

BÖLÜM 3

İKİ CİSMİN MERKEZSEL KUVVET
PROBLEMİ

3.1. Eşdeğer Tek Cisim Problemine İndirgeme:

Sadece bir V karşılıklı etkileşme potansiyelinden doğan kuvvetlerin etkisinde bulunan m_1 ve m_2 gibi iki noktasal kütleden meydana gelen konservatif bir sistem ele alalım. Önce V 'nin $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ veya $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ veya $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ 'in herhangi birerisinde bir tıneşin farkı olduğunu kabul edilecek.

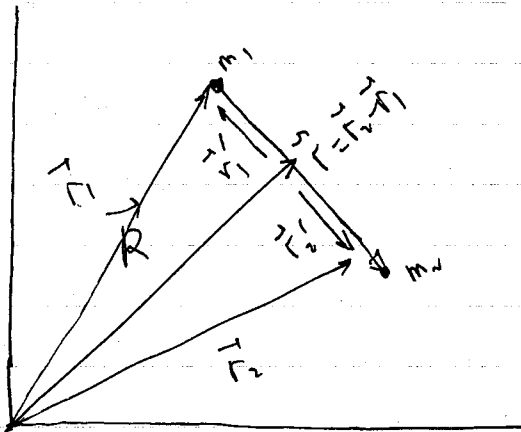
Sist. 6 serbestlik derecesine sahiptir. ve 6 bağımsız genelleştirilmiş koord. vardır. Bu koordinatları K.M. 'nin $\vec{R}$ yer vektörü ile $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ fark vektörünün bileşenleri olarak seçelim

$$L = T(\vec{R}, \dot{\vec{r}}) - V(\vec{r}, \dots)$$

K.M. 'nin hareketinin K.E. + K.M. etrafındaki hareketin T' K.E

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\vec{R}}^2 + T'$$

$$T' = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2'^2$$



$$\begin{aligned} \vec{r}_1' &= \vec{r}_1 - \vec{R} = \vec{r}_1 - \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{m_2 \vec{r}_1 - m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \end{aligned}$$

$$\vec{r}_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$T' = \frac{1}{2} m_1 \frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2} \dot{\vec{r}}^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2} \dot{\vec{r}}^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \dot{\vec{r}}^2$$

$$L = \frac{1}{2} (m_1+m_2) \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \dots)$$

⊗ $\vec{R}$ 'nin 3 koordinatı'nda genimsel. Dolayısı ile K.M. ya hareket etmiyor ya da düzgün bir hızla hareket ediyor demektir. $\vec{r}$ ile olan hareket denk. nın hiçbirinde $\vec{R}$ ne $\dot{\vec{R}}$ olmayacağından L 'deki ilk teriminden sonra görünüme almayacağız. Geri kalanı sbt bir kütle merkezinden $\vec{r}$ uzaklığında

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

kütlesi ile bir maddesel noktanın Lagrange fonk. u olur.

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

3.2. Hareket Denklemleri ve ilk integraller:

V sadece $\vec{r}$ 'nin fonk. u'dur (merkezel kumetler) Dolayısıyla kumet her zaman $\vec{r}$ boyunca olur. Bulduğumuz sonuçlara göre sadece sbt bir K.M etrafında hareket eden m kütleli tek bir maddesel nktz problemini ele almalıyız. (sbt nktz koordinat sist. nın başlangıcı oledir).

V r ile ilgili olduğundan problem küresel simetriye sahiptir; yani herhangi bir sbt eksen etrafında dönmeyi gösteren aç. koordinatı deirinsel olmalıdır. Dolayısı ile toplam $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ korunur. Bundan dolayı $\vec{r}$ 'nin daima $\vec{L}$ 'nin sbt doğrultusuna dik olduğu ortaya çıkar. Bu daima $\vec{r}$ 'nin normal $\vec{L}$ 'ye paralel düzlemde de doğur. $\vec{L} = \vec{0}$ ile geçerli değil çünkü bu

durumda hareket K.M. den geçen bir doğru çizgi boyunca olmalıdır, ve $\vec{L} = \vec{0}$ olduğundan $\vec{r}$ 'nin $\dot{\vec{r}}$ 'ya paralel olması gerekir. Bu halde merkezsel kuvvet hareketi daima düzlemseldir.

Tek bir maddesel noktanın hareketi } θ : azimutal açı
üç koordinatla tanımlenebilir; küre } φ : zenit "
sel kutupsal koordinatlarda; } r : radyal uzaklık.

Kutup eksenini $\vec{L}$ doğrultusunda seçilecek olursa hareket daima bu eksene dik olmalıdır. $\rightarrow \varphi = \pi/2$

Açısal mom. vektörünün korunması $\rightarrow$ üç bağımsız hareket sbt.'i verir.

Düzlem kutupsal koordinatlarda L ,

$$L = T - V$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r) \quad \theta : \text{genimsel.}$$

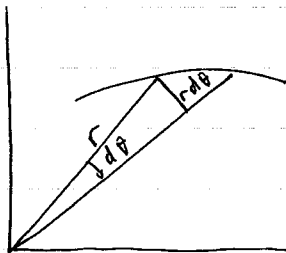
$$p_{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \quad \text{Açısal mom.}$$

Hareket denk. lerinden biri

$$\dot{p}_{\theta} = \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) = 0$$

integre edilmesi ile $m r^2 \dot{\theta} = \ell$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \right) = 0$$



$$dA = \frac{1}{2} r (r d\theta) \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

"Açısal mom. korunumu $\rightarrow$ alan hızının sbt. olduğunun söylemeye eşdeğer." I. Kepler kanunu. Yer vektörü $\vec{r}$ ile zamanla $\vec{r}$ alanla- sığdır.

4.

Geri kalan Lagrange denklemi (r için)

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - m r \ddot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

 $\vec{r}$ boyunca $- \partial V / \partial r$ kuvvetini $f(r)$ ile gösterelim.

$$m\ddot{r} - m r \ddot{\theta}^2 = f(r)$$

ya da $m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = f(r)$

Hareketin elde edilebilecek bir başka ilk integrali de enerjinin aynen korunmasıdır. Genel enerji korunumu teoremlerinden

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + V(r)$$

$$\therefore m\ddot{r} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(V + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} \right) \quad / \dot{r}$$

$$\begin{cases} m\ddot{r}\dot{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \right) \\ \frac{d}{dt} g(r) = \frac{dg}{dr} \frac{dr}{dt} = \dot{r} \frac{dg}{dr} \end{cases} \quad \frac{d}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \right) = - \frac{d}{dt} \left(V + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} + V \right) = 0$$

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} + V = \text{sbt.} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} = \frac{1}{2mr^2} m^2 r^4 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 \end{array} \right\} \rightarrow E.$$

Bu iki ilk integral, problemi tamamlamak için gerekli kuadratlardan ikisini bize verir. r ve θ gibi iki değişken bulunduğundan, hareket denk. ni çözmek için 4 integrasyon gerekir. İlk iki integrasyon Lagrange denk. ni t ve E denk. i haline getirir. Geri kalan integrasyonlar :

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right)} \quad (\#)$$

veya

$$dt = dr \frac{1}{\left(\frac{2}{m} \left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right) \right)^{1/2}}$$

($t=0$ 'da $r(0)=r_0$ olsun) ilk durumdan t anına kadar

$$(*) \quad t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}}$$

$$t \equiv t(r, r_0, E, l)$$

$$d\theta = \frac{l}{mr^2} dt \quad (\theta(0)=\theta_0 \text{ ise})$$

$$(**) \quad \theta = \theta_0 + l \int_0^t \frac{dt}{mr^2(t)}$$

(*) ve (**) geri kalan iki integrasyonu verir. Problem formal olarak (E, l, r_0, θ_0) gibi 4 sbt. 'le kuadratlara indirgenmiştir.

Aynı şekilde $(r_0, \theta_0; \dot{r}_0, \dot{\theta}_0)$ 'da olabilir. Fakat E ve l bunlar altında belirlenebilir.

3.3. Eşdeğer Bir Boyutlu Problem ve Yörüngelerin Sınıflandırılması:

Bu denklemlerin açık çözümlerini belirli kuvvetler için yapmadan önce, hareket denk. ni ve konumun teoremlerini kullanarak hareket hakkında neler öğrenebiliriz? görelim!

E ve l 'nin verildiği bir sistemde, maddesel noktanın hızının şiddet ve doğrultusu r cinsinden belirlenir:

$$\bar{E} = \frac{1}{2}mv^2 + V(r) \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r))}$$

Radyal hız $\dot{r}$ 'nin $\vec{r}$ boyunca bileşeni olarak $\dot{r}$ ile verilir.

$\dot{\theta}$, l cinsinden ifade edilince,

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = f(r) \text{ denklemi; } f' = f + \frac{l^2}{mr^3} \quad m \text{ kütlelerinde ve bir}$$

kuvvetin etrisinal bir maddesel noktanın tanımladığı yörpme problemde aynı denklemi verir. (m kütlelerinin aynı olduğu kuvvet.)

Ek terim $mr\dot{\theta}^2 = m \frac{v_{\theta}^2}{r}$ olarak yazılrsa (ki bu merkezcil kuvvettir),

önemi ortaya çıkar. Eşdeğer bir ifedeyi E.K.T. 'den elde ederiz.

Maddesel noktanın r 'ye bağlı hareketi

$$V' = V + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2}$$

yörpme pot. enerjili tek boyutlu problemimizle aynıdır.

$$f' = -\frac{\partial V'}{\partial r} = f(r) + \frac{l^2}{mr^3}$$

E.K.T.

$$E = V' + \frac{1}{2} m \dot{r}^2$$

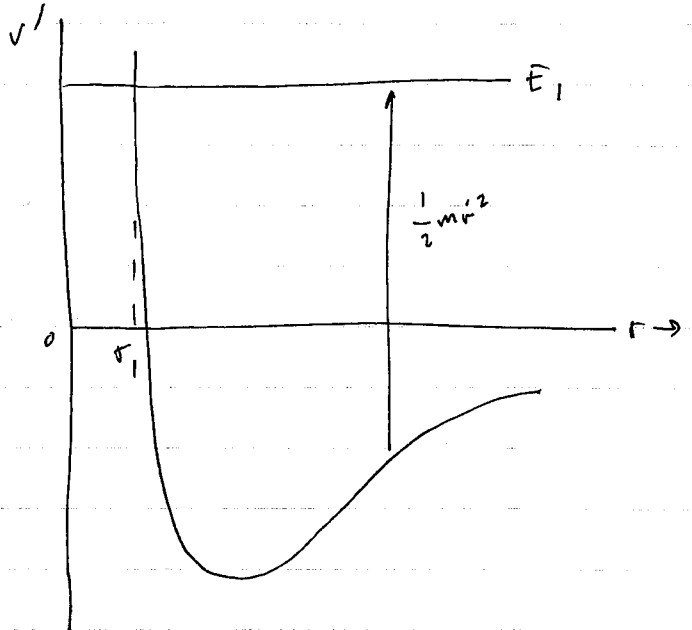
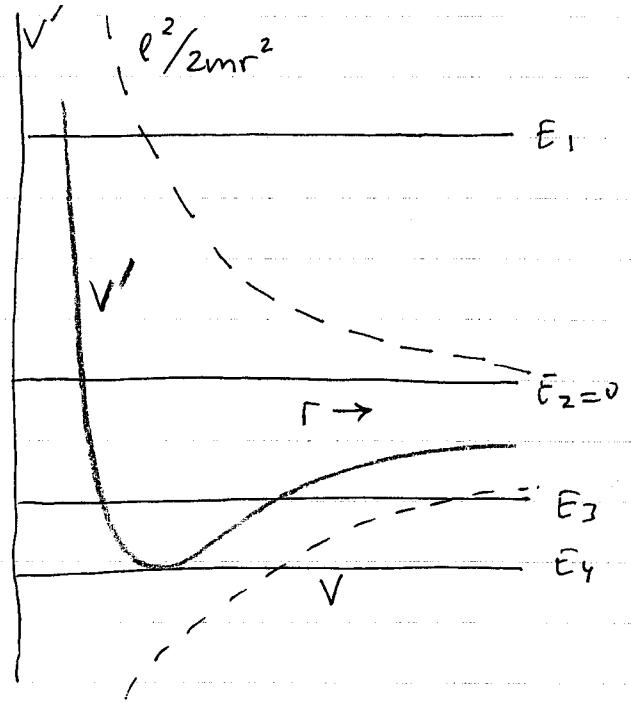
olarak da yazılabilir. Hareketi incelemek için, bu methodun bir illistrasyonu olarak V' 'nin r 'ye bağımlılığını $f = -k/r^2$ gelme kuvveti özel hali için inceleyelim. ($k > 0$ için - işareti kuvvetin kuvvetin merkezine doğru olduğunu sağlar). Bu kuvvet için P.E $V = -k/r$ 'dir ve karşı gelen yörünge potansiyel

$$V' = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

(E_1): r_1 'den daha yakına sokulamaz.

(*) $r < r_1$ olsa $V' > E_1$ olur.

K.E. 'nin negatif olması gerekir ki bu da sonal bir hızı karşı gelir. Öte yandan r 'nin üstdeğerleri için bir sınır yoktur, yörünge kapalı değildir. Bir maddesel nokta sonuza geliyor ise "itici merkez boş engel" e çarpıp geri atılacak ve sonuza gidecektir.



→ E ile V' arasındaki uzaklık $\frac{1}{2} m \dot{r}^2$ 'dır ve r_1 dönüşüm noktasında sıfır olur.

→ V ile V' arasındaki uzaklık $\frac{1}{2} m \dot{r}^2$ 'dir.

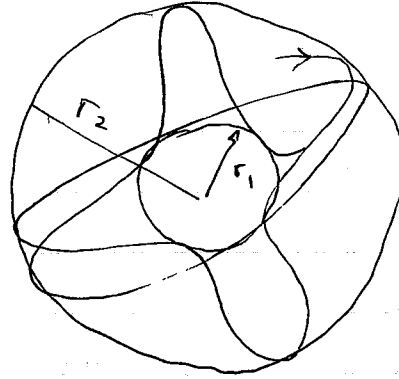
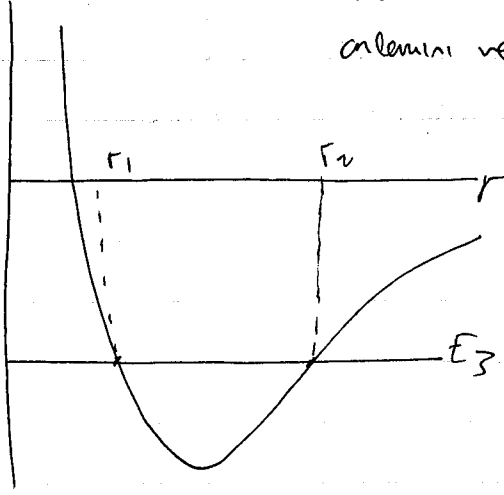
8

$$E_2 = 0$$

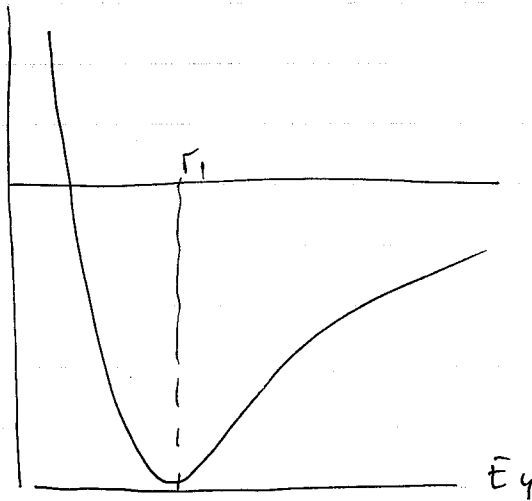
Aynı.

$$E_3$$

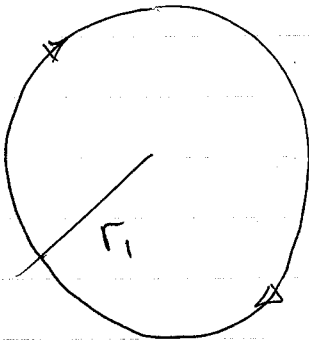
Hareket "sınırlıdır." r_1 ve r_2 gibi iki dönüm noktası vardır. "apsid" uzaklıkları. Yörüngelerle ilgili olduğu anlamını vermez. ve dönüm noktaları daimi olarak bulunur.



$$E_4$$



V' nin minimumunda iki sınır oluşur. Hareket bir yarıçap üzerinde mümkündür. $r=0$ 'dan ve yörünge bir çemberdir.



$$F$$
 nin kuvvet $F_{\text{es}} = -\frac{\partial V}{\partial r} = f'$

Çemberde yörünge r= r_1

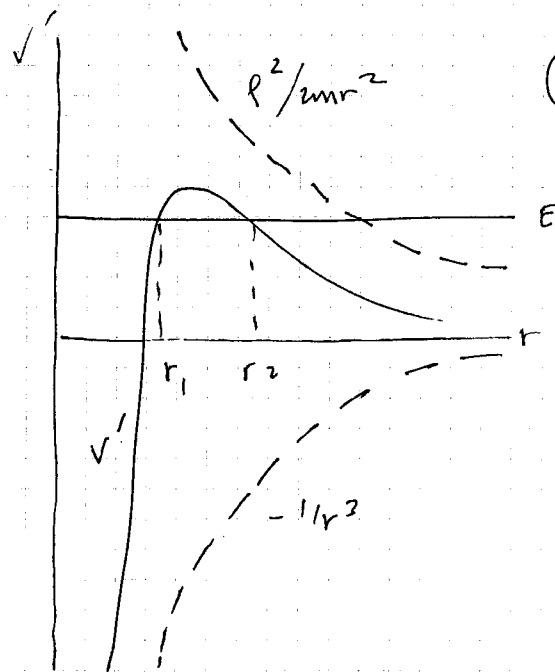
$$f' = 0 \Rightarrow \frac{-f^2}{mr^2} = -mr\omega^2$$

$E < E_4$ fiziksel değil $E.K. < 0$ olur.

Açık, sınırlı ve çembersel yörüngelere aynı nitelikte parçalama
 (1) $r \rightarrow \infty$ için $1/r^2$ 'den daha yavaş sıfıra yaklaşan (2) $r \rightarrow 0$
 için $1/r^2$ 'den daha yavaş sonsuza giden herhangi bir çekme
 pot. 'i için doğm olacaktı. İlk şart büyük r için pot. in merkez
 kaç kuvvetten daha güçlü olmasını, ikinci şart ise küçük r için
 merkezkaç terimin önemli olmasını sağlar.

Hareketin niteliğe yapısı eğer pot. bu şartları sağlamıyorsa
 değişecektir. Fakat bu hallerde de yörüngelerin özelliklerini ince
 lemek için eşdeğer potansiyelleri kullanabiliriz.

Örnek: $V = -a/r^3$ $f = -3a/r^4$



① $r_0 < r_1 \Rightarrow$ hareket sınırlı ve r
 her zaman r_1 'den küçük
 kalacak.

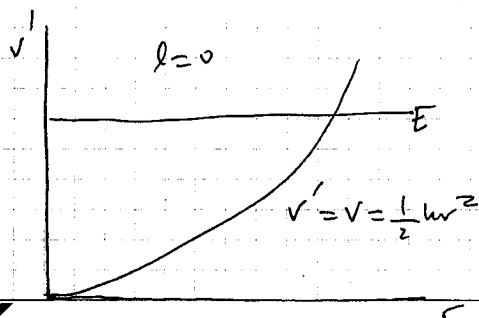
② $r > r_2 \Rightarrow$ hep böyle kalacak ve
 hareket sınırsız olacaktır.

$r_1 < r_0 < r_2$ mümkün değildir.

Örnek:

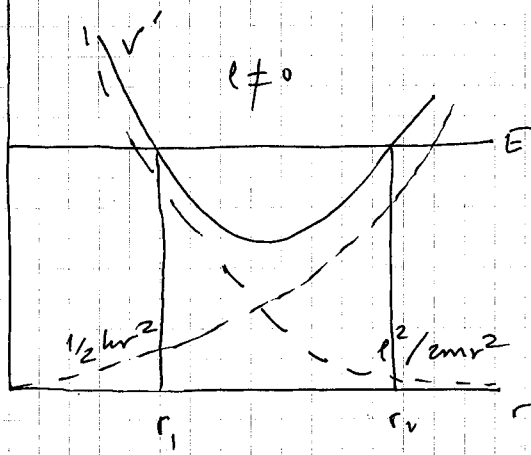
$$V = \frac{1}{2}kr^2 \quad f = -kr$$

Bir doğm boyunda harekete karşı gelen sıfır açısal mom. $V = V'$ 'dir



Herhangi bir pozitif enerji için hareket sınırlıdır
 ve basit harmonik hareketlidir.

$l \neq 0$ ise hareket olanaklı tüm enerjiler için her zaman sınırlı ve kuvvet merkezinden geçmez. Bu özel yörüngeler eliptik olduğu görülmüştür. Çünkü eğer $\vec{f} = -k\vec{r}$ $\Rightarrow f_x = -kx$ $f_y = -ky$ olur.



Bu halde toplam hareket sabit ve frekansları aynı olan iki harmonik hareketin bileşkesidir.

3.4. Virial Teoremi:

(Bütün bağ kuvvetleri de dahil olmak üzere) $\vec{F}_i$ kuvvetlerinin etkisindeki yer vektörleri $\vec{r}_i$ olan m_i nokta kütlelerinin genel bir sistemini gözönüne alalım.

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i$$

$$G = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i \quad \text{'ye bakalım.}$$

zamana göre toplam türevi

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \vec{r}_i + \sum_i \vec{p}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

$$\textcircled{1} \quad \sum_i \vec{r}_i \cdot \dot{\vec{p}}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \sum_i m_i v_i^2 = 2T$$

$$\textcircled{2} \quad \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i = 2T + \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

τ zaman aralığı üzerinde zaman ortalaması

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{dG}{dt} dt = \overline{\frac{dG}{dt}} = 2T + \sum_i \overline{\vec{F}_i \cdot \vec{r}_i}$$

$$2T + \sum_i \overline{\vec{F}_i \cdot \vec{r}_i} = \frac{1}{\tau} [G(\tau) - G(0)]$$

Eğer hareket periyodik ise yani bütün koord. lar belli bir zaman sonunda tekrar aynı değerlere τ periyot olarak tekrar eder ise sağ yan sıfır. hareket periyodik olmadığı durumda τ 'yı yeterince büyük seçerek sağ yan sıfır yapabiliriz. Her iki halde de

$$\overline{T} = -\frac{1}{2} \sum_i \overline{\vec{F}_i \cdot \vec{r}_i}$$

Eğer kuvvetler bir potansiyel'den türetilenler ise

$$\overline{T} = \frac{1}{2} \sum_i \overline{\vec{\nabla} V \cdot \vec{r}_i}$$

tek bir maddesel nokta için

$$\overline{T} = \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial V}{\partial r} r}$$

$$V = ar^{n+1} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r} r = (n+1)V$$

$$\overline{T} = \frac{n+1}{2} \overline{V}$$

$$n = -2 \Rightarrow V = \frac{a}{r} \Rightarrow F = + \frac{a}{r^2}$$

$$\overline{T} = -\frac{1}{2} \overline{V}$$

3.5. Yörünge için diff. denklemler ve integrale çevrilen limit kanunları potansiyeller:

r ve θ 'nın zamanı ve (E, l, r_0, θ_0) integrasyon s.b.t. lerinin fonk. olarak bulunması anlamına geliyor. t 'yi yok ederek θ ve r bağıntısını ararız.

$$l dt = m r^2 d\theta$$

t ve θ denklemleri arasında ;

$$\frac{d}{dt} = \frac{l}{m r^2} \frac{d}{d\theta} \quad \frac{d^2}{dt^2} = \frac{l}{m r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{l}{m r^2} \frac{d}{d\theta} \right)$$

r için Lagrange denklemini

$$\frac{l}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{l}{m r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{l^2}{m r^3} = f(r)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = - \frac{d(1/r)}{d\theta} \quad \text{olduğundan} \quad u = 1/r$$

$$\boxed{\frac{1}{m} \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -f(1/u)} \quad (*)$$

f biliniyor ise yörünge $\left\{ \begin{array}{l} \text{bilinir} \\ \text{yörünge} \end{array} \right.$ f bilinmiyor ise $\left\{ \begin{array}{l} \text{bilinir} \\ \text{yörünge} \end{array} \right.$

(*) 'den yörünge için denklemleri görüldüğü gibi simetrik olduğu görülmektedir.

Yörünge simetrik ise, yörüngeyi dönüm açısı doğrultusunun etrafında herhangi bir değişimle ortaya silemekten yoksun. münhür sadece dikkat edilmesi. Eğer kard. ler $\theta=0$ da dönüm noktaları olmasa, şekilde seçilecek olursa yansıma $\theta \rightarrow -\theta$ kayad uygulanabilir. diff. denb. invariant.

$$\theta=0 \Rightarrow u=u(0) \quad \left(\frac{du}{d\theta}\right)_0 = 0$$

Bu nedenle yörünge absid vektörleri etrafında yansıma göre invarianttır.

$$d\theta = \frac{l dr}{mr^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left[E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right]}}$$

$$\theta = - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV}{l^2} - u^2}} + \theta_0$$

$$V = ar^{n+1}$$

$$\theta = \theta_0 - \int_u^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2ma}{l^2} u^{-n-1} - u^2}}$$

$-n-1 = 0, 1, 2$ isteyerek $\sqrt{\alpha u^2 + \beta u + \gamma}$ daireler formleri altında

$$n = -2, -3 \quad (-1) \text{ istisna.}$$

hele ya da hiç de orantılı konular.

$n=1$ linear komettr.

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2ma}{l^2} \frac{1}{u^2} - u^2}}$$

$$u^2 = x \quad du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \theta = \theta_0 - \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} x - \frac{2ma}{l^2} - x^2}}$$

$$n = 1, 2, -3$$

gür.

Geri kalan komettr elliptik integraller.

$n = -4, -5 \rightarrow$ elliptik for. ler cinsinde.

$$\int \frac{u^s du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} u^2 - \frac{2ma}{l^2} u^{-n-1-2s} - u^{(2s+1)}}$$

$$-n-1+2 = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$n = +1, 0, -1, -2, -3 \text{ elliptik.}$$

$$n = 1, -2, -3 \text{ dairesel.}$$

3.6. Kepler Problem

$$f = -\frac{k}{r^2} \quad V = -\frac{k}{r}$$

1. Teil.

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{l^2 u^2} f\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{mk}{l^2}$$

$$y = u - \frac{mk}{l^2} \quad \text{deshalb} \quad \frac{d^2 y}{d\theta^2} + y = 0$$

$$\Rightarrow y = b \cos(\theta - \theta')$$

$$u - \frac{mk}{l^2} = b \cos(\theta - \theta') \quad \frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} + b \cos(\theta - \theta')$$

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} (1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta')) \quad \varepsilon = b \frac{l^2}{mk}$$

2. Teil.

$$d\theta = \frac{l dr}{mr^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left[E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right]}}$$

$$\frac{1}{r} = u \Rightarrow -\frac{dr}{r^2} = du$$

$$= - \frac{l du}{m \sqrt{\frac{2}{m} \left[E + \frac{k}{r} - \frac{l^2 u^2}{2m} \right]}}$$

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mk}{l^2} u - u^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arccos \left[-\frac{b+2cx}{\sqrt{q}} \right] \quad q = b^2 - 4ac.$$

$$a = \frac{2mE}{p^2} \quad b = \frac{2mk}{p^2} \quad c = -1$$

$$\Rightarrow q = \left(\frac{2mk}{p^2} \right)^2 \left(1 + \frac{2Ep^2}{mk^2} \right)$$

$$\theta = \theta' - \arccos \frac{\frac{p^2}{mk} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2Ep^2}{mk^2}}}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{p^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2Ep^2}{mk^2}} \cos(\theta - \theta') \right]$$

$$= \frac{mk}{p^2} \left[1 + \frac{p^2}{mk} \sqrt{\frac{m^2 k^2}{p^4} + \frac{2Em}{p^2}} \cos(\theta - \theta') \right]$$

$$= \frac{mk}{p^2} \left[1 + \frac{p^2}{mk} \sqrt{\frac{2m}{p^2} \left(E + \frac{mk^2}{2p^2} \right)} \cos(\theta - \theta') \right]$$

$$\boxed{\frac{1}{r} = C \left(1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta') \right)}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep^2}{mk^2}}$$

$$C = \frac{mk}{p^2}$$

$$\varepsilon > 1 \quad E > 0 \quad \text{Hyperbol}$$

$$\varepsilon = 1 \quad E = 0 \quad \text{Parabel}$$

$$\varepsilon < 1 \quad E < 0 \quad \text{Ellips}$$

$$\varepsilon = 0 \quad E = -\frac{mk^2}{2p^2} \quad \text{Keine}$$

Emvelli grafiksel analiz ile uyuyor. Fakat dairesel yörünge için
sırt farkları bir şekilde ortaya çıkar

$$E = - \frac{k^2}{2mr^2\dot{\theta}^2}$$

Dairesel bir yörünge için $T = -\frac{1}{2}V$

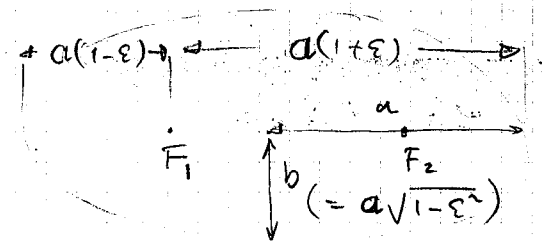
$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}V = -\frac{k}{2r}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{r^2} = m r \dot{\theta}^2 \quad \text{çekme kuvveti merkezkaç kuvveti dengelenir.}$$

Elipsin yörüngeler halinde büyük eksenin sadece enerjiye bağlı olduğunu gösterilebilir. Büyük eksenin yarı uzunluğu

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{1}{2c(1+\epsilon)} + \frac{1}{2c(1-\epsilon)} = \frac{1}{c} \frac{1}{1-\epsilon^2}$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\tilde{L}}{mk^2}} \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{k}{2E}$$



$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{l}{2m}$$

$$r = \frac{c(1-\epsilon^2)}{(1-\epsilon\cos\theta)}$$

$$\int_0^T \frac{dA}{dt} dt = A = \frac{lT}{2m}$$

$$a(1-\epsilon) + a(1+\epsilon) =$$

$A = \pi ab$ Elipsin alanı.

$$b = a\sqrt{1-\epsilon^2}$$

$$b = a \frac{1}{\sqrt{ae}} = \sqrt{\frac{a}{c}}$$

$$b = \sqrt{\frac{a}{c}} = a^{1/2} \sqrt{\frac{e^2}{mh}}$$

periode: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{e^2}{mh}} = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{k}}$

$$T^2 \propto a^3 \quad \text{3.7asa.}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad f = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad k = m_1 m_2 G$$

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{G(m_1 + m_2)}} \approx \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{Gm_2}}$$

Verilen herhangi bir parçacık için yörünge sht. leri ne dolayısı ile saçılma miktarı parçacığın enerjisi ve açısal mom. u ile belirlenir.

$$l = m v_0 s = s \sqrt{2mE}$$

E ve s tesbit edilince Θ saçılma açısı belirlenir.

* $d\Omega$ katı açıya içine saçılan ve Θ ile $\Theta + d\Theta$ arasında kalan parçacıkların sayını, karşı gelen s ile $s+ds$ arasında gelen parçacık sayısına eşit olmalıdır.

$$2\pi I s ds = -2\pi \sigma(\Theta) I \sin \Theta d\Theta$$

ds artması parçacık üzerindeki daha az limit etkilendiği anlamına gelir. Bu da $d\Theta$ azalmanın doğurur.

$$s = s(\Theta, E)$$

$$\sigma(\Theta) = - \frac{s}{\sin \Theta} \frac{ds}{d\Theta}$$

$$\xrightarrow{-z'e}$$

$$-ze$$

$$f = \frac{zz'e^2}{r^2}$$

$$K = -zz'e^2$$

$$\frac{1}{r} = - \frac{mzz'e^2}{f^2} (1 + \epsilon \cos \theta)$$

koordinatlar $\Theta' = 0$ olacak şekilde döndürülmüş.

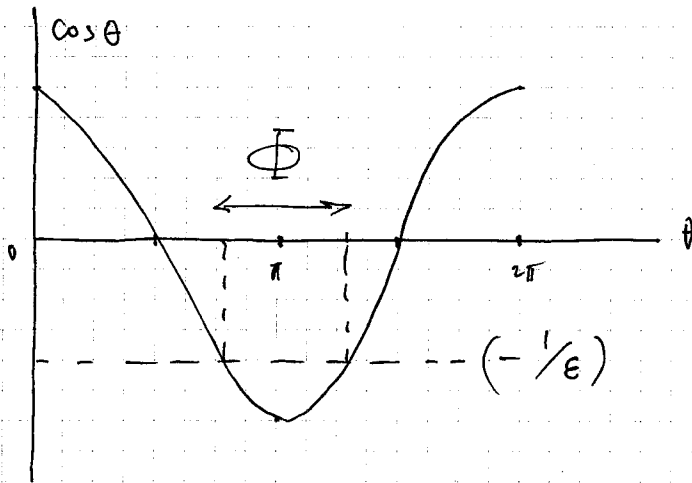
$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2fR^2}{m(zz'e^2)}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2fs}{zz'e^2} \right)^2}$$

$\varepsilon > 1 \Rightarrow$ hiperbol.

θ değerleri sınırlanmıştır.

(-) işaretinin bir sonucu olarak $1 + \varepsilon \cos \theta < 0$

$$\cos \theta < -\frac{1}{\varepsilon}$$



Parçacık sonsuzdan gelip, saçılıp ve yine sonsuza giderken θ dahi değişiminin Φ asimptotları arasındaki açı ile tamamen aynıdır. Bu ise (u) saçılma açısının bütünleyicisidir.

$$\cos \frac{\Phi}{2} = \sin \frac{(u)}{2} = \frac{1}{\varepsilon}$$

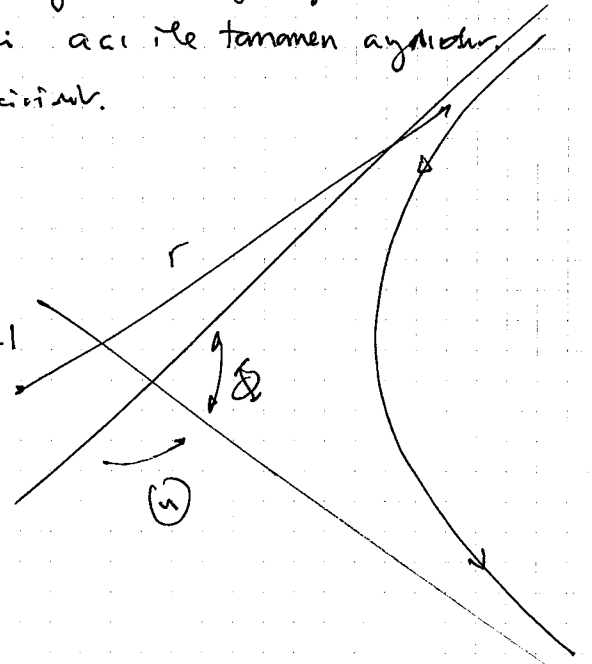
$$\cot^2 \frac{(u)}{2} = \csc^2 \frac{(u)}{2} - 1 = \varepsilon^2 - 1$$

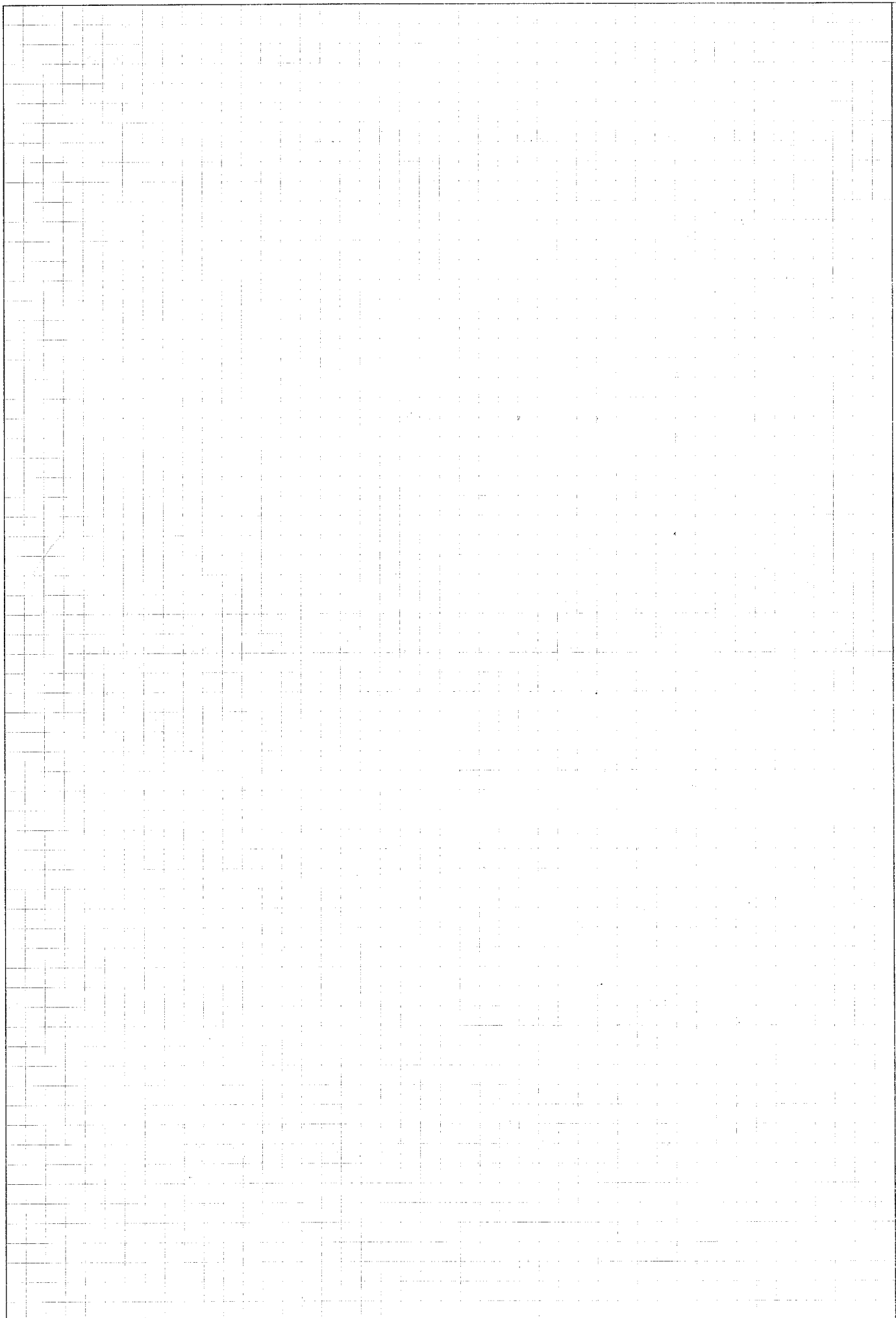
$$\cotan \frac{(u)}{2} = \frac{2Es}{2Z'e^2}$$

$$s = \frac{2Z'e^2}{2E} \cotan \frac{(u)}{2}$$

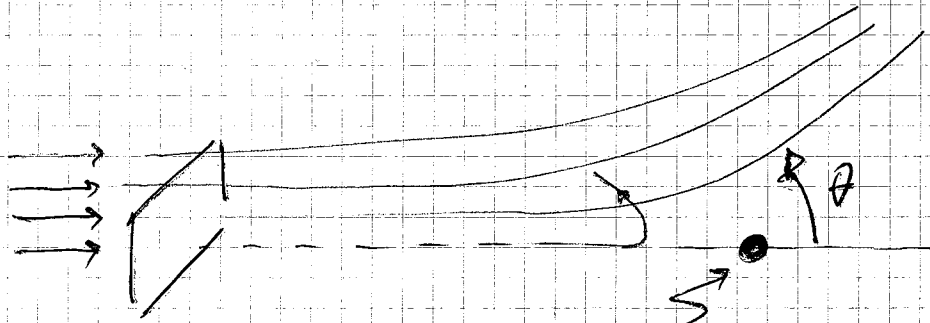
$$\sigma(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{2Z'e^2}{2E} \right)^2 \frac{\cotan \frac{(u)}{2}}{\sin(u)} \frac{1}{\sin^2 \frac{(u)}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{2Z'e^2}{2E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{(u)}{2}}$$





BS K

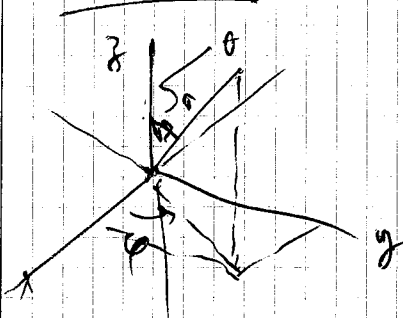


I : alin yoğunluğu

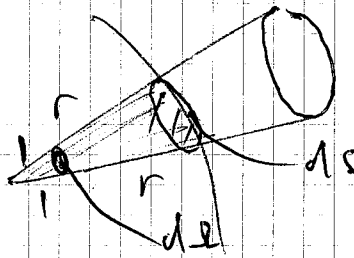
Sancici merkezi

denet ayar, kütlesi ve ayar boyu (ayar enerjisi) parçacıklar
den alıyın.

Katı Açı:



$\theta : \theta + d\theta$
 $\phi : \phi + d\phi$ kadar değiştiğinde
bir koni oluşur.



Thales oran

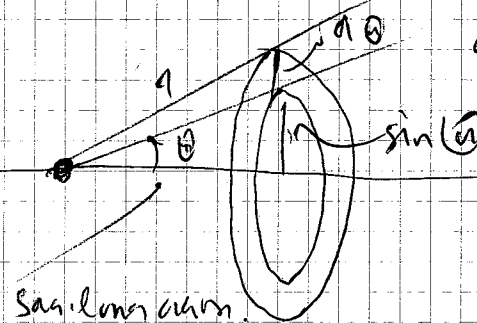
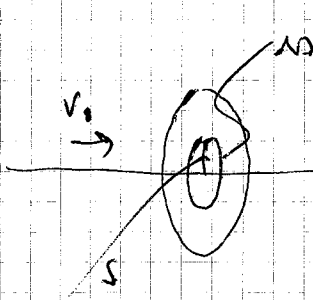
$$\frac{ds}{r^2} = \frac{d\Omega}{1^2}$$

$$d\Omega = r^2 \frac{ds}{r^2}$$

K.A. bir yörünge.

(birim yarıçaplı bir küre üzerinde ve doğrultum θ ile ϕ ile
verilir) $\Omega = \Omega(\theta, \phi)$

$\int \Omega d\Omega =$ Bilin yarıçapı $d\Omega$ katı açısına Saniye parçacıkların sayı
Yerinin Sıddeti



$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$$

gänge E ne l' ge seph.

$$L = p s = m v_0 s = \sqrt{2 m E} s, \quad E = p^2 / 2m$$

E ne s schreie gänge sieht.

l ne E : sgt $\Rightarrow$ her s' ge sin $\odot$ hasi geht.

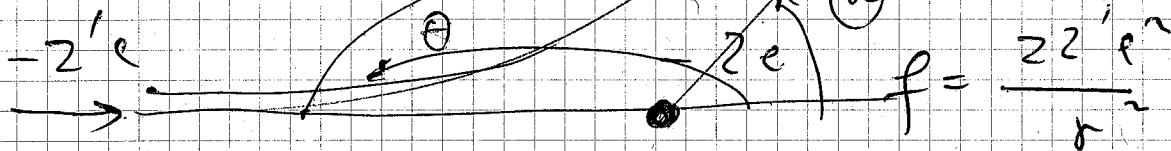
$$\cancel{2\pi s ds} = - \cancel{2\pi \sigma(\theta) l} \sin \theta d\theta$$

entweder parabolische oder hyperbolische
kurve $d\theta$ annehmen gegeben

$$s = s(\theta, E)$$

$$\sigma(\theta) = - \frac{s}{\sin \theta} \frac{ds}{d\theta}$$

Coulomb Saekumen



$$f = \frac{ZZ'e^2}{r^2}$$

$$K = -ZZ'e^2 \text{ alsoch}$$

$$\frac{1}{r} = - \frac{m ZZ'e^2}{p^2} (1 + \varepsilon \cos \theta) \quad \text{koordinaten } \theta' = 0 \text{ alsoch}$$

schilde d'entstehen.

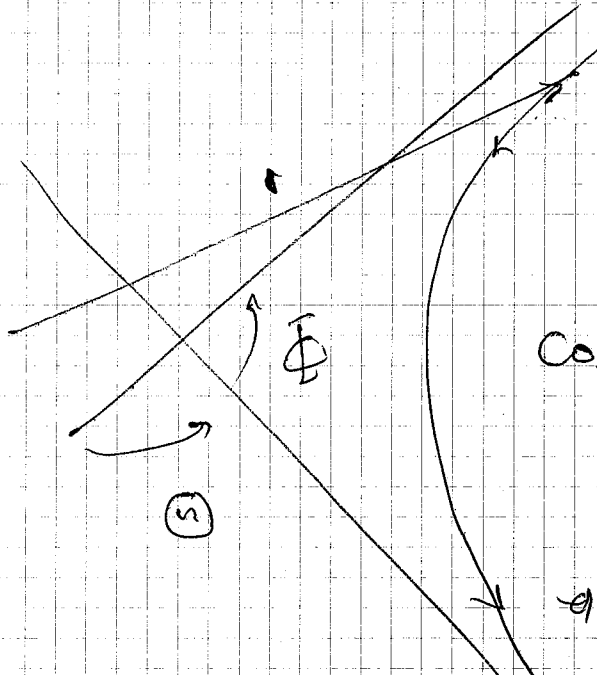
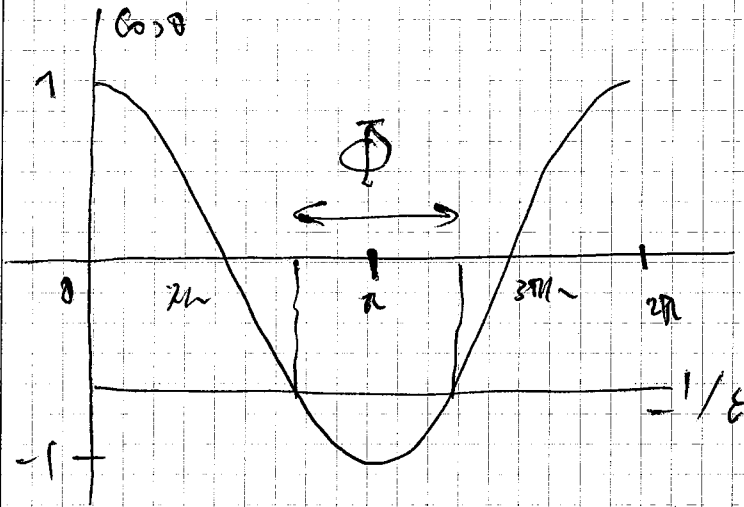
$$l = s \sqrt{2mE}$$

$$\varepsilon = \left[1 + \frac{ZZ'e^2}{m (ZZ'e^2)^2} \right]^{1/2} = \left[1 + \left(\frac{2Es}{ZZ'e^2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$\varepsilon > 1$ hyperbol.

(-) isarekahi ba kamaa sarakhi θ aqarhi hundaadunay

$$1 + \epsilon \cos \theta < 0 \quad \text{ya} \quad \cos \theta < -1/\epsilon$$



$$\theta + \Phi = \pi$$

$$\frac{\theta}{2} + \frac{\Phi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{\Phi}{2} &= \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} \right) \\ &= -\sin \frac{\theta}{2} = -1/\epsilon \end{aligned}$$

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\epsilon^2}$$

$$\cotan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1 - 1/\epsilon^2}{1/\epsilon^2} = \epsilon^2 - 1$$

$$\Rightarrow \cotan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\epsilon^2 - 1} = \frac{2\epsilon s}{2\epsilon' e^2}$$

$$s = \frac{2\epsilon' e^2}{2\epsilon} \cotan \frac{\theta}{2}$$

$$\sigma(\omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{22'e^{\hbar}}{2E} \right)^2 \frac{\cotan \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} \frac{1}{\sin^2 \frac{\omega}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{22'e^{\hbar}}{2E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\omega}{2}}$$

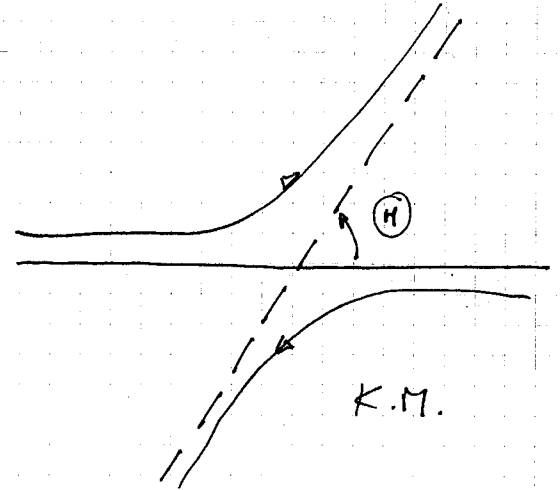
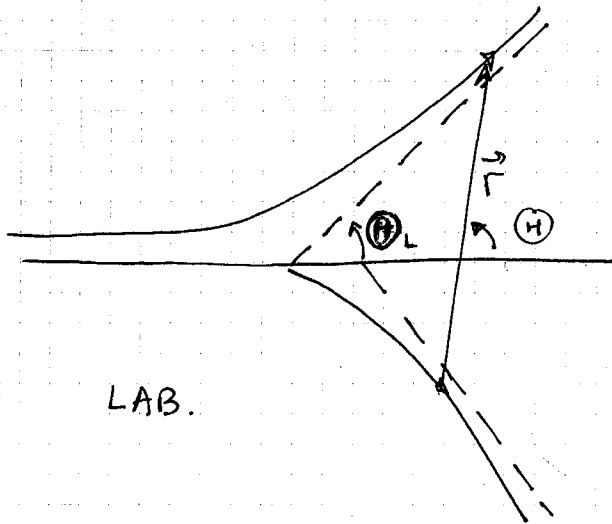
3.8. Saçılma probleminin Lab. koordinatlarına dönüştürülmesi:

Şimdiye kadar, bir lemmet merkezi tarafından saçılan bir parçacığı, yani tek cisim problemini inceledik. Pratikte, bu durum, yani saçılma, iki cisim arasındadır ve 2. cisimde bir miktar geri tepir.

①_L: Lab. da ölçülen saçılma açısı; parçacığın son doğrultum ile gelis doğrultum arasındaki açı

④: İki parçacık arasındaki relatif vektörün ilk ve son doğrultuları arasındaki açıdır.

2. parçacık saçılma esnasında yeriinde kalırsa idi $\eta = \theta_L$



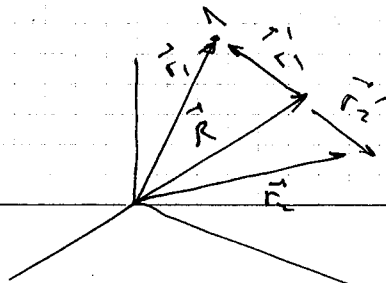
$$1 \text{ parçacığın} \begin{cases} \text{LAB.} \left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_1 \\ \vec{v}_1 \end{array} \right. \\ \text{KM} \left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_1' \\ \vec{v}_1' \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\text{K.M.'nin LAB.'daki} \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \dot{\vec{R}} \end{array} \right.$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r}_1' \Rightarrow \vec{v}_1 = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_1'$$

Toplam Lineer mom. sıfırdır.
Ve iki maddesel nokta eşit
ve eşit ~~hızla~~ momentümler
ile hareket eder.

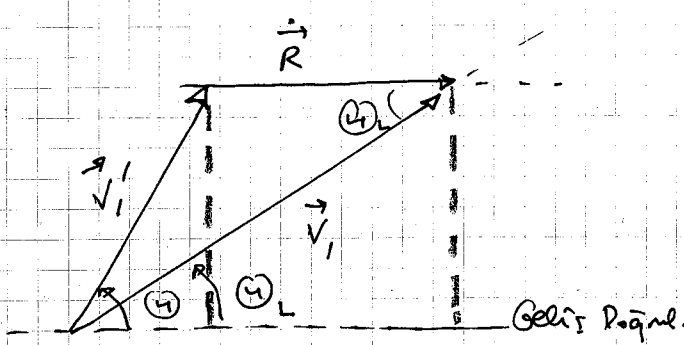
$\eta = \theta_{\text{cm}}$. Saçılma açısı
eşit olmalı.



2

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_1' + \vec{R}$$

Sagilmeden sonra,



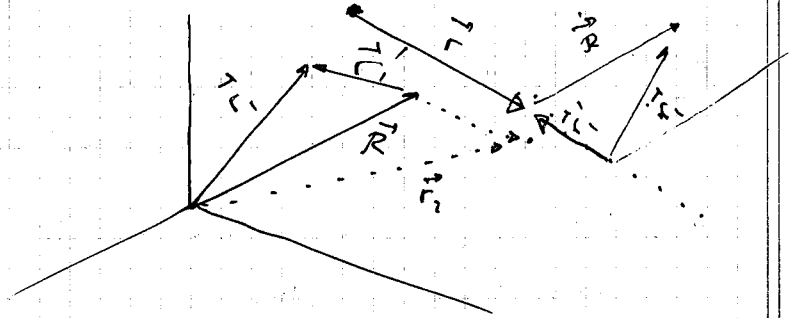
$$\vec{r}_1' = -\frac{m_2}{m_1+m_2} \vec{r}$$

$$\vec{r}_2' = \frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{r}$$

Gelis Ragnel.

$$V_1' = \frac{1}{m_1} \vec{r} = \frac{1}{m_1} V_0$$

$$\tan \theta_L = \frac{V_1' \sin \theta}{R + V_1' \cos \theta}$$



$$(m_1+m_2) \vec{R} = m_1 \vec{V}_0$$

$$R = \frac{1}{m_2} V_0 \Rightarrow \tan \theta_L = \frac{\left(\frac{1}{m_1}\right) V_0 \sin \theta}{\left(\frac{1}{m_2}\right) V_0 + \frac{1}{m_1} V_0 \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \theta}$$

$$\frac{m_1}{m_2} \ll 1 \quad m_2 \text{ ağır} \Rightarrow \tan \theta_L = \tan \theta$$

$$\theta = \theta_L$$

LAB ve K.M. koordinatlarında ki Sagilma tenc kenterleri verter bir kati aci elemanina sagilan parcaaklerin sayimin iki sistemdede esit olmasi gereginden bulunur.

$$2\pi I \sigma(\theta) \sin \theta d\theta = 2\pi I \sigma'(\theta_L) \sin \theta_L d\theta_L$$

$$\sigma'(\theta_L) = \sigma(\theta) \frac{\sin \theta}{\sin \theta_L} \frac{d\theta}{d\theta_L} = \sigma(\theta) \cdot \frac{d\cos \theta}{d\cos \theta_L}$$

Örneğin; α -parçacıklarının atom çekirdeklerinden saçılması da (Rutherford saçılması) $m_1 : 4$ atom br. ile $m_2 : 100$ atom br. 'dir.

Nötron - proton saçılmasında $m_1 = m_2$

$$\tan \Theta_L = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta + 1} = \tan \frac{\Theta}{2}$$

$$\Theta_L = \frac{\Theta}{2} \quad m_1/m_2 = 1$$

$$\sigma'(\Theta_L) = 2 \frac{\sin(2\Theta_L)}{\sin \Theta_L} = 4 \cos \Theta_L \sigma(2\Theta_L)$$

Buradaki saçılma elastiktir. Burada bilekte LAB. da parçacıkların hızları değişmeden kalmaz. Saçıcı parçacık geri tepen ve sonlu bir hız ve K.E. 'ye sahip olur.

$$\vec{V}_1' = \vec{V}_1 - \vec{R} \Rightarrow V_1'^2 = V_1^2 + R^2 - 2V_1 R \cos \Theta_L$$

$$\left. \begin{array}{l} V_1' = \frac{\mu}{m_1} V_0 \\ R = \frac{\mu}{m_2} V_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{\mu}{m_1} \right)^2 V_0^2 = V_1^2 + \left(\frac{\mu}{m_2} \right)^2 V_0^2 - 2 \left(\frac{\mu}{m_2} \right) V_1 \cos \Theta_L V_0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{V_1}{V_0} \right)^2 - 2 \frac{\mu}{m_2} \left(\frac{V_1}{V_0} \right) \cos \Theta_L + \mu^2 \left(\frac{1}{m_2^2} - \frac{1}{m_1^2} \right) = 0$$

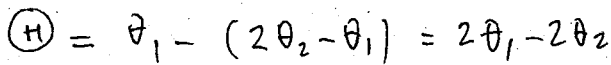
$$+ \frac{m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2 m_2} (m_1 - m_2)(m_1 + m_2)$$

$$\left(\frac{V_1}{V_0} \right)^2 - 2 \frac{\mu}{m_2} \left(\frac{V_1}{V_0} \right) \cos \Theta_L + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 0$$

$$\mu = \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow \frac{V_1}{V_0} = \cos \Theta_L$$

Delayın ile K.M. de qeışqalmaya kersı qelen $\odot = \pi$

$\odot_L = \frac{\pi}{2}$ isin maks. enerji iletimi vardır. ve qeı teğen pazeal qelen parqacığın tın k.ē. 'ıı alr.



$$= \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \frac{\theta}{2} \quad (*)$$

$$P_1 \sin \theta_1 = P_2 \sin \theta_2 \quad \Rightarrow \quad \sin \theta_2 = \frac{P_1}{P_2} \sin \theta_1 = n \sin \theta_1$$

$$(*) \left(\sin \theta_1 - n \sin \theta_1 \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 = \sin^2 \frac{\theta}{2} (1 - n^2 \sin^2 \theta_1)$$

$$\sin^2 \theta_1 \left\{ \left[1 - n \cos \frac{\theta_2}{2} \right]^2 + n^2 \sin^2 \frac{\theta_2}{2} \right\} = \sin^2 \frac{\theta_2}{2}$$

$$\sin \theta_1 = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1+n^2-2n \cos \frac{\theta}{2}}}$$

$$S = \frac{a \sin \frac{\psi}{2}}{\sqrt{1+n^2 - m \cos \frac{\psi}{2}}}$$

$$\frac{ds}{d\omega} = a \left\{ \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{\omega}{2}}{[1+n^2-2n \cos \frac{\omega}{2}]^{1/2}} + \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{\sin \frac{\omega}{2} (+2n \sin \frac{\omega}{2}) \frac{1}{2}}{[1+n^2-2n \cos \frac{\omega}{2}]^{1/2}} \right\}$$

$$\sigma(\omega) = \frac{s}{\sin \omega} \left| \frac{ds}{d\omega} \right| = \frac{a \sin \frac{\omega}{2}}{[1+n^2-2n \cos \frac{\omega}{2}]^{1/2}} \cdot \frac{(a/2)}{2 \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2}}$$

$$\times \left\{ \frac{\cos \frac{\omega}{2}}{[1+n^2-2n \cos \frac{\omega}{2}]^{1/2}} - \frac{n \sin^2 \frac{\omega}{2}}{[1+n^2-2n \cos \frac{\omega}{2}]^{3/2}} \right\}$$

$$= \frac{a^2}{4 \cos \frac{\omega}{2}} \left\{ \frac{\cos \frac{\omega}{2}}{1+n^2-2n \cos \frac{\omega}{2}} - \frac{n \sin^2 \frac{\omega}{2}}{(1+n^2-2n \cos \frac{\omega}{2})^2} \right\}$$

$$= \frac{a^2}{4 \cos \frac{\omega}{2}} \frac{(1+n^2-2n \cos \frac{\omega}{2}) \cos \frac{\omega}{2} - n \sin^2 \frac{\omega}{2}}{(1+n^2-2n \cos \frac{\omega}{2})^2}$$

$$= \frac{a^2}{4 \cos \frac{\omega}{2}} \frac{(1+n^2) \cos \frac{\omega}{2} - n \cos^2 \frac{\omega}{2} - n}{(1+n^2-2n \cos \frac{\omega}{2})^2}$$

$$= \frac{a^2}{4 \cos \frac{\omega}{2}} \frac{(n \cos \frac{\omega}{2} - 1)(n - \cos \frac{\omega}{2})}{[1+n^2-2n \cos \frac{\omega}{2}]^2}$$

$$P_1 = \sqrt{2mE} \quad P_2 = \sqrt{2m(E+V_0)}$$

$$\frac{\hat{p}^2}{2m} = E - V = E + V_0$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{n} = \sqrt{\frac{E}{E+V_0}}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r) \quad V(r) = -k/r$$

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}$$

$$dr = \dot{r} dt \quad d\theta = \dot{\theta} dt.$$

$$\overline{T} = -\frac{1}{2} \overline{V}$$

$$\oint p_r dr + \oint p_\theta d\theta = 2 \oint_0^\tau \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) dt$$

$$2\tau \left[\frac{1}{\tau} \oint_0^\tau E_k dt \right] = -2\tau \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\tau} \oint_0^\tau V(r) dt \right] \quad \text{Virial theorem.}$$

$$\oint p_r dr + \oint p_\theta d\theta = - \oint_0^\tau V(r) dt$$

$$k \oint_0^\tau \frac{dt}{r} \quad dt = \frac{m r^2}{l} d\theta \quad \text{Angular mom. cons.}$$

$$= k \oint \frac{m r^2}{l r} d\theta = \frac{k m}{l} \int_0^{2\pi} r d\theta = \frac{k m}{l} \int_0^{2\pi} \frac{l^2 / m k}{1 + \epsilon \cos \theta} d\theta$$

$$= l \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \epsilon \cos \theta} = 2l \left[\frac{\pi}{(1 - \epsilon^2)^{1/2}} \right]$$

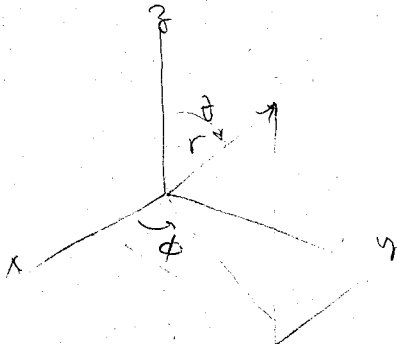
$$= 2l \left\{ \frac{\pi}{\left[1 - \left(1 + \frac{2\epsilon l^2}{m k^2} \right) \right]^{1/2}} \right\}$$

$$= 2l \left\{ \frac{\pi}{\left(-\frac{2\epsilon l^2}{m k^2} \right)^{1/2}} \right\} = 2l \frac{\pi k \sqrt{m}}{l} \frac{1}{\sqrt{-1\epsilon}}$$

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad a, b > 0.$$

$$\text{BS K} \oint p_r dr + \oint p_\theta d\theta = \pi k \sqrt{\frac{2m}{-E}}$$

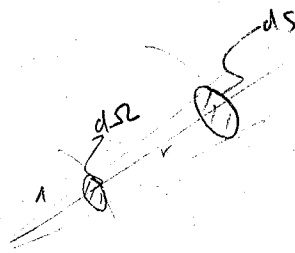
Katı Ağı: (yüzey)



$$\theta \rightarrow \theta + d\theta$$

$$\phi \rightarrow \phi + d\phi \text{ kadar de\u0131i\u015ftirelim}$$

koni olu\u015fur

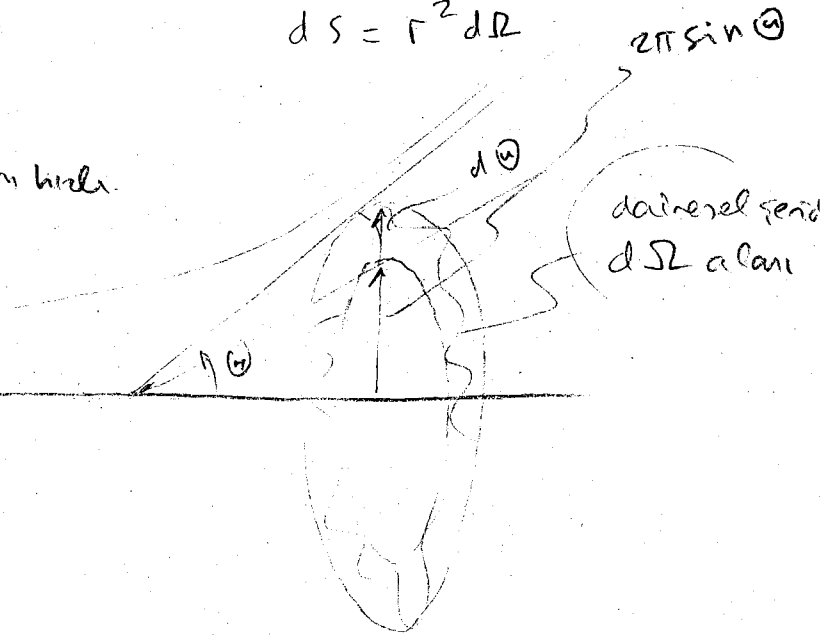
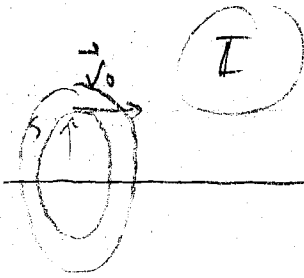


Thales oranı ;

$$\frac{ds}{r^2} = \frac{d\Omega}{r^2}$$

$$ds = r^2 d\Omega$$

aynı k\u00fctleli, aynı k\u00fctle



$$d\Omega = (2\pi \sin \theta) d\theta$$

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta d\phi \leftrightarrow \phi \text{ 'ye ba\u011flılık varsa}$$

(θ) : Sa\u011flama a\u011fısı.

2

parçacığın sağlandığı yörünge E, l 'ye bağlıdır veya E, s

$$l = m_0 v_0 s = p_0 s \quad E = \frac{B^2}{2m} \quad p_0 = \sqrt{2mE}$$

$$l = \sqrt{2mE} s$$

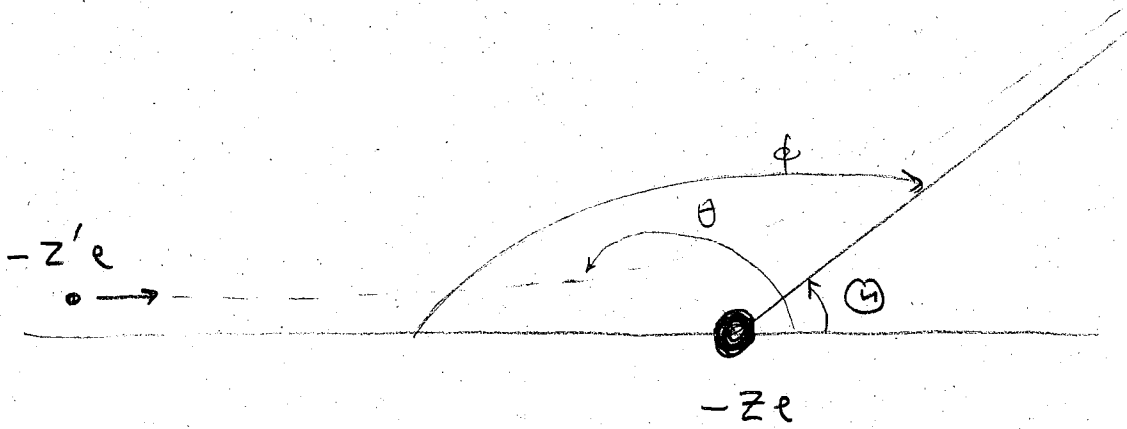
(E, s) biliniyorsa parçacığın yörüngesi bulunabilir

$l = sbt, E = sbt \Rightarrow$ her s 'ye bir ω karşı gelir.

$$2\pi s ds I = - I \sigma(\omega) d\omega$$

$$\sigma(\omega) = - \frac{s ds}{\sin \omega d\omega}, \quad s = s(E, \omega)$$

Coulomb Sağılması:



yörünge açısı olan θ 'nin değişim aralığı ϕ 'dir.

$$f = \frac{ZZ'e^2}{r^2}, \quad k = -ZZ'e^2$$

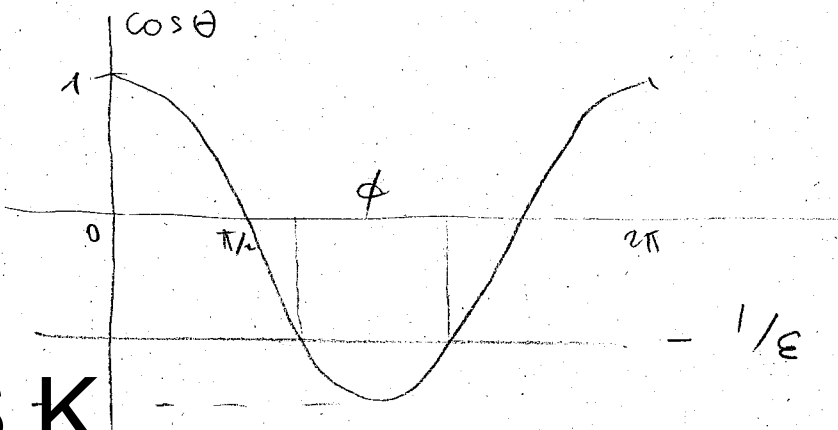
Yörünge denk'i:

$$\frac{1}{r} = -\frac{m}{\hbar^2} ZZ'e^2 (1 + \epsilon \cos \theta)$$

$$1 + \epsilon \cos \theta < 0 \Rightarrow \frac{1}{r} > 0 \Rightarrow \cos \theta < -\frac{1}{\epsilon}$$

$$\Sigma = \left(1 + \left(\frac{2Es}{ZZ'e^2} \right)^2 \right)^{1/2}$$

$\Sigma < 0$ ise hiperbel.



$$\phi + \phi = \pi$$

④

$$\omega + \phi = \pi$$

$$\frac{\omega}{2} + \frac{\phi}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = \sin \frac{\omega}{2} = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\sin \frac{\omega}{2}} \Rightarrow \varepsilon^2 = \frac{1}{\sin^2 \frac{\omega}{2}}$$

$$\varepsilon^2 - 1 = \frac{1 - \sin^2 \frac{\omega}{2}}{\sin^2 \frac{\omega}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{\omega}{2}}{\sin^2 \frac{\omega}{2}} = \cotan^2 \frac{\omega}{2} = \left(\frac{ZZ'e^{\sim}}{ZF} \right)^2$$

$$\cot \frac{\omega}{2} = \frac{ZF}{ZZ'e^{\sim}} \Rightarrow s = \frac{ZZ'e^{\sim}}{ZF} \cotan \frac{\omega}{2}$$

$$J(\omega) = \frac{-s}{\sin \omega} \frac{ds}{d\omega} \quad \frac{ds}{d\omega} = \left(\frac{ZZ'e^{\sim}}{ZF} \right) \frac{-1}{\sin^2 \frac{\omega}{2}}$$

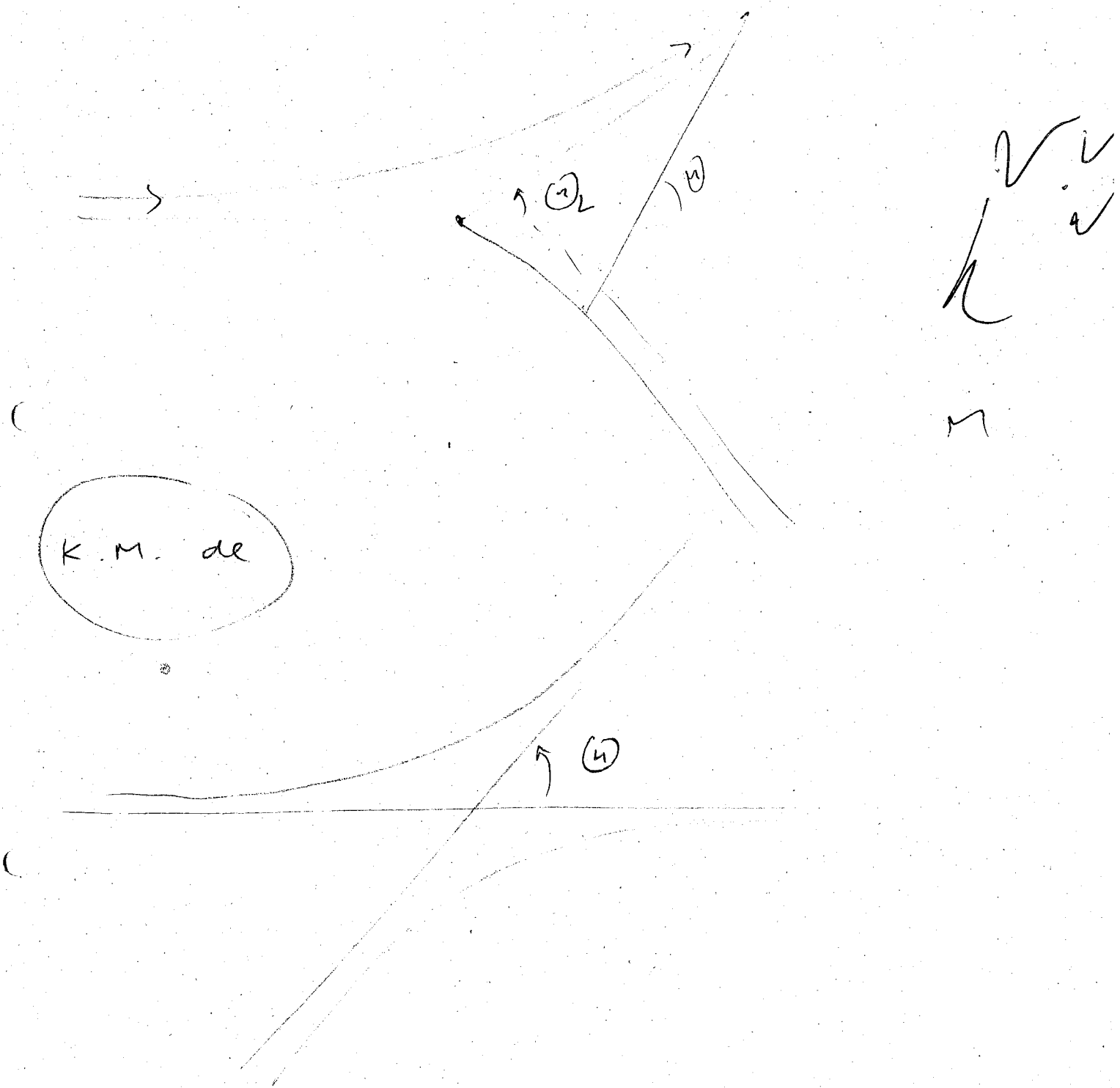
$$= \left(\frac{ZZ'e^{\sim}}{ZF} \right) \frac{\cotan \frac{\omega}{2}}{\sin \omega} \frac{1}{\sin^2 \frac{\omega}{2}}$$

$$= \left(\frac{ZZ'e^{\sim}}{ZF} \right)^2 \frac{\cancel{\cos \frac{\omega}{2}}}{\sin \omega} \frac{1}{\sin^2 \frac{\omega}{2}}$$

$2 \sin \frac{\omega}{2} \cancel{\cos \frac{\omega}{2}}$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{ZZ'e^{\sim}}{ZF} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\omega}{2}}$$

Sagilma prb. m. Lab. koord. larne dönüştürme:



Lab. Sist. nde 1. parca: $\vec{r}_1, \dot{\vec{r}}_1 = \vec{v}_1$

K.M. " $\vec{r}_1', \dot{\vec{r}}_1' = \vec{v}_1$

Lab. Sist. de yer koord. ları $\vec{R}$ ve $\dot{\vec{R}}$

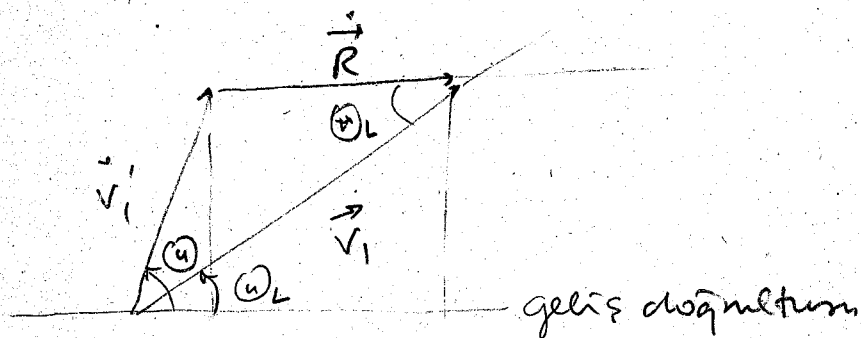
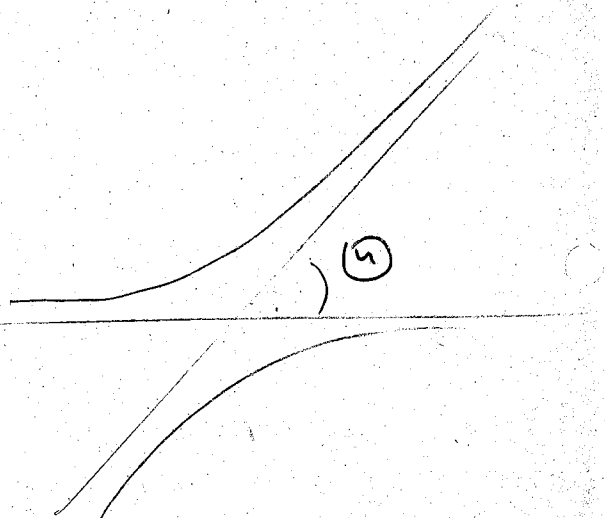
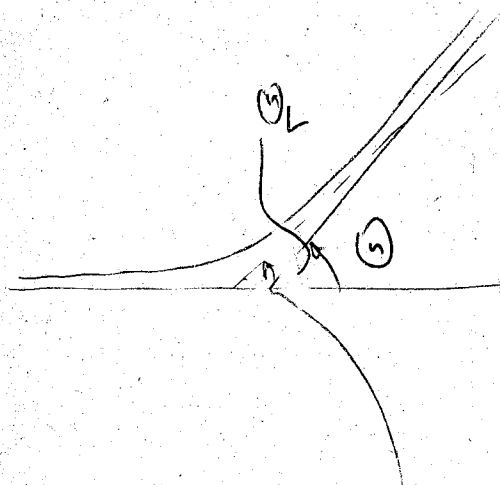
8

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r}_1'$$

$$\vec{v}_1 = \dot{\vec{R}} + \vec{v}_1'$$

LAB

KM



$$\vec{r}_1' = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_1$$

$$\vec{r}_1' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_1$$

$$\tan \theta_L = \frac{v_1' \sin \theta}{v_1' \cos \theta + \dot{R}}$$

$$\vec{v}_1' = \frac{\mu}{m_1} \vec{r}_1$$

$$\vec{v}_1' = \frac{\mu}{m_1} v_1$$

$$(m_1 + m_2) \dot{\vec{R}} = m_1 \vec{v}_0$$

$$\dot{R} = \frac{\mu}{m_2} v_0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \tan \theta_L = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \frac{m_1}{m_2}} \end{array} \right.$$

$$\tan \theta_L = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \frac{m_1}{m_2}}$$

$\ll 1$
 $\tan \theta_L = \tan \theta$
 $m_2 \text{ ağır}$

BS K

(7)

$$2\pi I \sin \Theta d\Theta = 2\pi I \sigma'(\Theta_L) \sin \Theta_L d\Theta_L$$

$$\sigma'(\Theta_L) = \sigma(\Theta) \frac{\sin \Theta}{\sin \Theta_L} \frac{d\Theta}{d\Theta_L}$$

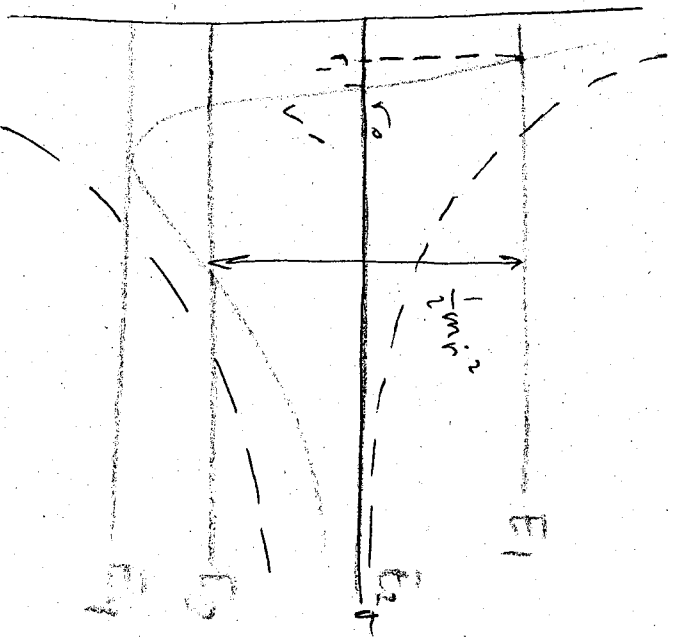
$$\tan \Theta_L = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta + 1} = \tan \frac{\Theta}{2}$$

$$\Theta_L = \frac{\Theta}{2}$$

$$m_1 = m_2$$

$$\sigma'(\Theta_L) = 4 \cos \Theta_L \sigma(2\Theta)$$

$$V' = -\frac{k}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$



$E_1 > 0$ Moddesol wulta r_1 den doko yduna gdelowu.

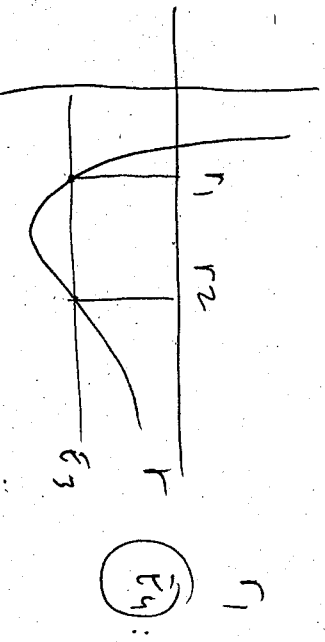
$r < r_1 \Rightarrow V' > E_1 \Rightarrow E \cdot k$. negetif. hyperbol

$E_2 = 0$ parabol.

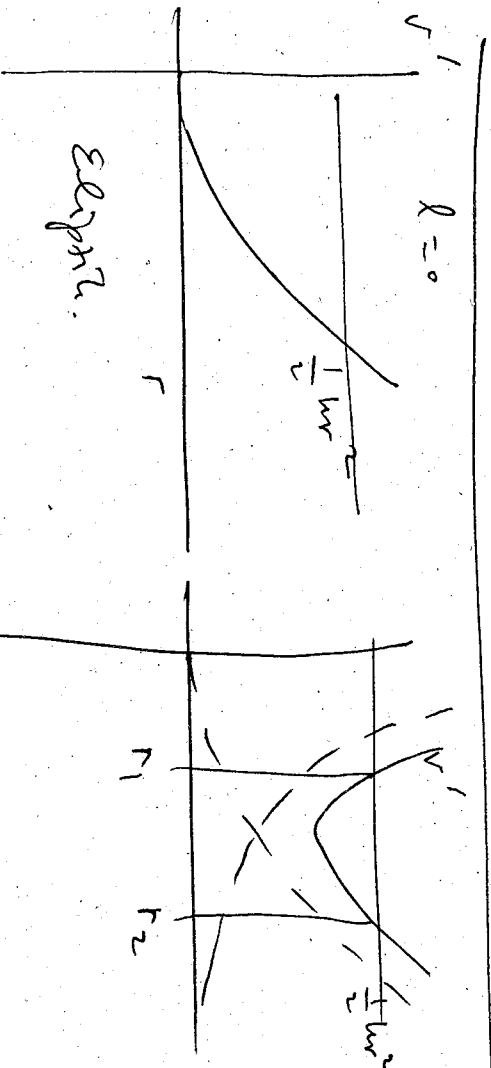
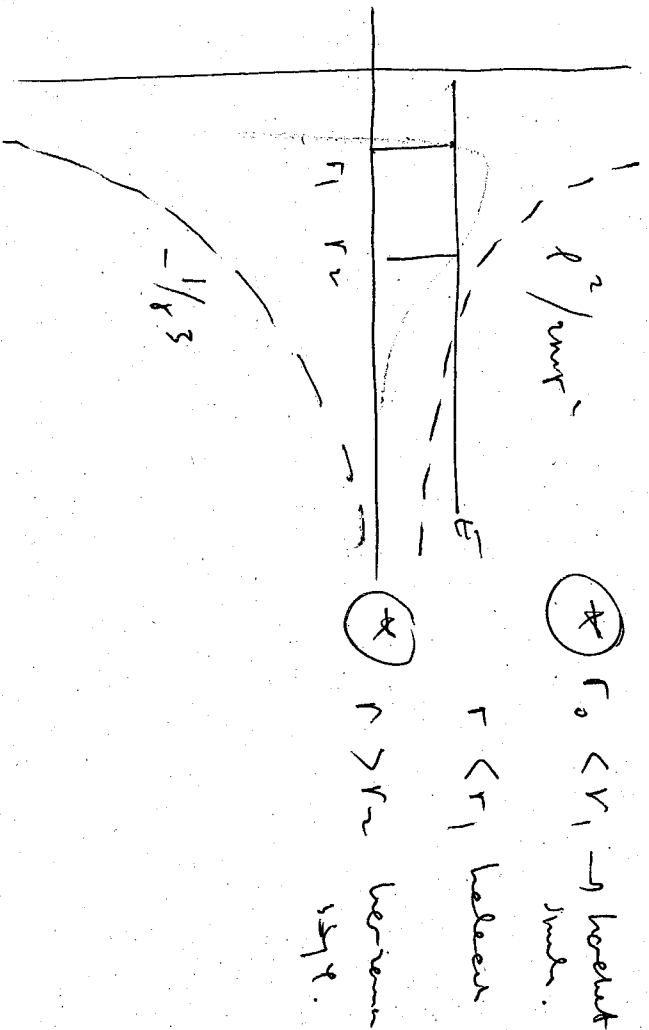
$E_3 < 0$

r_1, r_2 : positif yadulidaw.

$r_1 \rightarrow r_2$ arwana sunu.



$$V = -\frac{a}{r^2} \quad f = -\frac{3a}{r^3}$$



BS K

$$m \ddot{r} - \frac{\tilde{L}^2}{mr^3} = f(r)$$

$$\tilde{L}^2 \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{\tilde{L}^2}{mr^2} = f(r)$$

$$-\frac{\tilde{L}^2}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{m} \frac{d(1/r)}{d\theta} \right) - \frac{\tilde{L}^2}{mr^2} = f(r)$$

$$u = \frac{1}{r}$$

$$\frac{\tilde{L}^2}{m} u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -f(1/u)$$

prob. 3.9.) $f = k/r^3$ $\nabla(\psi) = -\frac{s}{\sin\theta} \frac{d\psi}{d\theta}$ $s = s(\psi, E)$

$$\frac{\ell^2 u''}{m} (u'' + u) = -f(1/u) = -\cancel{k u^3}$$

$$u'' + u \left(1 + \frac{mk}{\ell^2} \right) = 0 \quad u = u_0 \cos \left(\sqrt{1 + \frac{mk}{\ell^2}} \theta \right)$$

$$\frac{\ell}{r} = u_0 \cos \alpha \theta \quad \alpha = \sqrt{1 + \frac{mk}{\ell^2}}$$

$$\cos \alpha \theta \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{3\pi}{2} \leq \alpha \theta \leq \pi/2 \text{ veya } -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \theta \leq \pi/2$$

$$-\frac{\pi}{2\alpha} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2\alpha}$$

$$\ell = smv_0 = s\sqrt{2mE}$$

$$\frac{\psi}{2} + \frac{\Phi}{2} = \pi \quad \frac{\Phi}{2} = \frac{\pi}{2\alpha}$$

$$\psi = \pi - \frac{\pi}{\alpha} = (\pi) \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right)$$

$$\frac{\psi}{\pi} = 1 - \frac{1}{\alpha}$$

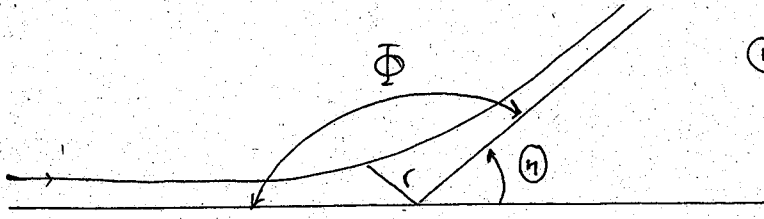
$$\frac{1}{\alpha^2} = \left(1 - \frac{\psi}{\pi} \right)^2 \Rightarrow \frac{\ell^2}{\ell^2 + mk} = \left(1 - \frac{\psi}{\pi} \right)^2 = \frac{2mEs^2}{2mEs^2 + mk}$$

$$s = \sqrt{\frac{k}{2E}} \quad \pi - \psi = \sqrt{(2\pi - \psi)\psi}$$

$$(1-x)^2 = \frac{1}{1 + \frac{k}{2E} \frac{1}{s^2}}$$

$$1 + \frac{k}{2E} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{k}{2E} \frac{1}{s^2} = \frac{x - x + x^2}{1-x^2}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{k}{2E} \frac{1}{x^2} \Rightarrow s = \sqrt{\frac{k}{2E}} \frac{1}{1-x^2}$$

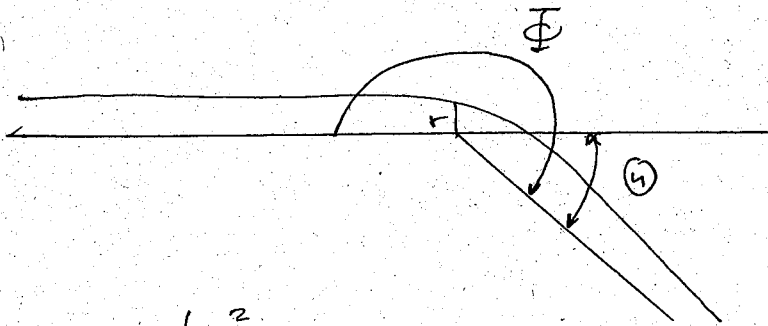


$$\Theta = \pi - \Phi$$

$$\frac{1}{r} = - \frac{z z' e^2}{p^2} (1 + \epsilon \cos \theta) \quad \cos \theta < -1/\epsilon \Rightarrow \sin \frac{\Theta}{2} = \frac{1}{\epsilon}$$

< 0

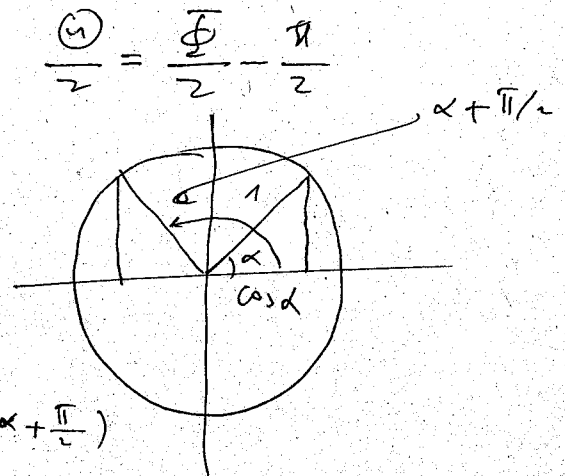
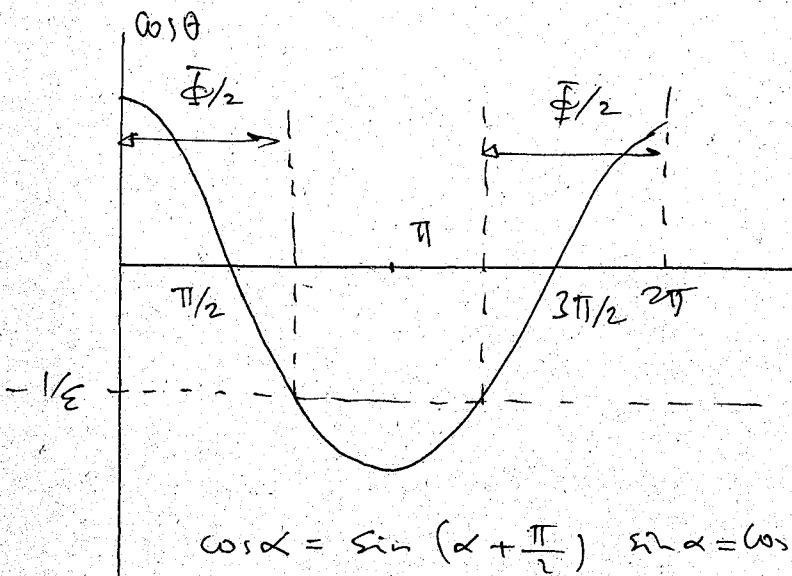
Geliici



$$\Theta = \Phi - \pi$$

$$\frac{1}{r} = \frac{z z' e^2}{p^2} (1 + \epsilon \cos \theta) \quad \cos \theta > -1/\epsilon$$

> 0



$$\cos \alpha = \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) \quad \sin \alpha = \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\cos \frac{\Phi}{2} = \cos \left(\frac{\Theta}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= -\sin \frac{\Theta}{2} = -\frac{1}{\epsilon}$$

$$\frac{\Theta}{\pi} = x \Rightarrow (1-x)^2 = \frac{1}{1 + \frac{k}{2E} \frac{1}{s^2}}$$

$$s^2 = \frac{k}{2E} \frac{(1-x)^2}{(2-x)x}$$

$$\sigma(\Theta) = \frac{s}{\sin \Theta} \left| \frac{ds}{d\Theta} \right|$$

$$2s ds = \frac{k}{2E} \frac{2(1-x)(-1)(2-x)x - (1-x)^2(2-2x)}{(2-x)^2 x^2} dx$$

$$= \frac{k}{2E} 2 \cdot (1-x) \left\{ \frac{-(2-x)x - (1-x)^2}{(2-x)^2 x^2} \right\} dx$$

$$= -\frac{k}{E} (1-x) \left\{ \frac{2/x - \cancel{x^2} + 1 - \cancel{2/x} + \cancel{x^2}}{(2-x)^2 x^2} \right\} dx$$

$$= -\frac{k}{E} \frac{(1-x)}{(2-x)^2 x^2} dx$$

$$\boxed{\sigma(\Theta) d\Theta = \frac{k}{2E} \frac{(1-x) dx}{(2-x)^2 x^2 \sin \pi x}}$$

$$f = k r^{-3} \quad V = -k / 2r^2 = -\frac{1}{2} k u^2$$

$$\Theta = \cancel{\Theta_0} - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{p^2} - \frac{2m}{p^2} V - u^2}}$$

$$= - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{p^2} - \left(\frac{mk}{p^2} + 1\right) u^2}} = - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{mk}{p^2}}} \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{p^2} \left(1 + \frac{mk}{p^2}\right) - u^2}}$$

$$= - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{mk}{p^2}}} \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{mk}{p^2}}} \arcsin \frac{u}{a}$$

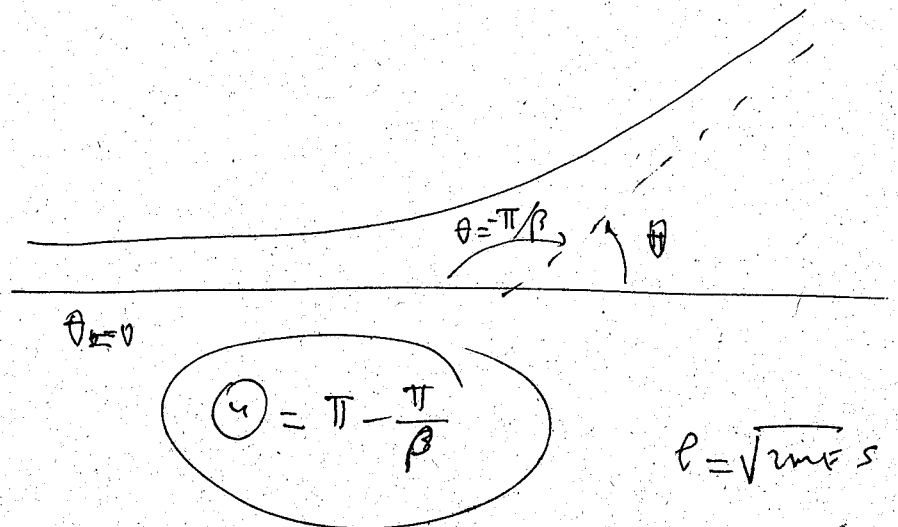
$$u = -a \sin\left[\sqrt{1 + \frac{mk}{p^2}} \theta\right] = -\alpha \sin(p\theta) = \frac{1}{r}$$

$$\theta = 0 \quad r \rightarrow \infty$$

$$\theta = \frac{-\pi}{\beta} \quad r \rightarrow \infty$$

$$\theta = \frac{-\pi}{2\beta} \quad r = \alpha$$

parabelen enyaka
uzalgan.



$$\frac{\Theta}{\pi} = 1 - \frac{1}{\beta} \Rightarrow 1 - \frac{\Theta}{\pi} = \frac{1}{\beta}$$

$$(1-x)^2 = \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{1 + \frac{mk}{p^2}} = \frac{1}{1 + \frac{k}{2E} \frac{1}{s^2}} \quad \text{ayn.$$