BÖLÜM 4

RİJİT CİSİM HAREKETİNİN KİNEMATİĞİ

* Rijit cisimlerin kinematiği, yani hareketlerinin karekteristiklerini ve doğasını inceleyeceğiz. Hareketlerinin nasıl tarif edileceğini öğrendikten sonra Lagrange formülasyonu çevresinde böyle bir hareketin uygulanan kuvvetler ve momentlerle nasıl meydana geldiği ele alınacak.

* Katı cisim: Aralarındaki uzaklıklar sabit kalan çok parçacık sistemi.

4.1. Katı bir cismin bağımsız koordinatları: Katı bir cismin hareketini incelemeden önce, konumunu belirlemek için kaç bağımsız koordinatın gerekli olduğunu bulalım.

* N parçacıklı bir sistemin en fazla 3N tane serbestlik derecesi vardır. Bu serbestlikler

$$r_{ij} = c_{ij}$$

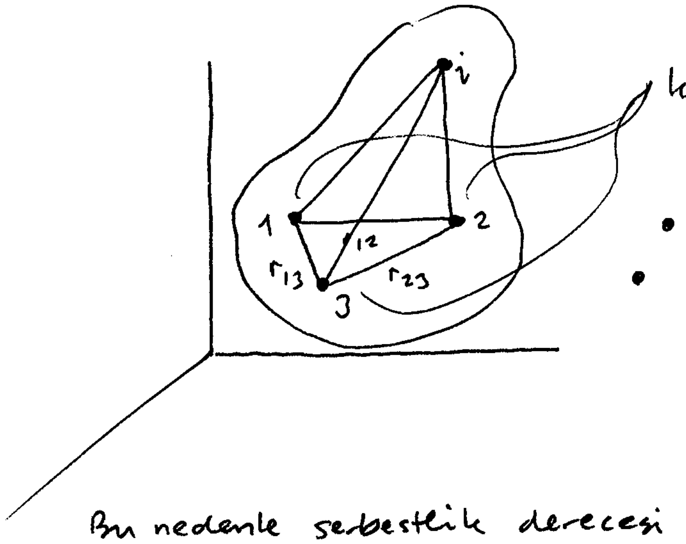
formunda ifade edilebilecek bağ koşulları ile kısıtlanır. Bunun gibi bağ denklemlerinin sayısını 3N'den çıkartarak gerçek serbestlik derecesini bulamayız.

$r_{ij} = c_{ij}$ formunda $\frac{1}{2}N(N-1)$ mümkün denklem vardır ve N büyüdükçe 3N'i geçer. ($N=9 \Rightarrow$ bağ koşulu $:: 36$, $3N = 27$ $\frac{1}{2}N(N-1) > 3N$, $36 > 27$)

$\therefore$ Bağ koşulları da kendi arasında bağımlı demektir.

* Katı cisim'de bir parçacığın yerini belirlemek için cisimdeki bütün başka noktalarla olan uzaklıkları belirlemek gereksiz.

sadece aynı doğru üzerinde bulunmayan başka üç noktaya olan uzaklıkları bilinmeli



karşılaştırma noktaları.

• Katı cisimin üç maddesel noktası bir defa bilinince bağlar geri kalan bütün noktaların konumlarını belirler.

Bu nedenle serbestlik derecesi sayısı $3N = 9$'dan fazla olamaz. Fakat bu üç karşılaştırma noktası kendi aralarında bağımsız değiller. Bunlar arasında 3 tane katı bağ denklemi var:

$$r_{12} = c_{12} \qquad r_{23} = c_{23} \qquad r_{13} = c_{13}$$

Bu durumda serbestlik derecesi 6 olur.

* Sadece 6 koordinatın gerekli olduğunu şöyle de anlayabiliriz.

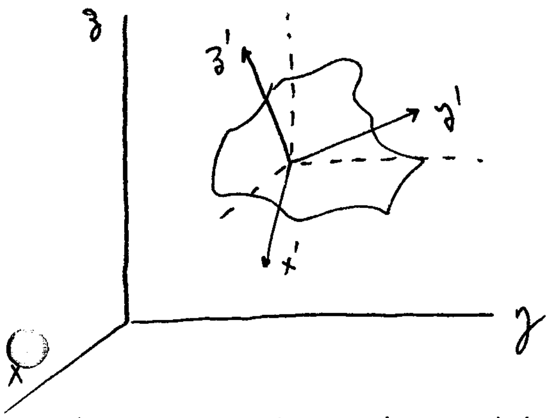
1 No'lu karşılaştırma noktası için <u>3 koordinat</u> verilmeli. 1 noktası tespit edilince 2 noktası, merkezi 1 noktası olan kürenin (c_{12} yarıçaplı) yüzeyinde harekete zorlanacağından <u>2 koordinat</u> da bunun için gerekli dir. 3 noktası da sadece ilk iki noktayı birleştiren eksen (c_{12} ekseni) etrafında döneceğinden <u>1 koordinat</u> da bunun için gerekli.

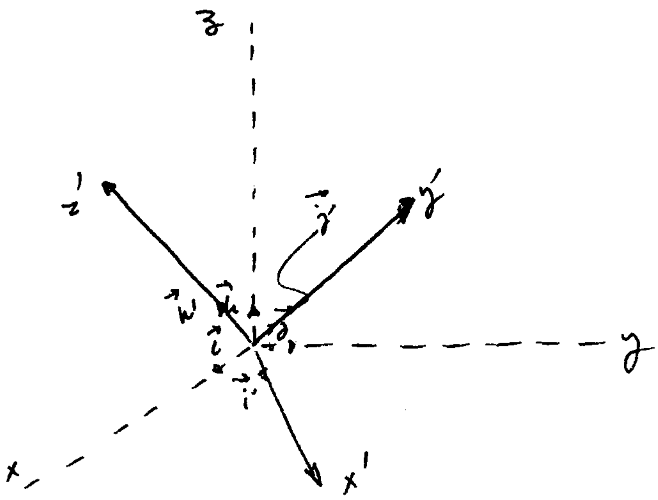
∴ Katı cisimin uzayda konumunu belirleyebilmek için altı bağımsız genelleştirilmiş koordinat gerekir.
Rigit cisimin rijitliğini sağlayan bağlar dışında ek bağlar da bulunabilir (cisim bir yüzey üzerinde harekete zorlanabilir, ya da bir noktası tespit edilebilir) Bu durumda bağımsız koordinatların sayısı azalır.

BS K

Bu koordinatlar nasıl seçilecek? Bir çok yolu olmasına karşın en basiti şudur

Uzayda bir (x,y,z) kartezyen koordinat sistemi tespit edelim. Katı cismin herhangi bir noktasının bu üç koordinata göre yerini belirlersek bu katı cismin ötelenmesini belirler. Katı cisim içindeki bu nokta üzerinde bir (x',y',z') koordinat sistemi seçersek katı cismin konumunu hem ötelenmeler ve hem de dönmeler bakımından tam olarak belirleyebiliriz.





Kartezyen bir eksen takımının başlangıç noktası kendisi ile ortak olan bir başka takıma göre yönelimini belirtmek için pek çok yol vardır:

* üslü eksenlerin üssüz eksenlere göre doğrultman kosinüsleri ifade edilir.

$$\vec i\cdot\vec i' = \cos(\vec i,\vec i') = \alpha_1 \qquad \vec i\cdot\vec j' = \cos(\vec i,\vec j') = \beta_1 \qquad \vec i\cdot\vec k' = \cos(\vec i,\vec k') = \gamma_1$$
$$\vec j\cdot\vec i' = \cos(\vec j,\vec i') = \alpha_2 \qquad \vec j\cdot\vec j' = \cos(\vec j,\vec j') = \beta_2 \qquad \vec j\cdot\vec k' = \cos(\vec j,\vec k') = \gamma_2$$
$$\vec k\cdot\vec i' = \cos(\vec k,\vec i') = \alpha_3 \qquad \vec k\cdot\vec j' = \cos(\vec k,\vec j') = \beta_3 \qquad \vec k\cdot\vec k' = \cos(\vec k,\vec k') = \gamma_3$$

(9 Ad. Doğrultman kosinüsü)

$\vec i'$ vektörü $(\vec i,\vec j,\vec k)$ cinsinden ifade edilebilir.

$$\begin{cases} \vec i' = (\vec i'\cdot\vec i)\vec i + (\vec i'\cdot\vec j)\vec j + (\vec i'\cdot\vec k)\vec k \\ \quad = \alpha_1\vec i + \alpha_2\vec j + \alpha_3\vec k \\ \vec j' = \beta_1\vec i + \beta_2\vec j + \beta_3\vec k \\ \vec k' = \gamma_1\vec i + \gamma_2\vec j + \gamma_3\vec k \end{cases}$$

işlemi tersine çevirebiliriz.

$$\begin{cases} \vec i = (\vec i\cdot\vec i')\vec i' + (\vec i\cdot\vec j')\vec j' + (\vec i\cdot\vec k')\vec k' \\ \quad = \alpha_1\vec i' + \beta_1\vec j' + \gamma_1\vec k' \end{cases}$$

BS K

Uzaydaki herhangi bir $\vec{r}$ vektörünün üslü sistemdeki bileşenlerini doğrultma kosinüsleri yardımı ile şu şekilde buluruz.

$$x' = \vec{r}\cdot\vec{i}' = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})\cdot(\alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j} + \alpha_3\vec{k})$$

$$= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$$

$\vec{r}$ vektörünün cisim koord. sist. deki bileşeni.

$$y' = \vec{r}\cdot\vec{j}' = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z$$

$$z' = \vec{r}\cdot\vec{k}' = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z$$

$\therefore$ Dokuz (9) doğrultman kosinüs kümesi her iki koord. sist.'i arasındaki dönüşümü tam olarak ifade eder.

Eğer üslü eksenler cisimde tespit edilmiş olarak alınırsa 9 doğrultman kosinüsü cisim hareket esnasında yönelimini değiştirdiği için zamanın fonk.'u olacaklardır. Bu durumda α, β ve γ'ler cismin anı yönelimini belirleyen koordinatlar olarak düşünülebilirler. Fakat bunlar bağımsız koordinatlar değillerdir. Çünkü a katı bir yönelimini belirlemek için sadece üç koordinatın gerekli olduğunu biliyoruz.

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$$

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$$

6 Adet.

$$\left\{\begin{aligned}
\vec{i}\cdot\vec{j} &= \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0\\
\vec{i}\cdot\vec{k} &= \alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 = 0\\
\vec{j}\cdot\vec{k} &= \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0\\
\vec{i}\cdot\vec{i} &= \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1\\
\vec{j}\cdot\vec{j} &= \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1\\
\vec{k}\cdot\vec{k} &= \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1
\end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_l\alpha_m + \beta_l\beta_m + \gamma_l\gamma_m &= 0\\
\alpha_l^2 + \beta_l^2 + \gamma_l^2 &= 1
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_l\alpha_m + \beta_l\beta_m + \gamma_l\gamma_m = \delta_{lm}$$

$$l, m = 1, 2, 3$$

BS K

∴ 9 doğrultma kosinüsünün, 3 tanesi lineer bağımsız olmak üzere, aralarında 6 Adet bağıntı vardır. 9 doğr. kosi. nün genelleştirilmiş koord. lar gibi kullanarak bir Lagrange fonk.'u ve bundan gelen hareket denklemlerini kurmak mümkün olmaz.

Doğrultman kosinüslerinin 3 bağımsız fonk.nun meydana getirdiği bir takım kullanmalıyız ki bu da Euler açılarıdır.

4.2. Ortogonal Dönüşümler: Notasyonu değiştirelim.

$$\begin{cases} x \rightarrow x_1 \\ y \rightarrow x_2 \\ z \rightarrow x_3 \end{cases}$$

bağıntılar daha kompakt yazabiliriz.

$$x_1' = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i x_i$$

$$x_2' = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = \sum_{i=1}^{3} \beta_i x_i$$

$$x_3' = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i x_i$$

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ x_2' &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ x_3' &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{aligned}\right\}$$

formundaki dönüşümlere lineer veya vektörel dönüşüm diyoruz.

Bir vektörün üslü sistem ile üssüz sistem arasındaki bağıntılar bir lineer dönüşümdür.

Uzayda herhangi bir vektörün boyu koord. sist.inden bağımsızdır, değişmez.

Dolayısı ile

$$\sum_{i=1}^{3} x_i'^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2$$

BS K

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\, x_j \qquad (j=1,2,3)$$ i serbest indis.

$$\sum_{i=1}^{3} x_i' x_i' = \sum_{i=1}^{3} x_i'^2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\, x_j \right) \left(\sum_{k=1}^{3} a_{ik} x_k \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j,k=1}^{3} a_{ij}\, a_{ik}\, x_j\, x_k = \sum_{j,k} \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{3} a_{ij}\, a_{ik} \right]}_{\delta_{jk}} x_j\, x_k = \sum_i x_i^2$$

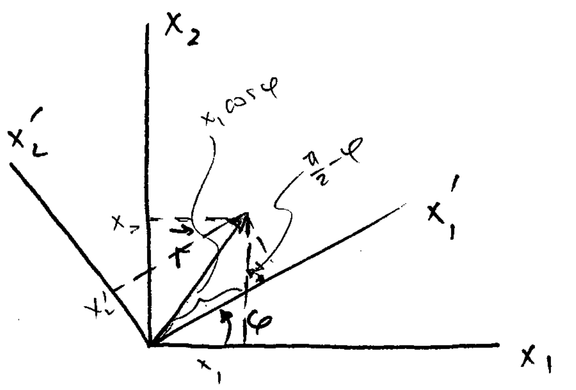
$$\sum_i a_{ij}\, a_{ik} = \delta_{jk}$$ olmalı. $j,k = 1,2,3$ 6 denk.

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ dönüşümüne ortogonal dönüşüm, bağıntısı de ortogonallik şartı adını alır.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ "dönüşüm matrisi"

BS K

Düzlemsel hareketi gözönüne alalım ve kendimizi 2 boyuta kısıtlayalım.



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ olur.}$$

$$x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2$$

$$x_2' = a_{21} x_1 + a_{22} x_2$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r} = x_1 \hat{i} + x_2 \hat{j} \\ \vec{r}' = x_1' \hat{i}' + x_2' \hat{j}' \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x_1' = \vec{r} \cdot \hat{i}' = \cancel{\vec{r}' \cdot \hat{i}'} = x_1 (\hat{i} \cdot \hat{i}') + x_2 (\hat{j} \cdot \hat{i}')$$

$$= x_1 \cos\varphi + x_2 \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \varphi\right) = x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi$$

$$x_2' = \vec{r} \cdot \hat{j}' = x_1 (\hat{i} \cdot \hat{j}') + x_2 (\hat{j} \cdot \hat{j}')$$

$$= x_1 \cos\left(\tfrac{\pi}{2} + \varphi\right) + x_2 \cos\varphi = -\sin\varphi \, x_1 + \cos\varphi \, x_2$$

$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}$ bağıntısını ele alalım.

$$\begin{array}{ll} 1^\circ & j=k=1 \Rightarrow a_{11} a_{11} + a_{21} a_{21} = 1 \\ 2^\circ & j=1, k=2 \Rightarrow a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} = 0 \\ 3^\circ & j=k=2 \Rightarrow a_{12} a_{12} + a_{22} a_{22} = 1 \\ 4^\circ & j=2, k=1 \Rightarrow a_{12} a_{11} + a_{22} a_{21} = 0 \end{array}$$

aynı

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$\rightarrow \quad a_{11} a_{11} + a_{21} a_{21} \overset{?}{=} 1$

$$\cos\varphi \cos\varphi + (-\sin\varphi)(-\sin\varphi) = 1$$

$\rightarrow \quad a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} \overset{?}{=} 0$

$$\cos\varphi \sin\varphi + (-\sin\varphi)\cos\varphi = 0$$

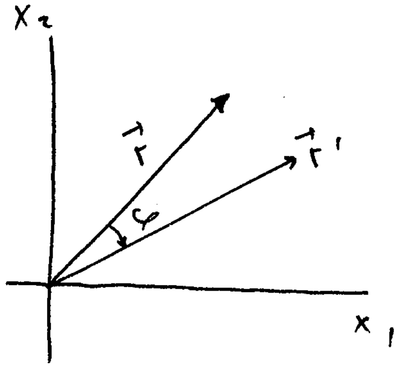
$\rightarrow \quad a_{12} a_{12} + a_{22} a_{22} \overset{?}{=} 1$

$$\sin\varphi \sin\varphi + \cos\varphi \cos\varphi = 1$$

* A dönme matrisi, üssüz sisteme uygulanınca bu sistemi üslü sisteme dönüştüren bir matristir ve operatör olarak da düşünülebilir.

$$(\vec{r})' = \underset{\sim}{A}\,\vec{r}$$

A'nın $\vec{r}$ üzerine etkiyen ve bu vektörü farklı bir $\vec{r}\,'$ vektörüne dönüştüren bir operatör olarak da düşünülebileceğine dikkat edilmelidir.



$$\vec{r}\,' = \underset{\sim}{A}\,\vec{r}$$

* A bir koordinat sistemine uygulandığı zaman saat ibresinin tersi yönünde bir φ dönmesine karşı geliyorsa bir vektöre uygulandığı zaman saat ibresi yönünde bir dönmeyle karşı gelir.

4.3. <u>Dönüşüm Matrisinin Formal Özellikleri</u>: Rijid cismin ardışık iki yerdeğiştirmesine karşı gelen iki ardışık dönüşüm yapılırsa ne olur?

$$\vec{r} \xrightarrow{\;B\;} \vec{r}\,' \xrightarrow{\;A\;} \vec{r}\,'' \quad \therefore \quad \vec{r} \xrightarrow{\;C\;} \vec{r}\,'$$

C ile A ve B arasındaki bağıntıyı bulabiliriz.

$$x_k'' = \sum_{i=1}^{3} a_{ki}\, x_i' \qquad x_i' = \sum_{j=1}^{3} b_{ij}\, x_j$$

$$x_k'' = \sum_i \sum_j a_{ki}\, b_{ij}\, x_j$$

$$= \sum_j \underbrace{\Big(\sum_i a_{ki}\, b_{ij} \Big)}_{c_{ij}} x_j = \sum_j c_{kj}\, x_j$$

$$c_{kj} = \sum_i a_{ki}\, b_{ij}$$

BS K

Sembolik olarak C, A ve B operatörlerinin çarpımı olarak ele alınabilir.

$$C = AB$$

c_{ij}'ler A ve B matrislerini çarparak elde edilen matrislerin elemanları.

1°) Bu matris ya da operatör çarpımı komütatif değildir.

$$AB \neq BA$$

$BA = D$ dönüşümünün elemanları $d_{ij} = \sum_k b_{ik} a_{kj}$

∴ son koord. sist.'i A ve B'nin hangisinin önce uygulanacağına bağlı.

2°) Matris çarpımları; assosyatiflik (ortaklık) özelliğini sağlar.

$$(AB)C = A(BC)$$

3°) A kare (ya da dikdörtgen) matristir.

$$\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$ sütun matrisleri tanımlanabilir.

$\vec{r}\,' = A\vec{r}$ A karesel $\vec{r}$ sütun matrisi olmak üzere $\vec{r}\,' = A\vec{r}$'yi matris denk.i olarak da yazabiliriz.

$$\left.\begin{array}{l} x' = Bx \\ x'' = Ax' \end{array}\right\} \quad x'' = Ax' = ABx = Cx$$

BS K

4°) ikı matrisin toplamı; karşı gelen elemanlarının toplamı olan bir C matrisidi

$$C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

5°) A matrisinin transpozu: A'nın elemanlarının köşegene göre yerlerinin değişmesi (satır ve sütunların yerdeğiştirmesi

$$A = a_{ij} \qquad A^T = \tilde{A} = a^T_{ji} \quad (\text{tilda})$$

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \quad \text{ya da} \quad \sum_i a^T_{ji} a_{ik} = \delta_{jk}$$

$$(A^T A)_{jk} = \delta_{jk} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$A^T A = I = A A^T$$

6°) A matrisinin tersi: A'nın tersi olan dönüşüm $\vec{r}\,'$'yü $\vec{r}$'ye döndüren işlemdir. Bu dönüşüm A^{-1} ile gösterilir ve elemanları a'_{ij} ile belirlenir

A'nın elemanları: a_{ij}: $\quad x'_j = \sum_k a_{jk} x_k$

A^{-1}'nın " $\quad a'_{ij}$: $\quad x_i = \sum_i a'_{ij} x'_j$

$$x_i = \sum_i a'_{ij} \sum_k a_{jk} x_k = \sum_k \underbrace{\Big(\sum_j a'_{ij} a_{jk}\Big)}_{\delta_{ik}} x_k$$

$$\sum_j a'_{ij} a_{jk} = \delta_{ik}$$ Ters dönüşümün diklik bağıntısı.

$$A^{-1} A = I = A A^{-1}$$

BS K

7°) I'ye karşı gelen dönüşüm özdeşlik dönüşümü'dür. Koordinat sisteminde bir değişim meydana getirmez.

$$X = IX \quad ; \quad IA = AI = A$$

8°) $A^T A = I$ idi $\quad A^T A A^{-1} = A^{-1}$

$$\Rightarrow \quad A^T = A^{-1} = \tilde{A} \quad \text{ortogonal matrisler için.}$$

9°) Kompleks elemanlı matrisler için;

$$A\text{'nın adjointi} = A^{\dagger} = (A^T)^* = (\tilde{A})^* \quad (\text{eşmatris})$$

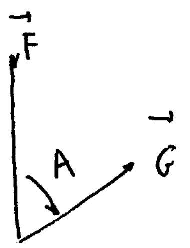
* Adjointi reel matrisler için transpozuna eşittir. $A^{\dagger} = \tilde{A}$

* $A^{\dagger} = A \Rightarrow$ self adjoint ya da hermitik matris denir.

* $A^{\dagger}A = AA^{\dagger} = I \Rightarrow A$ üniterdir. $A^{\dagger} = A^{-1}$'dir.

* Kısaca reel, ortogonal matris üniterdir.

10°) A bir F vektörü (veya tek sütunlu bir $\underset{\sim}{F}$ matrisi) üzerine etkiyen ve bir G vektörü veren bir matris olsun.



$$G = AF$$

Eğer koordinat sistemi B matrisi ile üslü sist. e dönüştürülürse G'nin yeni sist. deki bileşenleri

$$BG = BAF$$

$$G' = BG = BAIF = BAB^{-1}\underbrace{BF}_{F'} \Rightarrow G' = \underbrace{BAB^{-1}}_{A'}F'$$

BS K

$$G' = BAB^{-1}F'$$

$$= A'F' \qquad A' = BAB^{-1}$$ benzerlik dönüşümü adını alır.

11°) Bir A matrisinin determinant'ı. $|A| = \det A$

* $|AB| = |A||B|$

* Birim matrisin det.'ı 1 olduğundan; $|\tilde{A}A| = |\tilde{A}||A| = 1 = |A^T||A|$

Ayrıca det.'in değeri satır sütunlar yerdeğiştirmekle değişmediğinden

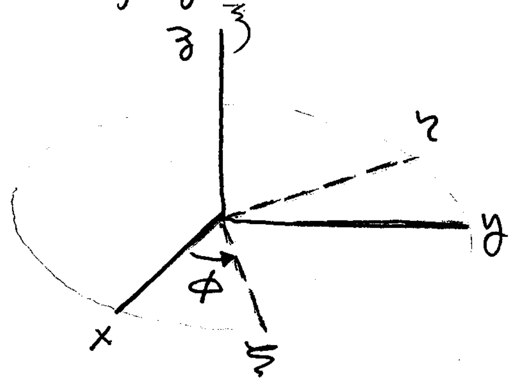
$$|A^T||A| = |A||A| = |A|^2 = 1$$

$$\Rightarrow |A| \begin{cases} \nearrow +1 \\ \searrow -1 \end{cases}$$ dik matrislerin determinantı ya +1 ya -1

BS K

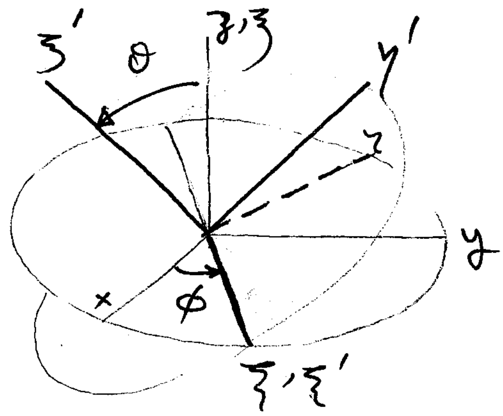
4.4. Euler Açıları: Daha önce a_{ij} elemanlarının birbirinden bağımsız olmadıkları için genelleştirilmiş koordinatlar olarak kullanılmaya elverişli olmadıkları, bundan dolayı Lagrange formülasyonunda katı cisimlerin hareketini ortaya koymadan, katı cismin yönelimini belirleyen üç bağımsız parametreyi bulmak gerektiği söylenmişti.

* Dönme matrisinin 3_boyutlu uzaydaki elemanlarını birbirinden bağımsız üç açı cinsinden yazacağız ve bunlara Euler açıları diyeceğiz.



1°) Önce z_ekseni etrafında ϕ açısı kadar döndürelim:

$$xyz \xrightarrow[\phi]{D} \xi\eta\underset{z}{\underset{|||}{\zeta}} \qquad \zeta \equiv z$$

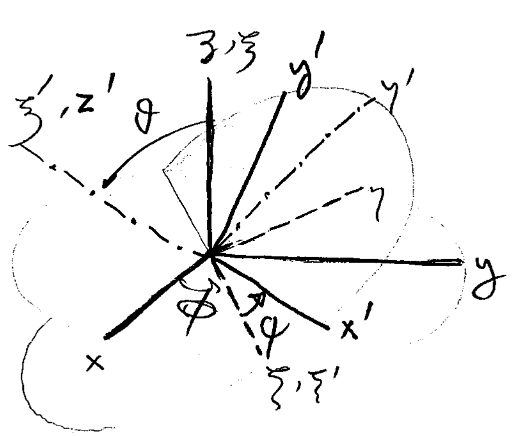


2°) Şimdi dönmüş koordinatlardan ξ-ekseni etrafında θ kadar döndürelim:

$$\xi\eta\zeta \xrightarrow[\theta]{C} \xi'\eta'\zeta' \qquad \xi' = \xi$$

3°) Ve bir kez daha ζ' etrafında ψ kadar döndürelim.

$$\xi'\eta'\zeta' \xrightarrow[\psi]{B} x'y'z'$$



BS K

* Toplam A dönüşümünün elemanları üç dönmeye karşı gelen matrisleri ayrı ayrı elde ettikten sonra, hepsini çarparak elde edilebilir.

* z-ekseni etrafındaki başlangıç dönmesi → D matrisi ile gösterilir.

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{\xi} &= D\underset{\sim}{x} \\ \underset{\sim}{\xi}' &= C\underset{\sim}{\xi} \\ \underset{\sim}{x}' &= B\underset{\sim}{\xi}' \end{aligned}\right\} \qquad \underset{\sim}{x}' = B\xi' = BC\xi = \underbrace{BCD}_{A}x$$

$$\underset{\sim}{x}' = A\underset{\sim}{x} \quad , A = BCD$$

$$A = \underset{B}{\begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{C}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}} \underset{D}{\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi & \cos\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\sin\psi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\cos\psi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\cos\psi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

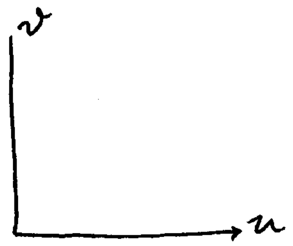
Cisim koord.'ından uzay eksenlerine ters dönüşüm.

$$\underset{\sim}{x} = A^{-1}\underset{\sim}{x}' \text{ 'dür.} \qquad A^{-1} = A^{T}$$

BS K

4.5. <u>Cayley-Klein Parametreleri</u> : Çeşitli değişken grupları katı bir cismin hareketini (yönelimini) tarif etmek için kullanılabilir. Bunlardan birisi de kuantum mekaniğinde spin 1/2 parçacıkları tanımlama'da kullanılan Cayley-Klein parametreleridir. Burada içerilen 4 parametre vardır ve bağımsız değildirler, dolayısı ile genelleştirilmiş koordinatlar olarak kullanılmaları uygun değildir.

u ve v ile gösterilen 2-boyutlu kompleks uzayı ele alalım.



$$u' = \alpha u + \beta v$$

$$v' = \gamma u + \delta v$$

Karşı gelen dönüşüm matrisi :

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ kompleks.}}$

$\Downarrow$

8 bilinmeyen.

Kendimizi üniter (birimsel) ve determinantı +1 olan dönüşümlere kısıtlayalım:

$$Q^{\dagger} Q = Q Q^{\dagger} = I \qquad \text{üniterlik}$$

$$\det Q = +1 \qquad \text{det.'in +1 olma şartı.}$$

$$|Q|^{*} |Q| = +1$$

BS K

$$QQ^{\dagger} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha^* + \beta\beta^* & \alpha\gamma^* + \beta\delta^* \\ \gamma\alpha^* + \delta\beta^* & \gamma\gamma^* + \delta\delta^* \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

reel $\left\{ \begin{array}{ll} 1^\circ\ \alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1 & , \quad \alpha\gamma^* + \beta\delta^* = 0 \\ 2^\circ\ \gamma\gamma^* + \delta\delta^* = 1 & , \quad 3^\circ\ \gamma\alpha^* + \delta\beta^* = 0 \end{array} \right\}$ özdeş, kompleks.

3 denk. $\rightarrow$ 4 şart (sonuncu 2 adet, reel + im.)

$\det Q = +1 \Rightarrow \alpha\delta - \beta\gamma = 1$ 1 şart da bu toplam 5 4°

Geriye 3 bağımsız bilinmeyen kalır.

$3^\circ \rightarrow \dfrac{\delta}{\gamma} = -\dfrac{\alpha^*}{\beta^*}$

4° 'de yerine koyarsak $\alpha\left(-\dfrac{\alpha^*}{\beta^*}\gamma\right) - \beta\gamma = 1$

ya da $-\alpha\alpha^*\gamma - \beta\beta^*\gamma = \beta^*$

$$-(\underbrace{\alpha\alpha^* + \beta\beta^*}_{=1})\gamma = \beta^* \Rightarrow \boxed{\gamma = -\beta^*}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = \alpha^*}$$

$\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1$ ya da $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$$

BS K

Bütün bu özellikleri sağlayan üniter matrisler bir grup oluştururlar $U(2)$, det.'inin +1'e kısıtlanması ise $SU(2)$. 2×2 matrisler.

* Kompleks uzayda

$$P = \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix}$$ matris op.'nü ele alalım.

x, y, z : reel. uzayda bir noktanın koord.'ları. P'yi

$$P' = Q P Q^{\dagger}$$

anlamında Q'larla dönüştürülür. (Benzerlik dönüşümü)

$$Q Q^{\dagger} = Q^{\dagger} Q = I \Rightarrow Q^{\dagger} = Q^{-1}$$

$\therefore$ $P^{\dagger} = P$ self-adjoint ya da hermitik.

* Trace P = iz $P = 0$

* Hem hermitikliğin ve hem de izinin 0 olma şartının benzerlik dönüşümü altında değişmediğini gösterelim. (üniter matrisle yapılıyor ise)

Not:

$A' = Q A Q^{-1}$ A hermitik ise A''de hermitikdir. iz $A' = 0$, det $A' = 1$

ispatı:

1°) $A^{\dagger} = A \Rightarrow (A')^{\dagger} = (Q A Q^{-1})^{\dagger} = (Q^{-1})^{\dagger} A^{\dagger} Q^{\dagger} = Q A^{\dagger} Q^{\dagger} = Q A Q^{\dagger}$
$= A'$

$$A'^{\dagger} = A'$$

2°) iz $A' = \sum_i (A')_{ii} = \sum_i (Q A Q^{-1})_{ii}$

$$= \sum_i \sum_k \sum_l Q_{ik} A_{kl} Q^{-1}_{li} = \sum_{kl} \left(\sum_i Q^{-1}_{li} Q_{ik}\right) A_{kl}$$

BS K

$$\mathrm{iz}\, A' = \sum_{kl} (Q^{-1}Q)_{lk} A_{kl} = \sum_{kl} \delta_{lk} A_{kl} = \sum_{k} A_{kk} = \mathrm{iz}\, A$$

3°) $|A'| = |Q||A||Q^{-1}| = |A||Q||Q^{-1}| = |A||QQ^{-1}| = |A|$

$\therefore$ Benzerlik dönüşümü altında P ile P''nün yapıları aynı kalır.

$$P' = \begin{pmatrix} z' & x'-iy' \\ x'+iy' & -z' \end{pmatrix}$$

$|P| = -z^2 - (x^2+y^2) = |P'| = -z'^2 - (x'^2+y'^2)$ Ortogonallik şartı.

$x^2+y^2+z^2 = x'^2+y'^2+z'^2$ $\vec{r}$ vektörünün boyu dönüşümler altında invaryant kalır.

$\therefore$ 2-boyutlu uzayda üniter matrislerle yapılan benzerlik dönüşümü 3-boyutlu reel uzaydaki dönmelere karşılık geliyor. Yani 3-boyutlu uzaydaki dönme matrislerinin yaptığını 2-boyutlu uzaydaki SU(2) dönme matrislerine yaptırabiliriz.

Fiziksel olarak bu 2-boyutlu dönme matrislerinin bileşenleri spinin dalga fonk.una karşı gelir. Spinin $\uparrow$ up ya da $\downarrow$ down olarak gözelmesi iki boyutludur.

3- boyutlu uzayda $\underset{\sim}{x}$ (sütun) matrisine dik dönüşüm uygulayalım.

$\underset{\sim}{X}' = A_1 \underset{\sim}{X}$: A_1 : 3 boyutlu uzayda 3×3 koord. dön. mat.

$P' = Q_1 P Q_1^{\dagger}$:

$$x' = A_1 x$$
$$x'' = A_2 x' = \underbrace{A_2 A_1}_{A} x$$
$$A = A_2 A_1$$

$$P' = Q_1 P Q_1^{\dagger}$$
$$P'' = Q_2 P' Q_2^{\dagger}$$
$$= Q_2 Q_1 P Q_1^{\dagger} Q_2^{\dagger}$$
$$= (Q_2 Q_1) P (Q_2 Q_1)^{\dagger}$$
$$= Q P Q^{\dagger}$$
$$Q = Q_2 Q_1$$

Gerçekten de 3-boyutlu reel uzayda ortogonal dönme matrisleri ile yapılan iş 2 boyutlu uzayda üniter matrislerle yapılan dönüşümlere karşılık geliyor. 3-boyutlu uzayda bir vektörün uzunluğunu invaryant bırakan dönüşümler 2-boyutlu uzayda üniter-ünimodüler dönüşümlere karşı gelir ki dolayısı ile bu iki grup tamamen ile eş yapılıdırlar, izomorfiktirler. $SO(3) \sim SU(2)$

* Şimdi 3 bağımsız değişken cinsinden grubu ifade edelim:

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$$

$$Q^{\dagger} = \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \gamma = -\beta^* \\ \delta = \alpha^* \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha^* & -\beta \\ \beta^* & \alpha \end{pmatrix}$$

BS K

$$X_+ = x + iy$$

$$X_- = x - iy$$ kısaltmalarını kullanalım.

$$P' = \begin{pmatrix} z' & x_-' \\ x_+' & -z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & x_- \\ x_+ & -z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\alpha\delta+\beta\gamma)z - \alpha\gamma x_- + \beta\delta x_+ & -2\alpha\beta z + \alpha^2 x_- - \beta^2 x_+ \\ 2\gamma\delta z - \gamma^2 x_- + \delta^2 x_+ & -(\alpha\delta+\beta\gamma)z + \alpha\gamma x_- - \beta\delta x_+ \end{pmatrix}$$

$$x_+' = 2\gamma\delta z - \gamma^2 x_- + \delta^2 x_+$$

$$x_-' = -2\alpha\beta z + \alpha^2 x_- - \beta^2 x_+$$

$$\left.\begin{aligned} z' &= (\alpha\delta+\beta\gamma)z - \alpha\gamma x_- + \beta\delta x_+ \\ -z' &= -(\alpha\delta+\beta\gamma)z + \alpha\gamma x_- - \beta\delta x_+ \end{aligned}\right\} \text{aynı.}$$

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z$$

$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z$$

$$z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z$$

$$z' = a_{33}z - \alpha\gamma(x-iy) + \beta\delta(x+iy)$$

$$= a_{33}z + (\underbrace{\beta\delta-\alpha\gamma}_{a_{31}})x + [\underbrace{i(\beta\delta+\alpha\gamma)}_{a_{32}}]y$$

$$a_{31} = \beta\delta - \alpha\gamma$$
$$a_{32} = i(\beta\delta+\alpha\gamma)$$
$$a_{33} = \alpha\delta + \beta\gamma$$

$$x' + iy' = 2\gamma\delta z - \gamma^2(x-iy) + \delta^2(x+iy)$$

$$+ \quad x' - iy' = -2\alpha\beta z + \alpha^2(x-iy) - \beta^2(x+iy)$$

$$2x' = 2(\gamma\delta - \alpha\beta)z + (-\gamma^2+\delta^2+\alpha^2-\beta^2)x + i(\gamma^2+\delta^2-\alpha^2-\beta^2)y$$

BS K

$$x' = (\gamma\delta - \alpha\beta)z + \frac{1}{2}(\alpha^2+\delta^2-\gamma^2-\beta^2)x + \frac{i}{2}(\gamma^2+\delta^2-\alpha^2-\beta^2)y$$

$$a_{11} = \frac{1}{2}(\alpha^2+\delta^2-\gamma^2-\beta^2) \quad a_{12} = \frac{i}{2}(\gamma^2+\delta^2-\alpha^2-\beta^2) \quad a_{13} = \gamma\delta - \beta\alpha$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2-\gamma^2+\delta^2-\beta^2) & \frac{i}{2}(\gamma^2-\alpha^2+\delta^2-\beta^2) & \gamma\delta-\alpha\beta \\ \frac{i}{2}(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2-\delta^2) & \frac{1}{2}(\alpha^2+\gamma^2+\beta^2+\delta^2) & -i(\alpha\beta+\gamma\delta) \\ \beta\delta-\alpha\gamma & i(\alpha\gamma+\beta\delta) & \alpha\delta+\beta\gamma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Kayley-Klein parametreleri Euler açıları cinsinden ifade edilebilir.

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= f(\phi,\theta,\psi) \\ \beta &= g(\phi,\theta,\psi) \\ \gamma &= h(\phi,\theta,\psi) \\ \delta &= l(\theta,\phi,\psi) \end{aligned}\right\}$$ bu zordur. Şu yolu izleyebiliriz.

*

z-ekseni etrafında ϕ açısı ile dönmeyi veren D_ϕ matrisine karşılık gelen Q üniter-ünimodüler matrisi bulalım.

$$D_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow Q = ?$$

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\phi + y\sin\phi \\ y' &= -x\sin\phi + y\cos\phi \\ z' &= z \end{aligned} \qquad P' = \begin{pmatrix} z' & x'_- \\ x'_+ & -z' \end{pmatrix}$$

$$x_+' = x' + iy' = x\cos\phi + y\sin\phi + i\left(-x\sin\phi + y\cos\phi\right)$$

$$= (x+iy)\cos\phi - i\,(x+iy)\sin\phi$$

$$= (x+iy)(\cos\phi - i\sin\phi)$$

$$= x_+ e^{-i\phi}$$

$$x_-' = x' - iy' = x\cos\phi + y\sin\phi - i\left(-x\sin\phi + y\cos\phi\right)$$

$$= (x-iy)(\cos\phi + i\sin\phi)$$

$$= x_- e^{i\phi}$$

$$z' = z$$

$$\left.\begin{aligned} x_+' &= 2\gamma\delta z - \gamma^2 x_- + \delta^2 x_+ = x_+ e^{-i\phi} \\ x_-' &= -2\alpha\beta z + \alpha^2 x_- - \beta^2 x_+ = x_- e^{i\phi} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \delta^2 &= e^{-i\phi} \\ \alpha^2 &= e^{i\phi} \end{aligned} \qquad \beta = \gamma = 0$$

$$\boxed{\delta = e^{-i\phi/2} \qquad \alpha = e^{i\phi/2}}$$

$$D_\phi \longleftrightarrow Q_\phi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}$$

$\therefore$ 3-boyutta z-ekseni etrafında ϕ kadarlık dönmeye karşı gelen D_ϕ matrisi 2-boyutlu uzayda $\phi/2$ kadar dönmeye karşı gelir.

BS K

Benzer yolla x-ekseni etrafında θ kadarlık dönmeyi temsil eden C_θ

$$C_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow Q_\theta = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Doğruluğunu şöyle kontrol edebiliriz.

$$Q_\theta P Q_\theta^{-1} = P'$$

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & x_- \\ x_+ & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z\cos\theta - y\sin\theta & x - i(y\cos\theta + z\sin\theta) \\ x + i(y\cos\theta + z\sin\theta) & -z\cos\theta + y\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z' & x_-' \\ x_+' & -z' \end{pmatrix}$$

$$x_-' = x - i(y\cos\theta + z\sin\theta)$$

$$x_+' = x + i(y\cos\theta + z\sin\theta)$$

$$2x' = 2x$$

$$\cancel{i}\, y' = \cancel{i}\,(y\cos\theta + z\sin\theta)$$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y\cos\theta + z\sin\theta \\ z' = -y\sin\theta + z\cos\theta \end{cases}$$

Son dönme yine z-ekseni etrafında φ kadarlıkdır.

BS K

$$Q_\psi = \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix}$$

$$D = B_\psi C_\theta D_\phi \qquad Q = Q_\psi Q_\theta Q_\phi$$

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-\psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i(\psi+\phi)/2}\cos\frac{\theta}{2} & i e^{i(\psi-\phi)/2}\sin\frac{\theta}{2} \\ i e^{-i(\psi-\phi)/2}\sin\frac{\theta}{2} & e^{-i(\psi+\phi)/2}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha = e^{i(\psi+\phi)/2}\cos\frac{\theta}{2} & \beta = i e^{i(\psi-\phi)/2}\sin\frac{\theta}{2} \\ \gamma = i e^{-i(\psi-\phi)/2}\sin\frac{\theta}{2} & \delta = e^{-i(\psi+\phi)/2}\cos\frac{\theta}{2} \end{cases}$$

Şimdi $\underline{P}$ matrisini şu özel matrisler cinsinden ifade edelim.

$$P = \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix} = x\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_x} + y\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_y} + z\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\sigma_z}$$

Pauli matrisleri.

$$P = x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z$$

Bu üçüne şimdi $\sigma_0 = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ilave edersek 2-boyutlu kompleks aşağıdaki her matrisi bu 4'ün cinsinden ifade edebiliriz.

Şimdi de Q ları bunlar cinsinden yazalım:

$$Q_\phi = \begin{pmatrix} \cos\frac{\phi}{2}+i\sin\frac{\phi}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\phi}{2}-i\sin\frac{\phi}{2} \end{pmatrix} = \cos\frac{\phi}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i\sin\frac{\phi}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbb{1}\cos\frac{\phi}{2} + i\sigma_z \sin\frac{\phi}{2}$$

$$Q_\theta = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \cos\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i\sin\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \sigma_0 \cos\frac{\theta}{2} + i\sigma_x \sin\frac{\theta}{2}$$

$$Q_\psi = \sigma_0 \cos\frac{\psi}{2} + i\sigma_z \sin\frac{\psi}{2}$$

3 boyutlu uzayda z-ekseni etrafında 2π'lik dönme $D_\phi = \mathbb{1}$ özdeşlik dönüşümüne karşı gelir. ($D_\phi = \mathbb{1}$, $\phi = 0$'da da.)

Oysa

$$Q_{(\phi=0)} = \mathbb{1}$$

$$Q(\phi=2\pi) = -\mathbb{1}.$$

$$\mathbb{D} \longrightarrow (Q, -Q)$$

Karşı gelme $1 \longrightarrow 2$ şeklinde.

Bu anlamda Q matrisi kendisine karşı gelen $\mathbb{D}$ matrisinin çift değerli farkı.

26

BS K

4.6. Katı Cisim Hareketinde Euler Teoremi: Katı cismin herhangi bir andaki yönelimini $\underset{\sim}{A}$ dik dönüşümü ile tasvir ediyoruz. Zaman ilerledikçe yönelim değişecek ve dönüşüm matrisi $\underset{\sim}{A}(t)$ şeklinde zamanın fonk.'u olacaktır. Cisim eksenlerini $t=0$ anında uzay eksenleri ile çakışacak şekilde seçersek, başlangıç olarak dönüşüm

$$\underset{\sim}{A}(0) = I$$

özdeşlik dönüşümü olacaktır. Fiziksel hareket sürekli olmak zorunda olduğundan $A(t)$ zamanın sürekli bir fonk.'u olmalıdır. Böylece dönüşüm özdeşlik dönüşümünden sürekli olarak gelişmelidir.

Euler Teoremi: Eğer katı cisim bir noktası sabit kalmak kaydı ile dönüyor ise bu bir eksen etrafında dönmedir, yani bir noktası sabit kalmak kaydı ile bir katı cismin en genel yerdeğiştirmesi bir eksen etrafında dönmedir. Dolayısı ile $\underset{\sim}{A}$ matrisinin ortaya koyduğu işlem bir dönme olmalıdır. Bir dönmenin karakteristiği dönme ekseni adını alan bir doğrultunun bu işlemden etkilenmeden kalması demektir. Yani dönme ekseni boyunca uzanan vektörler invaryant kalır. Bu durumda dönme ekseni boyunca uzanan her vektörün hem başlangıç ve hem de son eksenlerdeki bileşenleri aynı olmalıdır. Böylece eğer iki sistemde de koordinatları birbirinin eşi olan bir $\vec{R}$ vektörünün var olduğu ispat edilirse Euler Teoremi ispatlanmış olur.

$$\vec{R}' = A\vec{R} = \vec{R}$$

Bu denklem

$$A\underset{\sim}{R} = \lambda \underset{\sim}{R} \qquad \lambda \text{ kompleks de olabilecek olan bir sbt.}$$

özdeğer denkleminin özel bir durumudur.

O zaman Euler teoremi yeniden şu şekilde ifade edilebilir:
" Bir noktası sbt. bir cismin (kat) fiziksel hareketini belirleyen gerçel ortogonal matrisinin daima +1'e eşit bir özdeğeri vardır".

$$(A - \lambda I)R = 0$$

$$1^\circ)\quad \begin{cases} (a_{11}-\lambda)X + a_{12}Y + a_{13}Z = 0 \\ a_{21}X + (a_{22}-\lambda)Y + a_{23}Z = 0 \\ a_{31}X + a_{32}Y + (a_{33}-\lambda)Z = 0 \end{cases}$$

$\vec{R}$ özvektörünün $X\,Y\,Z$ bileşenleri için homojen 3 denk. bulduk. Hom. olduklarından çözümü olması için katsayılar determinant'ının 0 olması gerekir.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

"karakteristik veya seküler" denk. adını alır.

Determinant : $\quad a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0 \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

bu kökler karşı gelen 3 özvektör bulunacak. $\vec{R} = \hat{R}(x_1, x_2, x_3) = R(x, y, z)$

x_{11}, x_{21}, x_{31} $\quad\lambda_1$'e karşı gelen özvektörün bileşenleri.
x_{12}, x_{22}, x_{32} $\quad\lambda_2$'ye " " " " .
x_{13}, x_{23}, x_{33} $\quad\lambda_3$'e " " " " .

$1^\circ) \longrightarrow$ kısa formda : $\displaystyle\sum_j a_{ij}\, x_{jk} = \lambda_k x_{ik}$

$$\Downarrow \qquad = \sum_j x_{ij}\,\lambda_j\,\delta_{jk}$$

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{X}\,\underset{\sim}{\lambda}$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{X} = \left(\overset{\lambda_1}{\downarrow}\!\!\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \overset{\lambda_2}{\downarrow}\!\!\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \overset{\lambda_3}{\downarrow}\!\!\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \right)$$

BS K

$$AX = X\lambda \Rightarrow \underbrace{X^{-1}AX}_{\text{benzerlik dön. formunda.}} = \lambda$$

X^{-1}'e Υ dersek. tam olur.

$$\Upsilon A \Upsilon^{-1} = \lambda$$

∴ A operatörünün özdeğer denklemini çözmekle A'yı köşegenleştirmiş oluyoruz. Köşegen matrisin elemanları aranan özdeğerlerdir.

Euler teoreminin ispatından önce özdeğerlerin doğası üzerinde basit yardımcı teoremleri çıkaralım.

1°) A'nın bütün özdeğerleri birim büyüklüğe sahiptir. Bu A'nın ortogonalliğinden çıkar. Bununla birlikte A'nın tüm elemanları reel'di ama seküler denk.'in kompleks köklere sahip olabileceği olasılığı dikkate alınmalıdır. Bu gibi bir durumda karşı gelen özvektörler kompleks bir uzay ile ilişkilidirler ve reel, fiziksel uzaya değildirler. Kompleks bir vektörün büyüklüğü

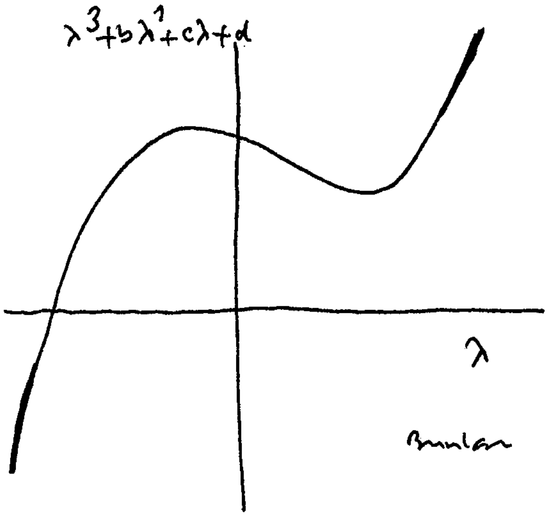
$$|\vec{R}|^2 = \vec{R}^* \cdot \vec{R} = |X|^2 + |Y|^2 + |Z|^2$$

Ortogonallik şartı dönüşümün $\vec{R}$'nin büyüklüğünü değişmez bıraktığını gerektirir:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{R}'^* \cdot \vec{R}' = \vec{R}^* \cdot \vec{R} \\ \vec{R} \text{ bir özvektör ise} \\ \vec{R}^{*\prime} \cdot \vec{R}' = \lambda^* \lambda \vec{R}^* \cdot \vec{R} \end{array}\right\} |\lambda|^2 = 1 \Rightarrow \lambda^* \lambda = \mathbb{1}.$$

BS K

2°) 3×3'lük reel bir ortogonal matrisin en az bir reel özdeğeri vardır.
Sekuler denk. λ'nın kübik denklemidir.



* A reel olduğundan katsayılar reel olacaktır.
Büyük negatif λ'lar için
$$\lambda^3+b\lambda^2+c\lambda+d=0 \text{ 'ın}$$
LHS'ı negatif ve büyük olacak. Aynı pozitif ve büyük λ'lar için pozitif ve büyük olacağı gibi.
Bunları birleştirdiğimizde ekseni en az bir yerde keser.

Lemma 1 ile reel kök $\lambda = \pm 1$ olmalıdır.

λ matrisinin det.'ı $\quad \det \lambda = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$
Benzerlik dön.'ü altında bir matrisin det.'ı değişmediğine göre

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

3°) A dik bir matris olduğundan $\det A = +1$

$$\Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = +1$$

4°) Bir özdeğerin kompleks eşleniği de bir özdeğerdir.

$$\lambda^3+b\lambda^2+c\lambda+d=0 \qquad \lambda^{*3}+b\lambda^{*2}+c\lambda^{*}+d=0$$

λ özdeğer ise λ^*'da özdeğerdir.
Det.'ı +1 olan reel ve dik matrislerin özdeğerlerini ele alalım.

* Bütün kökler reel ve birbirinden farklı olamaz.

$$|\lambda| = +1 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = +1 \\ \lambda_2 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_3 = -1 \text{ olmalı ama } \lambda_2 = \lambda_3$$

** Köklerin 3'ü de reel ve bunlardan ikisi eşitse 3. mutlaka +1 olmalı.

*** Bir tanesi reel 2 sinin kompleks olması halinde, kompleks olanlar birbirlerinin eşleniği olmalıdırlar ki birbirleri ile çarpıldıklarında +1 özdeğerini versinler. Böylece determinant'ın değerini korumak için tek kalan gerçel kök +1 olmalıdır. Yani bu fiziksel dönüşümün sadece bir ve +1 özdeğeri vardır. Bu da Euler teoreminin ifadesidir.

Dönme ekseninin doğrultman kosinüsleri özdeğer denkleminde $\lambda = 1$ koyarak ve X, Y, Z için çözerek elde edilir. Şimdi bir eksen etrafında dönme ile ilgili açıyı nasıl bulacağımıza bakalım.

A matrisi daima uygun bir benzerlik dönüşümü ile z ekseni etrafında dönme matrisi haline getirilebilir.

$$A' = BAB^{-1} \quad : \text{ z etrafında } \Phi \text{ kadarlık dönme olsun.}$$

$$A' = \begin{pmatrix} \cos\Phi & \sin\Phi & 0 \\ -\sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} A' = 2\cos\Phi + 1 = \sum_i a_{ii}$$

a_{ii}'leri Euler açıları cinsinden yazdığımıza göre Φ'de Euler açıları cinsinden yazılabilir.

BS K

32

BS K

4.7. Sonsuz Küçük Dönmeler: Sonlu dönmeyi bir vektörle gösterebilir miyiz? Dönme eksenini bir doğultu, dönme açısını da şiddet olarak atfedebiliriz. Ama böyle bir karşılığın olamayacağını şu şekilde gösteririz:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\sim}{A} \longrightarrow \vec{A} \\ \underset{\sim}{B} \longrightarrow \vec{B} \end{array}\right\}$$ olsun.

Bunların vektörel olarak nitelendirilebilmeleri için;

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$ olması gerekir.

* iki dönmenin toplamının iki matrisin $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}$ çarpımına karşılık geldiğini görmüştük. Bununla birlikte $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B} \neq \underset{\sim}{B}\underset{\sim}{A}$ idi. Dolayısı ile $\vec{A}$, $\vec{B}$ vektörleri toplamada yerdeğiştiremezler ve vektörel olarak kabul edilemezler.

Sonsuz küçük dönmeleri ise bir vektörle temsil edebiliriz. Sonsuz küçük bir dönme de koordinat eksenlerinin bir dik dönüşümüdür. Bu dönmede bir vektörün bileşenleri her iki eksen takımında da yaklaşık olarak aynıdır. Değişiklik sonsuz küçüktür. Bu durumda $\vec{r}$ vektörünün x_1' bileşeni aynı olacak ve fark son derece küçük olacaktır. $\vec{r} \rightarrow \vec{r}'$

$$x_1' = x_1 + \epsilon_{11}x_1 + \epsilon_{12}x_2 + \epsilon_{13}x_3$$

Genel olarak;

$$x_i' = x_i + \epsilon_{i1}x_1 + \epsilon_{i2}x_2 + \epsilon_{i3}x_3$$

$$= x_i + \sum_j \epsilon_{ij}x_j$$

$$= \sum_j (\delta_{ij} + \epsilon_{ij})x_j$$

Matris formu: $\underset{\sim}{x}' = (\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{\epsilon})\underset{\sim}{x}$ $\qquad x' = Ax$ idi

Sons. küç. Dön: $\quad A = I + \epsilon$

BS K

Ardarda iki sonsuz küçük dönme alalım.

$$A = I + \varepsilon_1$$

$$B = I + \varepsilon_2$$

$$\left.\begin{aligned} AB &= (I+\varepsilon_1)(I+\varepsilon_2) = I+\varepsilon_1+\varepsilon_2 \\ BA &= (I+\varepsilon_2)(I+\varepsilon_1) = I+\varepsilon_2+\varepsilon_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB = BA$$

$\therefore$ $\vec{A}+\vec{B} = \vec{B}+\vec{A}$ şeklinde yazılabilir. Bu nedenle her sonsuz küçük dönme-ye bir vektör karşı getirebiliriz.

* Sons. küç. Dön (SKD) için ters matris.

$$A = I + \varepsilon \Rightarrow A^{-1} = I - \varepsilon$$

ispat için $\quad AA^{-1} = (I+\varepsilon)(I-\varepsilon) = I - \cancel{\varepsilon} + \cancel{\varepsilon} - \cancel{\varepsilon^2} = I$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Transpoz:} \quad A^T = I + \varepsilon^T \\ &\text{Dik dönüşümler için} \quad A^T = A^{-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varepsilon^T = -\varepsilon$$

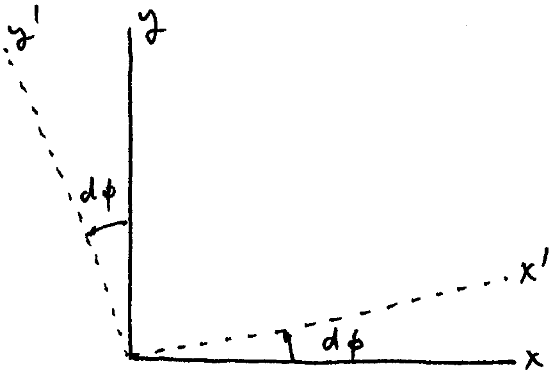
* Bir matrisin transpozu eksiğine eşit ise o matris "antisimetrik" kendisine eşit ise "simetrik" denir. Bir antisimetrik matrisin köşegen elemanları sıfır olmak zorundadır.

$$\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji} \qquad \varepsilon_{ii} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ Üç tane bağımsız parametre ile temsil edebiliriz.

BS K

Şimdi özel bir SKD alarak bu kavramı açığa kavuşturalım: z-ekseni etrafı. $d\phi$ kadar SKD dönüşümü yapalım.



$$\underset{\sim}{A} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sonlu için.}$$

$\phi \to d\phi$ koyar ve sadece 1. mertebe terimleri alırsa

$$\to \underset{\sim}{A} = \begin{pmatrix} 1 & d\phi & 0 \\ -d\phi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + \varepsilon \qquad \varepsilon = d\phi \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Böylece en genel $\underset{\sim}{\varepsilon}$ matrisi

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & d\Omega_3 & -d\Omega_2 \\ -d\Omega_3 & 0 & d\Omega_1 \\ d\Omega_2 & -d\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$d\Omega_1, d\Omega_2, d\Omega_3$: 3 adet keyfi bağımsız parametre. Bunların aynı zamanda bir vektörün bileşenlerini meydana getirdiklerini gösterebiliriz. Bir vektörün SKD etkisinde değişme,

$$\underset{\sim}{x}' - \underset{\sim}{x} = d\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\varepsilon}\,\underset{\sim}{x} \qquad d\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d\Omega_3 & -d\Omega_2 \\ -d\Omega_3 & 0 & d\Omega_1 \\ d\Omega_2 & -d\Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2\, d\Omega_3 - x_3\, d\Omega_2 \\ x_3\, d\Omega_1 - x_1\, d\Omega_3 \\ x_1\, d\Omega_2 - x_2\, d\Omega_1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} dx_1 &= x_2\, d\Omega_3 - x_3\, d\Omega_2 \\ dx_2 &= x_3\, d\Omega_1 - x_1\, d\Omega_3 \\ dx_3 &= x_1\, d\Omega_2 - x_2\, d\Omega_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{gathered} d\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\varepsilon}\,\underset{\sim}{x} \\ \downarrow \\ \boxed{d\vec{r} = \vec{r} \times d\vec{\Omega}} \end{gathered}$$

BS K

O halde sonsuz küçük dönüşümü $d\vec{\Omega}$ vektörü ile temsil edebiliriz. Bi. vektörün gerçek bir vektör olup olmadığını anlamanın en iyi yolu onun ortogonal bir dönüşüm altında uygun dönüşümle dönüşüp dönüşmediğine bakmaktır.

Eğer $d\vec{\Omega}$ gerçek bir vektör ise bileşenleri bir $\underset{\sim}{B}$ ortogonal matrisi altında;

$$d\Omega_i' = \sum_l b_{il}\, d\Omega_l$$

denk. lerine uygun olarak dönüşür.

$$d\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\varepsilon}\,\underset{\sim}{x} \xrightarrow{\underset{\sim}{B}\ \text{Altında}} d\underset{\sim}{x}' = \underset{\sim}{\varepsilon}'\underset{\sim}{x}' \text{ olur.}$$

$$B\,dx = dx' = B\varepsilon x = \underbrace{B\varepsilon B^{-1}}\underbrace{Bx}_{x'} = \varepsilon' x'$$

$$\varepsilon' = B\varepsilon B^{-1} \quad \text{(antisimetri özelliği korunur.)}$$

$$\varepsilon_{ij}' = -\varepsilon_{ji}' \Rightarrow \text{antisimetriktir.}$$

İspat:

$B^{-1} = B^T$

$$\varepsilon_{ij}' = (B\varepsilon B^{-1})_{ij} = \sum_{kl} B_{ik}\varepsilon_{kl}B_{lj}^T$$

$-\varepsilon_{kl}$

$$= -\sum_{kl} B_{ik}\varepsilon_{lk}B_{jl}$$

$$= -\sum_{kl} B_{jl}\varepsilon_{lk}B_{ik}$$

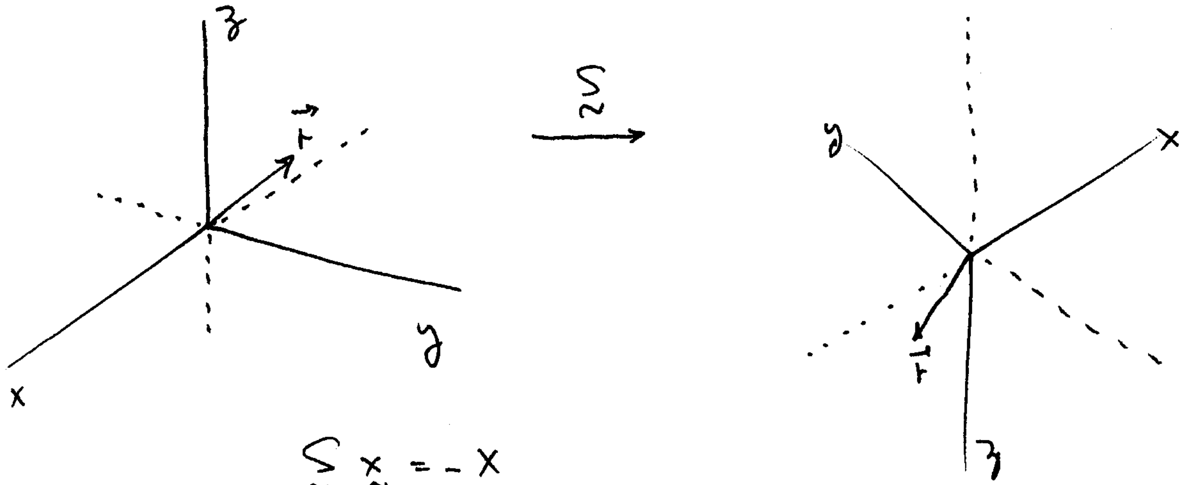
$$= -\sum_{kl} B_{jl}\varepsilon_{lk}B_{ki}^T$$

$$= -(B\varepsilon B^T)_{ji} = -\varepsilon_{ji}'$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon}' = \begin{pmatrix} 0 & d\Omega_3' & -d\Omega_2' \\ -d\Omega_3' & 0 & d\Omega_1' \\ d\Omega_2' & -d\Omega_1' & 0 \end{pmatrix} \text{ olur.} \Rightarrow \begin{array}{l} d\underset{\sim}{x}' = \underset{\sim}{\varepsilon}' x' \\ d\vec{r}' = \vec{r}' \times d\vec{\Omega}' \end{array}$$

BS K

$d\vec{r} = \vec{r} \times d\vec{\Omega}$ 'nın bir $\underset{\sim}{S}$ yansıması altında davranışına bakalım.



$$\underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{x} = -\underset{\sim}{X}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

Böylece gerçek vektör dönmeler altında $x_i' = \sum_j A_{ij} x_j$ şeklinde dönüşür iken yansımalar altında bileşenleri işaret değiştirir

$$\underset{\text{vekt.}}{d\vec{r}} = \underset{\text{vek.}}{\vec{r}} \times d\vec{\Omega}$$

↳ psedovektör olmalı.

Dolayısı ile $d\vec{\Omega}$ vektörünün bir $\underset{\sim}{B}$ dik dönüşümü altındaki dönüşümü:

$$d\Omega_i' = |B| \sum_j b_{ij}\, d\Omega_j \qquad |B| = \det B$$

<u>İspat:</u>

$$d\Omega_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{3} \delta_{ijk}\, \varepsilon_{jk}$$

↳ Levi-Civita sembolü.

$$\delta_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{indislerden herhangi ikisi eşit ise} \\ +1 & ijk\ 123\text{'ün çift permütasyonu} \\ -1 & \text{" } 123 \text{ " tek "} \end{cases}$$

BS K

$i=1 \Rightarrow \quad d\Omega_1 = \frac{1}{2} \sum_{j}\sum_{k=1}^{3} \delta_{1jk}\,\varepsilon_{jk}$

$j,k = 1$ ve $j=k$ olamaz.

$$d\Omega_1 = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\delta_{123}}_{1}\varepsilon_{23} + \underbrace{\delta_{132}}_{-1}\varepsilon_{32} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{23} + \varepsilon_{23} \right) = \varepsilon_{23}$$

Benzer şekilde

$$d\Omega_i' = \frac{1}{2} \sum_{jk} \delta_{ijk}\,\varepsilon_{jk}'$$

$$\varepsilon_{jk}' = (B\varepsilon B^{-1})_{jk} = \sum_{mn} B_{jm}\,\varepsilon_{mn}\,B_{kn}$$

$$d\Omega_i' = \frac{1}{2}\sum_{jk}\delta_{ijk}\sum_{mn} B_{jm}\,\varepsilon_{mn}\,B_{kn}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\substack{jk\\mn}} \delta_{ijk}\,B_{jm}\,B_{kn}\,\varepsilon_{mn} \;;\quad \varepsilon_{mn} = \sum_{l}\delta_{lmn}\,d\Omega_l$$

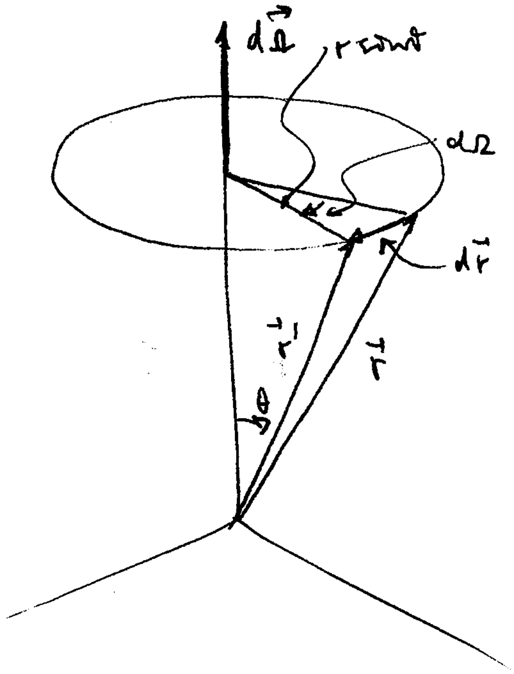
$$= \frac{1}{2}\sum_{\substack{jk\\mn}} \delta_{ijk}\,B_{jm}\,B_{kn}\sum_{l}\delta_{lmn}\,d\Omega_l$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\substack{jkl\\mn}} \delta_{ijk}\,\delta_{lmn}\,B_{jm}\,B_{kn}\,d\Omega_l$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sum_{\substack{jk\\mn}} \delta_{ijk}\,\delta_{lm}\,B_{jm}\,B_{kn} = b_{il}\,|B|$$

$$d\Omega_i' = |B|\sum_{l} b_{il}\,d\Omega_l$$

BS K

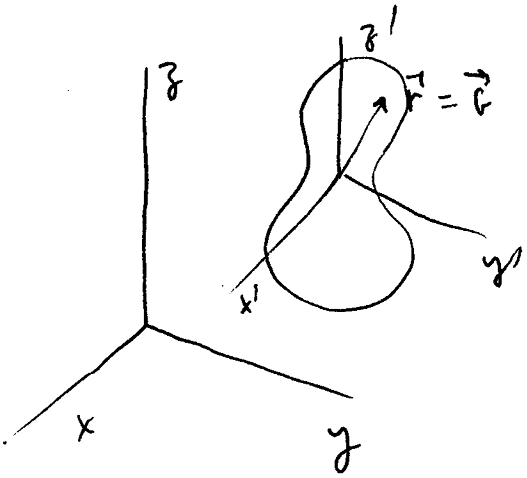


$$d\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$$

$$\left.\begin{aligned} |d\vec{r}| &= r\sin\theta\, d\Omega \\ d\vec{r} &= \vec{r} \times d\vec{\Omega} \end{aligned}\right\} \text{formülle uyuşur.}$$

4.8. Bir vektörün değişme hızı: Sonsuz küçük dönme kavramı rijit bir cismin zaman içinde hareketini belirlemek için kuvvetli bir araçtır.

Herhangi bir $\vec{G}$ vektörü alalım; konum, açısal mom. veya başka bir şey olabilir. $\vec{G}$ vektörü cisim hareket ettikçe değişecektir. (zamanla)



$\vec{r} = \vec{G}$ olursa cisim hareket ettikçe cisimdeki gözlemciye göre değişmeyecek ama uzay eksen takımına göre değişecek.

Bir dt zamanında genel bir $\vec{G}$ vektörünün bileşenlerinin cisim eksenlerine göre değişimi, uzay eksenlerine karşı gelen değişiminden, sadece cisim eksenlerinin dönmesinin etkisi ile farklıdır.

$$(d\vec{G})_{cisim} = (d\vec{G})_{uzay} + (d\vec{G})_{dönme}$$

$$(d\vec{G})_{dönme} = \vec{G} \times d\vec{\Omega} \quad (SKD)$$

$$(d\vec{G})_{uzay} = (d\vec{G})_{cisim} + d\vec{\Omega}\times\vec{G}$$

$\vec{G}$ vektörünün <u>birim zamandaki değişimi</u> yukarıdaki ifadeyi dt'ye bölerek elde edilir:

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{uzay} = \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{cis.} + \vec{\omega}\times\vec{G} \quad , \quad \vec{\omega} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \text{ açısal hız.}$$

İki koord. sist.i arasındaki zaman türevleri dön.

* Cisim dönmesinin ani açısal artımı
$\vec{\omega}$ t anındaki ani dönmenin ekseni boyunca uzanır.
Euler açıları ve onun türevleri cinsinden ifade edilebilir.

$$\boxed{\left(\frac{d}{dt}\right)_{uz.} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{cis} + \vec{\omega}\times}$$

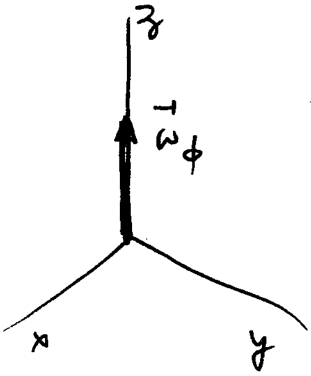
$$\vec{\omega} \longrightarrow \begin{cases} z \text{ etrafında } \omega_\phi \text{ açılı sert dönme} \\ \xi \quad '' \quad \omega_\theta \quad '' \quad '' \\ z' \quad '' \quad \omega_\psi \quad '' \quad '' \end{cases}$$

$$xyz \xrightarrow[\phi]{D} \underset{(z)}{\xi'\eta'\zeta'} \xrightarrow[\theta]{C} \underset{(\xi')}{\xi''\eta''\zeta''} \xrightarrow[\psi]{B} \underset{(\zeta'')}{x'y'z'}$$

A, B, C, D sonsuz küçük dönmeler. $\Rightarrow$ $A = BCD$

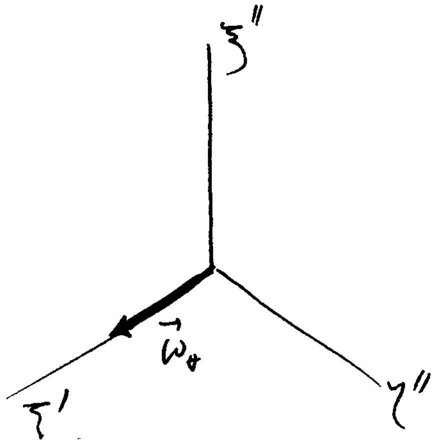
$$\vec{\omega} = \omega_\phi + \omega_\theta + \omega_\psi$$

$\vec{\omega}$'nın üslü sistemde bileşenlerini bulmak istiyoruz.



$$\left.\begin{aligned}(\omega_\phi)_z &= \dot{\phi}\\ (\omega_\phi)_y &= (\omega_\phi)_x = 0\end{aligned}\right\}\ \omega_\phi' = A\omega_\phi$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}(\omega_\phi)_x'\\(\omega_\phi)_y'\\(\omega_\phi)_z\end{pmatrix} = \underset{\sim}{A}(\phi,\theta,\psi)\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\phi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi\\-\dot{\phi}\sin\theta\cos\psi\\\dot{\phi}\cos\theta\end{pmatrix}$$



$$\vec{\omega}_\theta = \begin{pmatrix}\dot{\theta}\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$B\vec{\omega}_\theta = \vec{\omega}_\theta' = \begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\-\sin\psi & \cos\psi & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\theta}\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\dot{\theta}\cos\psi\\-\dot{\theta}\sin\psi\\0\end{pmatrix}$$

z' ekseni boyunca uzanan $\vec{\omega}_\psi$ 'nin bileşenleri için ayrıca bir dönüşüm gerek

$$\left\{\begin{aligned}\omega_x' &= \dot{\phi}\sin\theta\sin\overset{\psi}{\cancel{\phi}} + \dot{\theta}\cos\psi\\ \omega_y' &= -\dot{\phi}\sin\theta\cos\overset{\psi}{\cancel{\phi}} - \dot{\theta}\sin\psi\\ \omega_z' &= \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}\end{aligned}\right.$$

BS K

BS K

4.9. Coriolis Kuvveti:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{uzay} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{cisim} + \vec{\omega}\times$$

denklemi katı bir cismin hareketinin dinamik denklemlerinin üzerinde kurulduğu temel kinematik kanundur. Fakat geçerliliği sadece katı cisim hareketi ile sınırlı değildir. Bu kanun bir maddesel noktanın veya maddesel nokta sisteminin dönen koord. sist.'ine göre hareketini incelemek istediğimiz zaman kullanılabilir.

Güneş sistemini eylemsiz sistem olarak ele alırsak, dünya güneş etrafında ve kendi etrafında dönmektedir. Yeryüzünde yapılan ölçümler genellikle dünya üzerinde tespit edilen bir koord. sist. ine göre yapılır. Bu nedenle bu sist. güneş sistemine göre sbt bir $\vec{\omega}$ açısal hızı ile düzgün olarak döner. Yukarıdaki denk.'i, yeryüzündeki sist.de hareket denk.nin nasıl değiştirileceğini belirlemekte kullanalım.

İlk adım; bu denk.i yeryüzündeki sist.'in merkezinden verilen maddesel noktaya uzanan $\vec{r}$ yer vektörüne uygulayalım:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_u = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_d + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{V}_u = \vec{V}_d + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

sırasıyla parçacığın uzaya ve dönen eksenlere göre hızı.

İkinci adım; $\vec{V}_u$'nun birim zamandaki değişimine bakalım:

$$\left(\frac{d\vec{V}_u}{dt}\right)_u = \left(\frac{dV_u}{dt}\right)_d + \vec{\omega}\times\vec{V}_u$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\left(\vec{V}_d + \vec{\omega}\times\vec{r}\right)\right)_d + \vec{\omega}\times\vec{V}_u$$

$$= \left(\frac{d\vec{V}_d}{dt}\right)_d + \left(\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r})\right)_d + \vec{\omega}\times\left(\vec{V}_d\times\vec{\omega}\times\vec{r}\right)$$

BS K

$$\vec{a}_u = \vec{a}_d + \left(\frac{d}{dt}(\vec{w}\times\vec{r})\right)_d + \vec{w}\times\vec{v}_d + \vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{r})$$

$$= \vec{a}_d + \vec{w}\times\vec{v}_d + \vec{w}\times\vec{v}_d + \vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{r})$$

$$= \vec{a}_d + 2\vec{w}\times\vec{v}_d + \vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{r})$$

$$\vec{F} = m\vec{a}_u$$

$$\therefore \boxed{\vec{F} = m\vec{a}_d + 2m\vec{w}\times\vec{v}_d + m\vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{r})}$$

$m\vec{a}_d$: dönen sist. deki etkin kuvvet. $:= \vec{F}_{et}$

$$\vec{F}_{et} = \vec{F} - 2m\vec{w}\times\vec{v}_d - \underbrace{m\vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{r})}$$

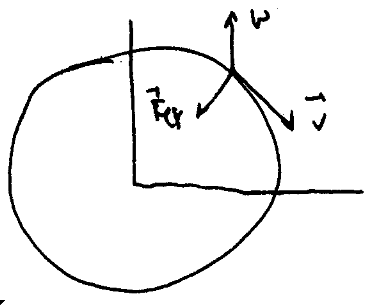
$|\ \ | = mw^2 r \sin\theta$ merkezkaç kuvvet en büyük değeri mw^2r 'dir

Eğer maddesel nokta hareketli sist. içinde hareketsiz ise yani hareketli eksenlere göre hareket etmiyor ise merkezkaç kuvvet etkin kuvvetteki tek ek terimdir. Hareket ediyor ise ortadaki terim çıkar. Dünya Kuzey kutbu etrafında saat ibrelerinin zıttı yönde

$$w = \frac{2\pi}{24\times 3600} = 7.29\times 10^{-5}\ s^{-1}$$ açısal hızı ile döner.

$\vec{r}$ dünyanın yarıçapı olmak üzere en büyük merkezcil ivme $w^2 r = 3.38\ cm/s^2 = \%0.3g$
Hareket eden maddesel nokta üzerinde Coriolis kuvveti hem w'ya ve hem de $\vec{v}$'ye diktir.

Örneğin bir nehir Kuzey'den Güneye doğru bir meridyen boyunca akıyor ise su kütleleri sağa doğru akacaktır.



BS K

4.1.°) Matris çarpımının ortaklık (asosyatiflik) özelliğini sağladığını gösteriniz. İki ortogonal matrisin çarpımının da ortogonal olduğunu ispat ediniz.

a)
$$(AB)C = A(BC)$$

$$
\begin{aligned}
[(AB)C]_{ij} &= \sum_k (AB)_{ik} C_{kj} \\
&= \sum_{kl} A_{il} B_{lk} C_{kj} \\
&= \sum_{kl} A_{il} (B_{lk} C_{kj}) = \sum_l A_{il} (BC)_{lj} \\
&= [A(BC)]_{ij}
\end{aligned}
$$

b) A ve B iki ortogonal matris olsun.

$$A^T = A^{-1} \quad , B^T = B^{-1}$$

$$B^T A^T = B^{-1} A^{-1} \iff (AB)^T = (AB)^{-1}$$

AB de ortogonal bir matristir.

BS K

4.2.°) Transpoze ve eş matrislerin aşağıdaki özelliklerini ispat ediniz.

$$\widetilde{AB} = \tilde{B}\tilde{A} \qquad ; \qquad (AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger}$$

a)

$$(AB)^T_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_k A_{jk}B_{ki} = \sum_k A^T_{kj}B^T_{ik} = \sum_k B^T_{ik}A^T_{kj}$$

$$= (B^T A^T)_{ij}$$

b) $(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger}$.

$$(AB)^{\dagger}_{ij} = (AB)^{T*}_{ij} = (B^T A^T)^*_{ij} = (B^{\dagger}A^{\dagger})_{ij}$$

4.3.°) Bir matrisin izinin herhangi bir benzerlik dönüşümünde invaryant kaldığını gösteriniz. Ayrıca bir matrisin antisimetri özelliğinin ortogonal bir benzerlik dönüşümü altında korunduğunu; buna karşılık Hermite özelliğinin ancak birimsel benzerlik dönüşümü altında invaryant kaldığını gösteriniz.

a.) $A' = BAB^{-1}$

$$\mathrm{Tr}\, A' = (BAB^{-1})_{ii} = \sum_{jk} B_{ij}A_{jk}B^{-1}_{ki} = \sum_{jk} \underbrace{B_{ij}B^{-1}_{ki}}_{\delta_{jk}} A_{jk}$$

$$= \sum_k A_{kk} = \mathrm{Tr}\, A.$$

Yapılan.

b.) $\epsilon'_{ij} = (B\epsilon B^{-1})_{ij}$

$$= \sum_{kl} B_{ik}\,\epsilon_{kl}\,B^{-1}_{lj} = \qquad B^{-1} = B^{T} \text{ ortogonal.}$$

$$= \sum_{kl} B_{ik}\,\epsilon_{kl}\,B^{T}_{lj} = \sum_{kl} B_{ik}\,\epsilon_{kl}\,B_{jl}$$

$$= -\sum_{kl} B_{ik}\,\epsilon_{lk}\,B_{jl} = -\sum_{kl} (B_{jl}\,\epsilon_{lk})\,B_{ik}$$

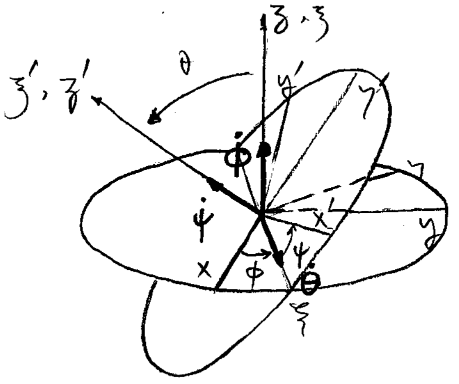
$$= \sum_{k} (B\epsilon)_{jk}\,B_{ik} = \sum_{k} (B\epsilon)_{jk}\,B^{T}_{ki}$$

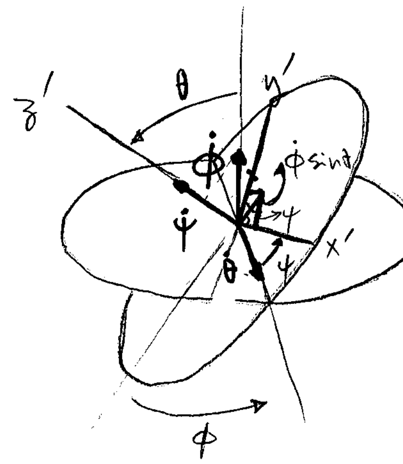
$$= -\,(B\epsilon B^{T})_{ji} = -\,(B\epsilon B^{-1})_{ji} = -\,\epsilon'_{ji} \quad \text{Zapisldn.}$$

(c.) ~~[illegible]~~ Zapelon.

BS K

4.5.°) Uzaysal eksen takımı boyunca açısal hız bileşenlerinin Euler açıları cinsinden ifadelerini bulunuz.





$$\begin{cases} \dot{\theta}'_1 = \dot{\theta}\cos\psi \\ \dot{\theta}'_2 = -\dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\theta}'_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\phi}'_1 = \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi \\ \dot{\phi}'_2 = \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi \\ \dot{\phi}'_3 = \dot{\phi}\cos\theta \end{cases}$$

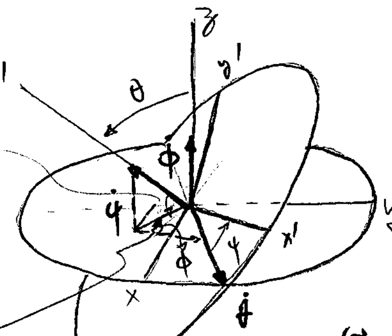
$$\dot{\psi}'_1 = 0, \quad \dot{\psi}'_2 = 0, \quad \dot{\psi}'_3 = \dot{\psi}$$

$$\omega_{x'} = \dot{\theta}'_1 + \dot{\phi}'_1 + \cancel{\dot{\psi}'_1}$$

$$\omega_{x'} = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi \quad \omega_{y'} = -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi \quad \omega_{z'} = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi}'_1 \\ \dot{\phi}'_2 \\ \dot{\phi}'_3 \end{pmatrix} = \underset{\sim}{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi}\sin\psi\sin\theta \\ \dot{\phi}\cos\psi\sin\theta \\ \dot{\phi}\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \dot{\theta}'_1 \\ \dot{\theta}'_2 \\ \dot{\theta}'_3 \end{pmatrix} = \underset{\sim}{B} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\psi \\ -\dot{\theta}\sin\psi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\frac{\pi}{2} - \theta$



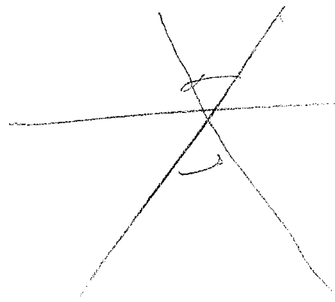
$\dot{\psi}\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$
$= \dot{\psi}\sin\theta$

$\longrightarrow \dot{\phi}_1 = 0 = \dot{\phi}_2 \;;\; \dot{\phi}_3 = \dot{\phi}$

$\longrightarrow \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\phi \quad \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}\sin\phi, \; \dot{\theta}_3 = 0$

$\longrightarrow \dot{\psi}_1 = \dot{\psi}\sin\theta\sin\phi \quad \dot{\psi}_2 = -\dot{\psi}\sin\theta\cos\phi \quad \dot{\psi}_3 = \dot{\psi}\cos\theta$

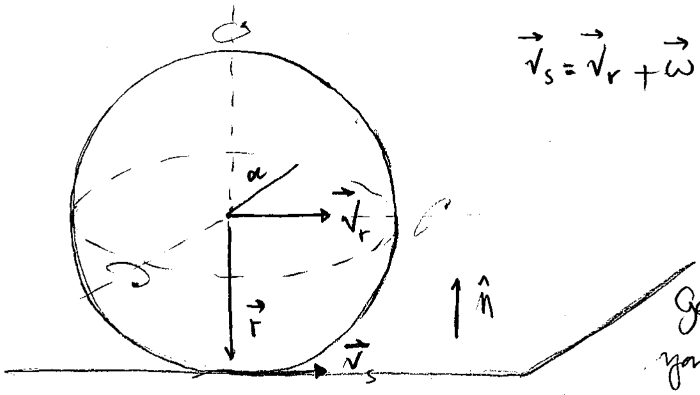
$$\omega_x = \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\phi$$
$$\omega_y = \dot{\theta}\sin\phi + \dot{\psi}\sin\theta\cos\phi$$
$$\omega_z = \dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta$$



$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} = \underset{\sim}{B}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

BS K

4.6.) Bir kürenin düzlemsel bir yüzey üzerinde "yuvarlanma" bağını Euler açıları cinsinden ifade ediniz. Şartların integre edilemeyeceğini ve bu nedenle bağın holonom olmadığını gösteriniz.



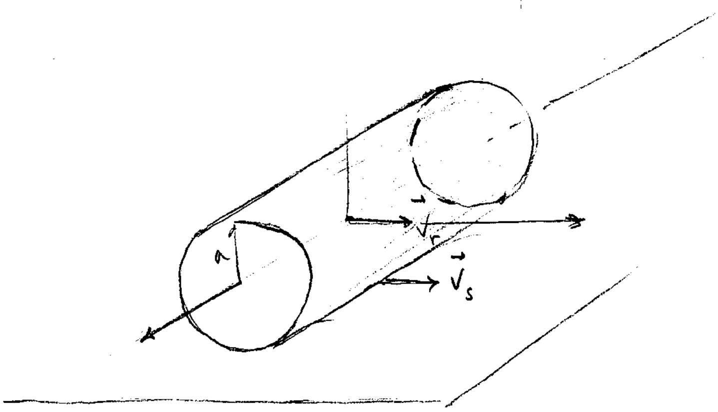
$$\vec{v}_s = \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \vec{r} = -a\hat{n}$$

$$\vec{v}_r = \frac{d\vec{R}}{dt}$$

Gerekli şart kontakta olan noktanın kaymaması yani $\vec{v}_s = 0$

$\Rightarrow \quad \vec{v}_r - a\vec{\omega} \times \hat{n} = 0 \qquad \vec{v}_r$: tam zaman türevi ama $\vec{\omega}$ değil $\therefore$ integre edilem

Ama bir silindir için durum farklıdır!



$$\vec{v}_r - a\vec{\omega} \times \hat{n} = 0 \qquad \vec{\omega} = \dot{\phi}\,\hat{x} \quad , \vec{v}_r = \frac{d\vec{R}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{R} + a\phi\hat{R}\right) \Rightarrow \phi = \phi_0 - \frac{a}{R} \text{ integre edilebilir}$$

BS K

4.7.°) Bir ortogonal matrisin bir gerçek dönmeyi gösteren iki karmaşık özdeğerinin, Φ dönme açısı olmak üzere $\exp(\pm i\Phi)$ olduğunu ispat ediniz.

$$\begin{pmatrix} \cos\Phi & \sin\Phi & 0 \\ -\sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \cos\Phi-\lambda & \sin\Phi & 0 \\ -\sin\Phi & \cos\Phi-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\cos\Phi-\lambda\right)^2(1-\lambda)+\sin^2\Phi\,(1-\lambda)=0 \qquad \lambda=1$$

$$\cos^2\Phi+\lambda^2-2\lambda\cos\Phi+\sin^2\Phi=0$$

$$\lambda^2-2\lambda\cos\Phi+1=0$$

$$\frac{+2\cos\Phi\pm\sqrt{4\cos^2\Phi-4}}{2}$$

$$\cos\Phi\pm\sqrt{\cos^2\Phi-1}$$

$$\cos\Phi\pm i\sin\Phi$$

$$\rightarrow e^{\pm i\Phi},\ 1$$

BS K

4.10.) Q_θ'nın sembolik olarak $Q_\theta = \exp(+i\sigma_x \theta/2)$ formunda yazılabileceğini gösteriniz.

$$Q_\theta = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \mathbb{1}\cos\frac{\theta}{2} + i\sigma_x \sin\frac{\theta}{2} \qquad \sigma_x^2 = \mathbb{1}$$

$$\psi \leftrightarrow \theta$$

$$= \mathbb{1}\left(1 - \frac{\psi^2}{2!} + \frac{\psi^4}{4!} - \frac{\psi^6}{6!} + \dots\right) + i\sigma_x\left(\psi - \frac{\psi^3}{3!} + \frac{\psi^5}{5!} - \dots\right)$$

$$= \mathbb{1} + \frac{(i\sigma_x\psi)^2}{2!} + \frac{(i\sigma_x\psi)^4}{4!} + \dots + (i\sigma_x\psi) + \frac{(i\sigma_x\psi)^3}{3!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\sigma_x\psi)^n}{n!} = e^{i\sigma_x\psi} = e^{i\sigma_x \theta/2}$$

BS K

2°) H hermitik bir matris ve I 'da aynı mertebeden birim matris ise

$$A = (I + iH)^{-1}(1 - iH)$$

şeklinde tanımlanan A matrisinin birimsel olduğunu gösteriniz

1°) Bir A matrisinin

a) izinin, ~~Tr A~~

b) hermitik ~~[illegible]~~ özelliğinin

c) determinant'ının ~~det A~~

d) antisimetri özelliğinin

matrislerle yapılan benzerlik hangi tür/dönüşümleri altında invaryant kaldığını açıklayarak ispatlayınız

3°) ~~Bir ortogonal matrisin gerçek dönmeyi gösteren iki kompleks özdeğerini~~ x ekseni etrafında φ açısı ile dönmeyi gösteren matrisin özdeğerlerini bulunuz. ~~dönme açısı cinsinden bulunuz.~~

4°) Serbest düşen bir cismin dünyanın dönmesinden ileri gelen sapmasını, dönmenin açısal hızının çok küçük olduğunu varsayarak, bulunuz.

$$\left(\vec{a}_s = \vec{a}_r + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \right)$$

BS K

BS K

10) **a)** $\underset{\sim}{A}$ matrisinin izi herhangi bir benzerlik dönüşümü altında invaryanttır.

Ort. şartı $A^T A = A A^T = 1$ $A^{-1} = A^T$
$A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbb{1}$.
$A^{+} = (A^T)^*$ eş matris.
reel mat. için: $A^{+} = A^T$
$A^{+} = A \Rightarrow$ hermitik
$A^{+}A = AA^{+} = \mathbb{1}$ üniter

$$\mathrm{Tr}\,A' = \mathrm{Tr}(BAB^{-1})$$

$$\mathrm{Tr}\,A' = \sum_i A'_{ii} = \sum_i (BAB^{-1})_{ii}$$

$$= \sum_{ikl} B_{ik} A_{kl} B^{-1}_{li} = \sum_{kl}\left(\sum_i B^{-1}_{li} B_{ik}\right) A_{kl}$$

$$= \sum_{kl} \delta_{kl} A_{kl} = \sum_k A_{kk} = \mathrm{Tr}\,A$$

b) Hermitiklik özelliği ~~...~~ üniter benzerlik dön. altında invaryant.

$B^{+} = B^{-1}$ üniter.

$$A^{+} = A \Rightarrow (A')^{+} = (BAB^{-1})^{+} = (B^{-1})^{+} A^{+} B^{+}$$

$$= (B^{-1})^{+} A B^{-1}$$

$$= BAB^{-1} \Leftrightarrow B^{+} = B^{-1} = B^{+}$$

c) $|A'| = |B||A||B^{-1}| = |BB^{-1}||A| = |A|$

d) $A'_{ij} = (BAB^{-1})_{ij} = \sum_{kl} B_{ik} A_{kl} B^{-1}_{lj}$ $\qquad B^{-1} = B^T$ ort.

$$= \sum_{kl} B_{ik} A_{kl} B^T_{lj} = \sum_{kl} B_{ik} A_{kl} B_{jl}$$

$$= -\sum_{kl} B_{ik} A_{lk} B_{jl} = -\sum_{kl} (B_{jl} A_{lk}) B_{ik}$$

$$= -\sum_k (BA)_{jk} B^T_{ki} = -(BAB^T)_{ji} = -(BAB^{-1})_{ji}$$

$$= -A'_{ji}$$

BS K

20) $A = (1+iH)^{-1}(1-iH)$

$\Rightarrow (1+iH)A = (1-iH)$ hermitsel eşleniği $A^{+}(1-iH) = 1+iH$

$$\Rightarrow \boxed{A^{+} = (1+iH)(1-iH)^{-1}}$$

$$A^{-1} = (1-iH)^{-1}\left[(1+iH)^{-1}\right]^{-1} = \boxed{(1-iH)^{-1}(1+iH) = A^{-1}}$$

$(1-iH)(1+iH) = 1+H^2$; $(1+iH)(1-iH) = 1+H^2$

$(1-iH)(1+iH) = (1+iH)(1-iH)$

$(1-iH)^{-1}(1+iH) = (1-iH)^{-1}(1+iH)(1-iH)$

$\Rightarrow (1+iH)(1-iH)^{-1} = (1-iH)^{-1}(1+iH)$

$A^{+} = A^{-1} \Leftrightarrow AA^{+} = A^{+}A = 1$ üniterse.

---

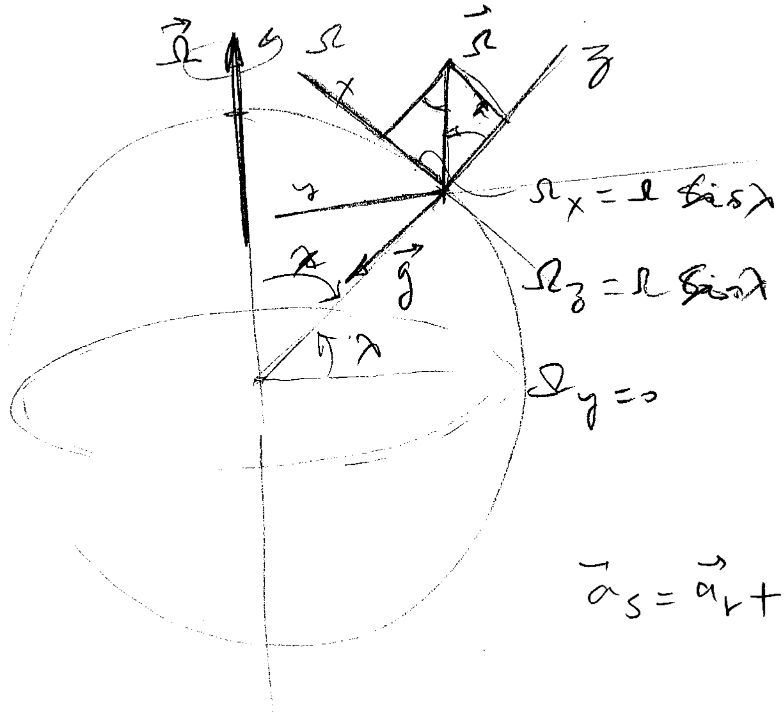
30)
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi-\lambda & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(1-\lambda)\left[(\cos\varphi-\lambda)^2+\sin^2\varphi\right] = 0$ $\quad \lambda_1 = 1$

$\lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1 = 0 \longrightarrow \lambda_{2,3} = \dfrac{+2\cos\varphi \pm \sqrt{4\cos^2\varphi - 4}}{2} = +\cos\varphi \pm i\sin\varphi$

$= e^{\pm i\varphi}$

BS K



$g_x = g_y = 0$

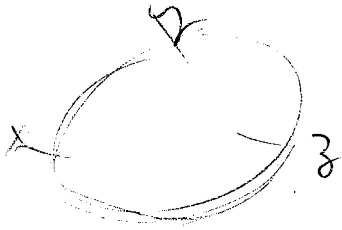
$g_z = -g$

$$\vec{a}_S = \vec{a}_r + 2(\vec{\Omega} \times \vec{v}_r) + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{a}_r = \vec{a}_S + 2\vec{v}_r \times \vec{\Omega} + \underbrace{\vec{\Omega} \times (\vec{r} \times \vec{\Omega})}_{\propto \Omega^2 \text{ ihmal}}$$

$$\boxed{\dot{\vec{v}}_r = \vec{g} + 2\vec{v}_r \times \vec{\Omega}}$$

$\vec{v}_r = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$



$\dot{\vec{v}}_1 = \vec{g} \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{g}t + \vec{v}_0$

$$\dot{\vec{v}}_1 + \dot{\vec{v}}_2 = \cancel{\vec{g}} + 2\vec{v}_1 \times \vec{\Omega} + 2\vec{v}_2 \times \vec{\Omega}$$

$\cancel{\vec{g}}$

$$\dot{\vec{v}}_2 = 2\vec{v}_1 \times \vec{\Omega}$$

$$\dot{\vec{v}} = 2\vec{v} \times \vec{\Omega}$$

$$\dot{\vec{v}} = 2\vec{v}_0 \times \vec{\Omega} + 2\vec{g}t \times \vec{\Omega}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t + 2\vec{v}_0 t \times \vec{\Omega} + \vec{g}t^2 \times \vec{\Omega}$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t^2 \times \vec{\Omega} + \frac{1}{3}\vec{g}t^3 \times \vec{\Omega}}$$

$\cancel{x = x_0 + v_{0x} t}$

$$\vec{g} \times \vec{\Omega} = -g\hat{z} \times (\Omega_x \hat{x} + \Omega_z \hat{z})$$
$$= -g\Omega_x \hat{z} \times \hat{x}$$
$$= -g\Omega_x \hat{y}$$

$$y = -\frac{1}{3} g t^3 \Omega \cos\lambda$$

$$t \approx \sqrt{2h/g}$$

$\cancel{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \ldots + v_{0x} t \hat{x} + v_{0y} t \hat{y} + v_{0z} t \hat{z} - \frac{1}{2} g t^2 \hat{z}}$

BS K

BS K

$$\begin{pmatrix} \cos\Phi & \sin\Phi & 0 \\ -\sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \cos\Phi - \lambda & \sin\Phi & 0 \\ -\sin\Phi & \cos\Phi - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\cos\Phi - \lambda)^2 \cancel{(1-\lambda)} + \sin^2\Phi \, \cancel{(1-\lambda)} = 0$$

$$(\cos^2\Phi + \lambda^2 - \cos\Phi\,\lambda)(1-\lambda) + \sin^2\Phi\,(1-\lambda) = 0$$

$$\cancel{(\cos^2\Phi + \sin^2\Phi)}(1-\lambda) + (\lambda^2 - \lambda\cos\Phi)(1-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)\left[1 + \lambda(\lambda - \cos\Phi)\right] = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda\cos\Phi + 1 = 0 \qquad \sin^2\Phi + \cos^2\Phi = 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{+\cos\Phi \pm \sqrt{\cos^2\Phi - 4}}{2}$$

$$\cancel{\cos^2\Phi} + \lambda^2 - 2\lambda\cos\Phi + \cancel{\sin^2\Phi} = 0$$

$$1$$

$$\lambda^2 - 2\lambda\cos\Phi + 1 = 0$$

$$\frac{+\cancel{2}\cos\Phi \pm \sqrt{\cancel{4}\cos^2\Phi - \cancel{4}}}{\cancel{2}}$$

$$\frac{\cos\Phi \pm \sqrt{\cos^2\Phi - 1}}{1}$$

$$\sin^2\Phi + \cos^2\Phi = 1$$

$$\frac{\cos\Phi \pm i\sin\Phi}{1}$$

$$e^{\pm i\Phi}.$$

2°) a)

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(AB)^T_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_k A_{jk} B_{ki} = \sum_k A^T_{kj} B^T_{ik} = \sum_k B^T_{ik} A^T_{kj}$$

$$= (B^T A^T)_{ij}$$

b)

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

$$(AB)^\dagger_{ij} = (AB)^{T*}_{ij} = \cancel{(AB)^*_{ji}}$$

$$= (B^T A^T)^*_{ij} = (B^\dagger A^\dagger)_{ij}$$

1°) Matris çarpımlarının asosyatifliği

$$(AB)C = A(BC)$$

$$[(AB)C]_{ij} = \cancel{(AB)_{ik}}$$

$$= \sum_k (AB)_{ik} C_{kj} = \sum_{kl} A_{il} B_{lk} C_{kj}$$

$$= \sum_{kl} A_{il} (B_{lk} C_{kj})$$

$$= \sum_l A_{il} (BC)_{lj}$$

$$= [A(BC)]_{ij}$$

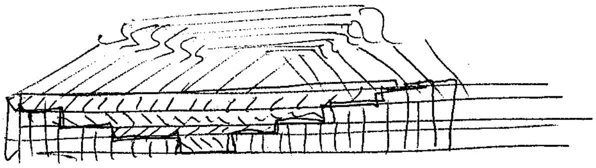
BS K

30) a)

$$A' = BAB^{-1}$$

$$\mathrm{Tr}\,A = \sum_i a_{ii}$$

$$\mathrm{Tr}\,A' = \sum_i a'_{ii}$$



$$\mathrm{Tr}\,A' = (BAB^{-1})_{ii} = \sum_{jk} B_{ij} A_{jk} B^{-1}_{ki}$$

$$= \sum_{jk} \underbrace{B^{-1}_{ki} B_{ij}}_{\delta_{kj}} A_{jk}$$

$$= \sum_j A_{jj} = \mathrm{Tr}\,A$$

b)

$$\epsilon'_{ij} = (B\epsilon B^{-1})_{ij} = \sum_{kl} B_{ik} \epsilon_{kl} B^T_{lj}$$

$B^{-1} = B^T$ ortogonal dönüşüm için

$$= -\sum_{kl} B_{ik} \epsilon_{lk} B^T_{lj} = -\sum_{kl} B_{ik} \epsilon_{lk} B_{jl}$$

$$= -\sum_{kl} (B_{jl} \epsilon_{lk}) B_{ik} = -\sum_{kl} (B_{jl} \epsilon_{lk}) B^T_{ki}$$

$$= -(B\epsilon B^T)_{ji} = -\epsilon'_{ji}$$

$$\cancel{\epsilon'^{+}_{ij} \epsilon'_{ij} = (B\epsilon B^{-1})^{+}_{ij}} \; (B\epsilon B^{-1})_{ij}$$

$$(\epsilon'^{+} \epsilon')_{ij} = \left[(B\epsilon B^{-1})^{+} (B\epsilon B^{-1})\right]_{ij}$$

$$= \left[(B^{-1})^{+} \epsilon^{+} \underbrace{B^{+} B}_{} \epsilon B^{-1}\right]_{ij}$$

BS K

10c) $Q_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\frac{\vartheta}{2} & i\sin\frac{\vartheta}{2} \\ i\sin\frac{\vartheta}{2} & \cos\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}$

$\vartheta = \frac{\vartheta}{2}$

$$= \mathbb{1}\cos\frac{\vartheta}{2} + i\sigma_x \sin\frac{\vartheta}{2}$$

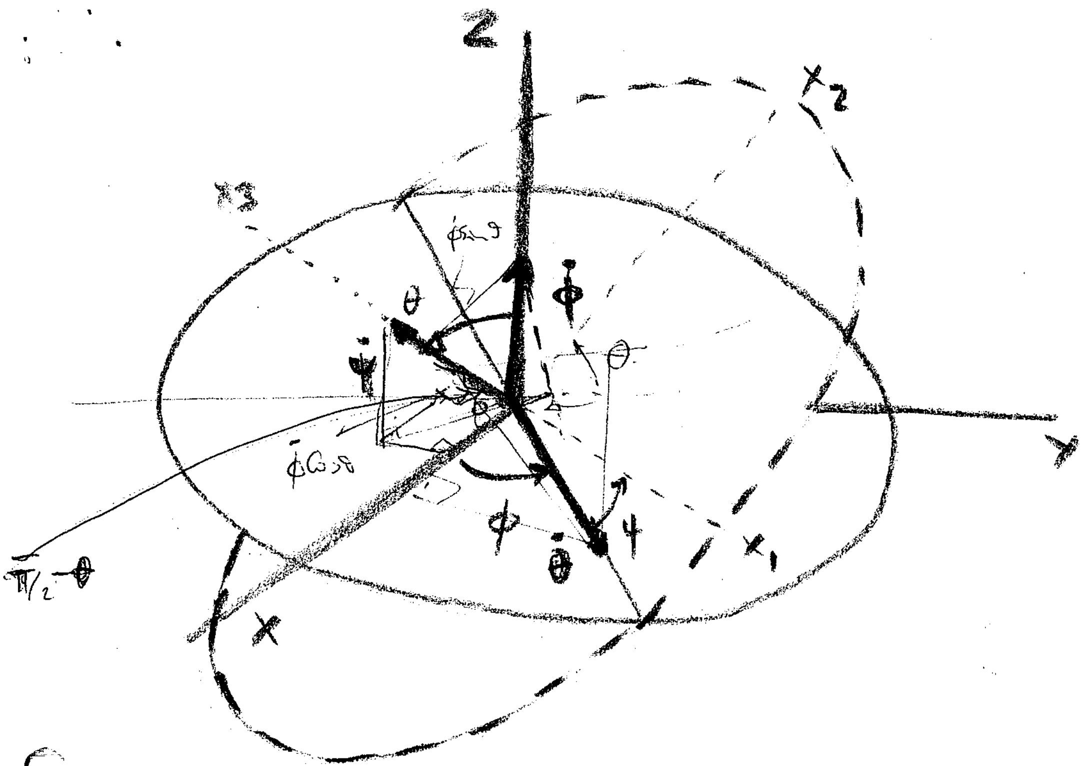
$\sigma_x^2 = \mathbb{1} = \sigma_x^4 = \dots$

$$= \mathbb{1}\left[1 + \frac{\vartheta^2}{2!} + \frac{\vartheta^4}{4!} + \dots\right] + i\sigma_x\left[\vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} + \frac{\vartheta^5}{5!} - \dots\right]$$

$$= 1 + i\sigma_x\vartheta + \frac{(i\sigma_x\vartheta)^2}{2!} + \frac{(i\sigma_x\vartheta)^3}{3!} - \dots$$

$$= e^{i\sigma_x\vartheta} = e^{i\sigma_x\vartheta/2}.$$

BS K



$\vec{\Omega}$'yı Euler açıları ve türevleri cinsinden $x_1\ x_2\ x_3$ eksenleri boyunca ifade edelim.

$\dot\theta, \dot\phi, \dot\psi$ hızlarının bu eksenler boyunca bileşenlerini bulalım.

$\dot\theta_1 = \dot\theta \cos\psi \quad \dot\theta_2 = -\dot\theta \sin\psi \quad \dot\theta_3 = 0$

$\dot\phi_3 = \dot\phi \cos\theta \quad \dot\phi_1 = \dot\phi \sin\theta \sin\psi$

$\dot\phi_2 = \dot\phi \sin\theta \cos\psi$.

$\dot\psi_3 = \dot\psi$

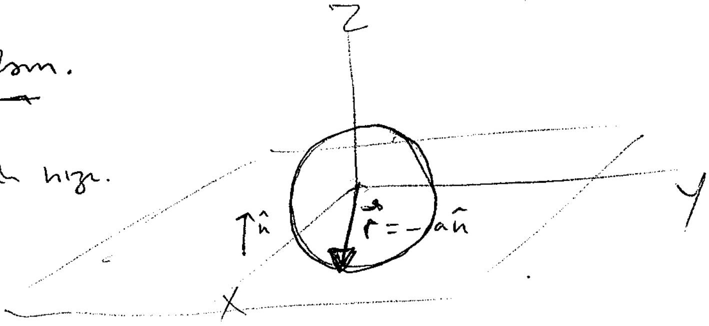
$$\begin{cases} \Omega_1 = \dot\phi \sin\theta \sin\psi + \dot\theta \cos\psi \\ \Omega_2 = \dot\phi \sin\theta \cos\psi - \dot\theta \sin\psi \\ \Omega_3 = \dot\psi + \dot\phi \cos\theta \end{cases}$$

BS K

$$\sum_i C_{\alpha i}\,\dot q_i = 0 \quad \text{Eq.'s of constraint.}$$

Bu denk. lerin LHS koord. ların bazı fonk. larının toplam zaman ~~türevleri~~ değil seler integre edilemezler.

* **Düzlemde yuvarlanan bir küre alalım.**



$\vec V$ öteleme hızı : Küre merkezinin hızı.

$\vec \Omega$ açısal hız.

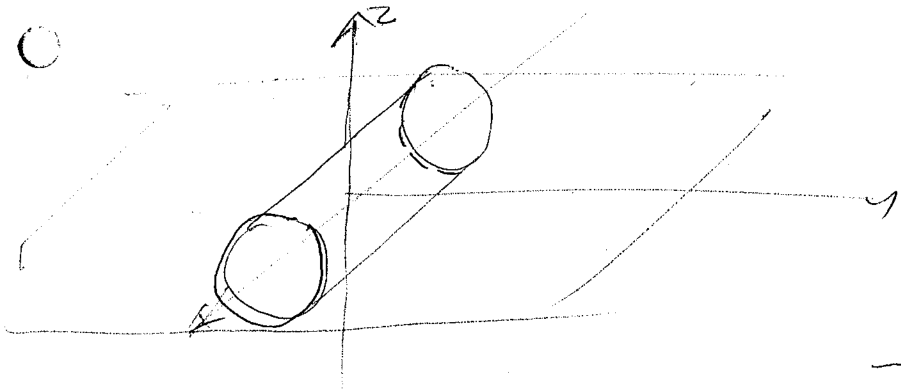
Düzlemle kontakta olan noktanın hızı. $\vec v = \vec V + \vec\Omega \times \vec r$

$$\Rightarrow \vec v = \vec V - a\vec\Omega\times\hat n$$

Gerekli şart kontakta olan noktanın kaymaması:

$$\vec V - a\vec\Omega\times\hat n = 0$$ bu constraint non-holonomik tir.

Bu integre edilemez. $\vec V$'nin küre merkezinin yerçep vektörünün toplam zaman türevi olmasına rağmen. $\vec\Omega$ da genellikle koord. toplam zaman türevi değildir.



$$\vec V = \frac{d\vec R}{dt} = \frac{dR}{dt}\hat y$$

$$\vec\Omega = \frac{d\phi}{dt}.$$

$$\vec\Omega\times\hat n = \hat y\,|\vec\Omega\times\hat n|$$

$$\frac{d}{dt}(R - a\phi) = 0$$

$$\boxed{R = a\phi \Rightarrow \phi = \frac{R}{a} + \phi_0}$$

BS K

Dünyanın dönmesinden dolayı serbest düşen bir cismin sapmasını bulunuz.

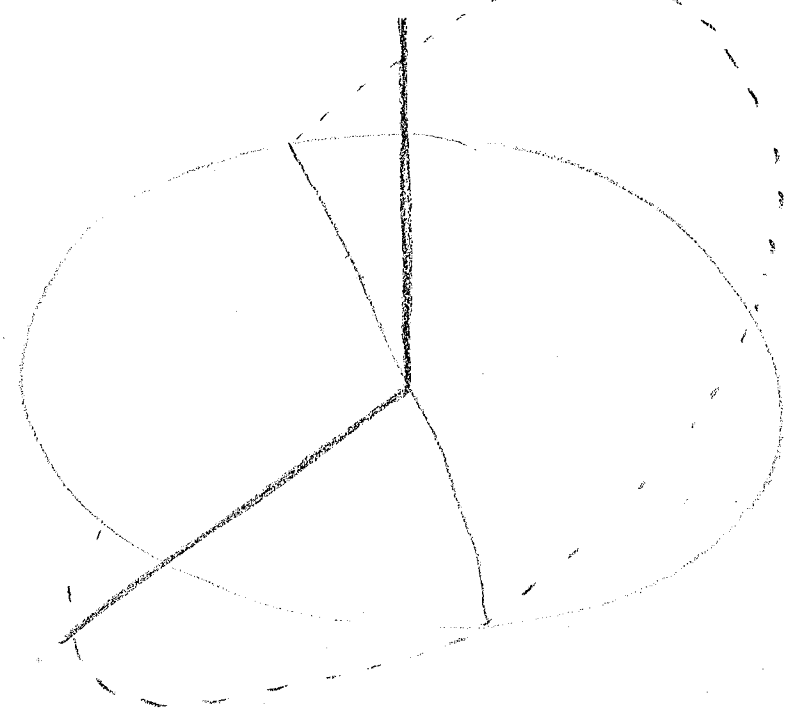
$$\vec{a}_r = \vec{a}_s + 2\vec{v} \times \vec{\Omega} + \underbrace{\Omega \times (\vec{r} \times \vec{\Omega})}$$

Ω^2 ihmal edilebilir.

$$\dot{\vec{v}} = 2\vec{v} \times \vec{\Omega} + \vec{g} \qquad \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

$$\dot{\vec{v}}_1 = \vec{g} \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{g}t + \vec{V}_0$$

$$\underbrace{\dot{\vec{v}}_1}_{\vec{g}} + \dot{\vec{v}}_2 = 2\vec{v}_1 \times \vec{\Omega} + \underbrace{2\vec{v}_2 \times \vec{\Omega}}_{?} + \cancel{\vec{g}}$$



BS K

$\dot\theta_1 = \dot\theta\cos\phi \quad \dot\theta_2 = \dot\theta\sin\phi \quad \theta_3 = 0$

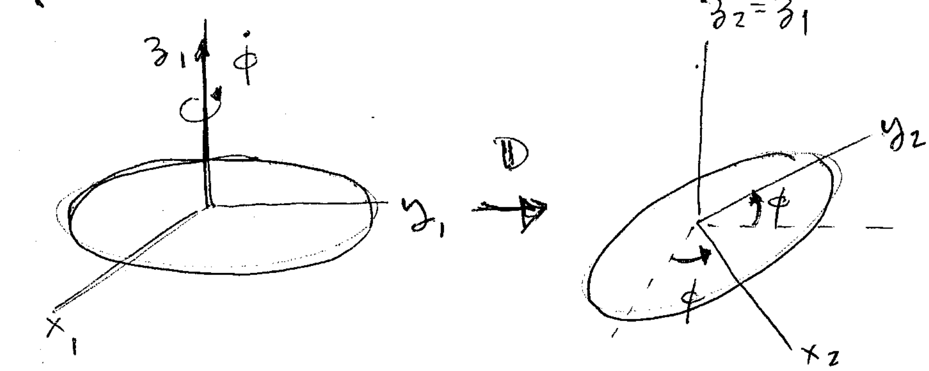
BEKİR
BEKİR

$\dot\phi_3 = \dot\phi$

$\dot\psi_1 = \dot\psi\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)\cos\phi \quad \dot\psi_2 = \dot\psi\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)\sin\phi \quad \dot\psi_3 = \dot\psi\cos\theta.$

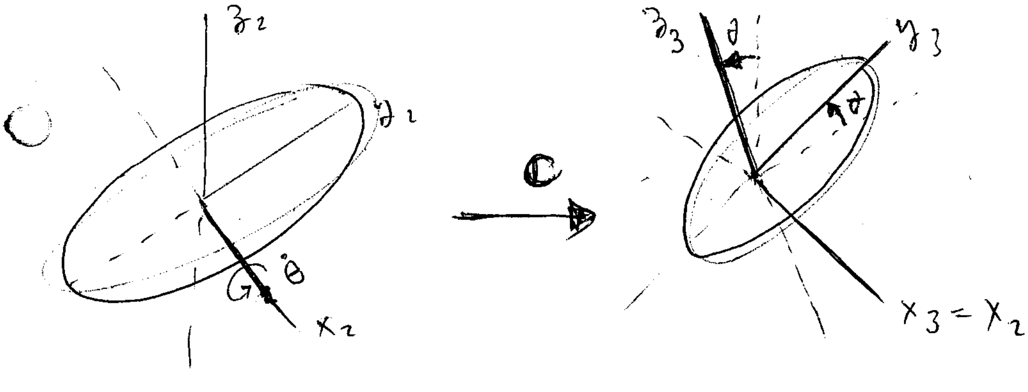
$$\begin{cases} \Omega_1 = \dot\theta\cos\phi + \dot\psi\sin\theta\cos\phi \\ \Omega_2 = \dot\theta\sin\phi + \dot\psi\sin\theta\sin\phi \\ \Omega_3 = \dot\psi\cos\theta. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot\phi_1 \\ \dot\phi_2 \\ \dot\phi_3 \end{pmatrix} = \underset{\sim}{A} \begin{pmatrix} \dot\phi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

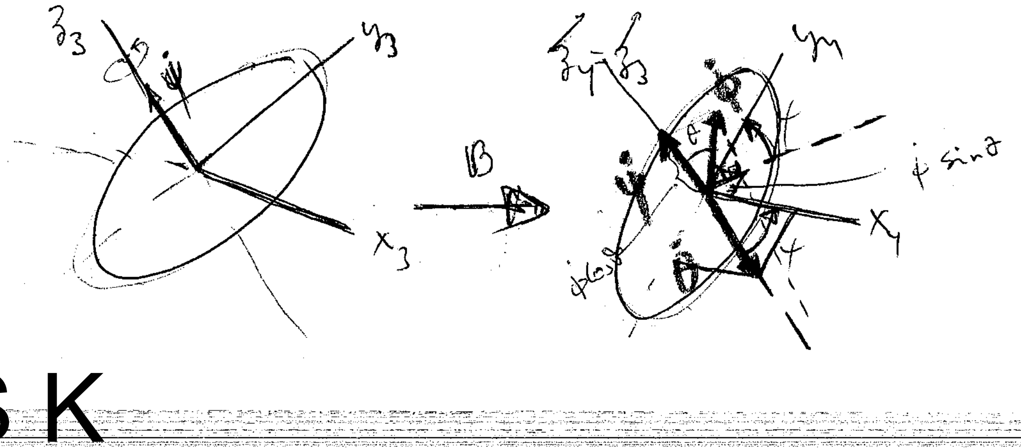


$$\begin{pmatrix} \dot\theta_1 \\ \dot\theta_2 \\ \dot\theta_3 \end{pmatrix} = \underset{\sim}{D}$$

?B?



$\boxed{A = BCD}$



BS K