b_3 \end{cases}$$

prb 2.2. Teodezik: Küre yüzeyi üzerinde iki noktaya en kısa yolun birleştirilerek elde edilen doğrudur.

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Teodezik küre yüzeyi üzerinde, r değişmez. $r=1$ bir küre alalım.

$$ds^2 = r^2 \left[(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2 \right]$$

$$= \left[(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2 \right]$$

$$= \left[1 + \sin^2 \theta (\dot{\phi})^2 \right] (d\theta)^2$$

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{d\theta}$$

$$S = \int \left(1 + \sin^2 \theta (\dot{\phi})^2 \right)^{1/2} d\theta$$

$$f = (1 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)^{1/2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{\phi}} - \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\sin^2 \theta \dot{\phi}}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2}} \right) = 0$$

$$\frac{\sin^2 \theta \dot{\phi}}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2}} = C \Rightarrow \sin^4 \theta \dot{\phi}^2 = C^2 (1 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)$$

$$\dot{\phi}^2 [\sin^4 \theta - C^2 \sin^2 \theta] = C^2 \Rightarrow (d\phi)^2 = \frac{C^2 (d\theta)^2}{\sin^4 \theta - C^2 \sin^2 \theta}$$

$$d\phi = \frac{C}{\sin \theta \sqrt{\sin^2 \theta - C^2}} d\theta$$

prob 4.) $f(y, \dot{y}, \ddot{y}; x)$

$$I = \int f(y, \dot{y}, \ddot{y}; x) dx \quad \frac{\partial I}{\partial \alpha} = 0 \quad y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha \eta(x)$$

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int \left\{ \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha}}_1 + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha}}_2 + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \ddot{y}} \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \alpha}}_3 \right\} dx = 0$$

$$\begin{aligned} 2. \rightarrow \int \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} dx &= \int \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}}_{\tilde{u}} \underbrace{\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial x}}_{\tilde{u}'} dx \\ &= \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \Big|_0^2 - \int \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \rightarrow \int \frac{\partial f}{\partial \ddot{y}} \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \alpha} dx &= \int \frac{\partial f}{\partial \ddot{y}} \underbrace{\frac{\partial^3 y}{\partial \alpha \partial x^2}}_{\tilde{u}''} dx \\ &= \frac{\partial f}{\partial \ddot{y}} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \Big|_0^2 - \int \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{y}} \right) dx \\ &= - \left\{ \left[\frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{y}} \right) \right]_0^2 - \int_0^2 \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{y}} \right) dx \right\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{y}} \right) \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{y}} \right) = 0$$

prb. 6.) L 'nin içinde impuls kuvvetleri yok. Q_j 'nin içinde var

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j, \quad Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

$$\int_t^{t+dt} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) dt = \underbrace{\int_t^{t+dt} \left(\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) dt}_{S_j}$$

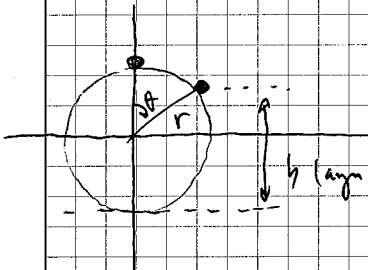
$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \Big|_t^{t+dt} = S_j$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)_f - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)_i - \underbrace{\left[(t+dt) - t \right]}_{dt} \frac{\partial L}{\partial q_j} = S_j$$

$dt \frac{\partial L}{\partial q_j} \sim \text{ihmal (dt sabit)}$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)_f - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)_i = S_j$$

prb. 7.)



$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2) - mgr \cos \theta$$

Terk ettiği ana kadar ki sır durumunda bağ denklemini olmalı: $\sum_{k=1} a_{ek} \dot{q}_k + a_{et} = 0$
 $\circ$ varsayalım. $r = sbt$
 $\dot{r} = 0$

$$a_\theta \dot{\theta} + a_r \dot{r} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow a_\theta = 0 \quad a_r = 1 \text{ olur.} \\ \dot{r} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = a_\theta \lambda \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = a_r \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\theta}) - mgr \sin \theta = 0 \\ \frac{d}{dt} (mr \dot{r}) - mr \dot{\theta}^2 + mg \cos \theta = \lambda \end{array}$$

$$\begin{cases} mr^2\ddot{\theta} - mgr \sin\theta = 0 \\ -mr\dot{\theta}^2 + \cancel{mr} + mg \cos\theta = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mr^2\ddot{\theta} = mgr \sin\theta \\ -mr\dot{\theta}^2 + mg \cos\theta = \lambda \end{cases}$$

$$r\ddot{\theta} = g \sin\theta \Rightarrow r\dot{\theta}\ddot{\theta} = g\dot{\theta} \sin\theta \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\underbrace{\frac{1}{2}r\dot{\theta}^2 + g \cos\theta}_C \right] = 0$$

tan tepe noktasında açılma hızı sıfır: $\theta=0 \Rightarrow \dot{\theta}=0$

$$\frac{1}{2}r\dot{\theta}^2 + g \cos\theta = g \text{ olur.} \Rightarrow \frac{1}{2}r\dot{\theta}^2 = g(1 - \cos\theta)$$

$$r\dot{\theta}^2 = 2g(1 - \cos\theta)$$

$$-2mg(1 - \cos\theta) + mg \cos\theta = \lambda$$

$$-2mg + 2mg \cos\theta + mg \cos\theta = \lambda$$

$$\lambda = mg(3\cos\theta - 2)$$

λ : tepki

halkadan ayrıldığı zaman $a=0$ bağ kuvveti sıfırdan küçük.

$$-mr\dot{\theta}^2 + mg \cos\theta = 0$$

$$-2mg(1 - \cos\theta) + mg \cos\theta = 0$$

$$3mg \cos\theta = 2mg \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}$$

$$h = r \cos\theta = \frac{2}{3}r$$

prb. 2.9.
$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - \sum_i q_i \phi(\vec{r}_i) + \sum_i \frac{q_i}{c} \vec{A}(\vec{r}_i) \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \quad dq_j = d\theta \Rightarrow \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \hat{n} \times \vec{r}_i$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} + \sum_i \frac{q_i}{c} \vec{A}(\vec{r}_i) \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

$$= \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot (\hat{n} \times \vec{r}_i) + \sum_i \frac{q_i}{c} \vec{A}(\vec{r}_i) \cdot (\hat{n} \times \vec{r}_i)$$

$$= L_0 + \sum_i \frac{q_i}{c} \hat{n} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{A}_i)$$

Genel kızı bağli potansiyeller için,

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i \vec{\nabla}_{\dot{\vec{r}}_i} U \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i \vec{\nabla}_{\dot{\vec{r}}_i} U \cdot (\hat{n} \times \vec{r}_i)$$

$$= \sum_i \hat{n} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{\nabla}_{\dot{\vec{r}}_i} U)$$

$$p_j = L_0 - \sum_i \hat{n} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{\nabla}_{\dot{\vec{r}}_i} U)$$