

BÖLÜM 6

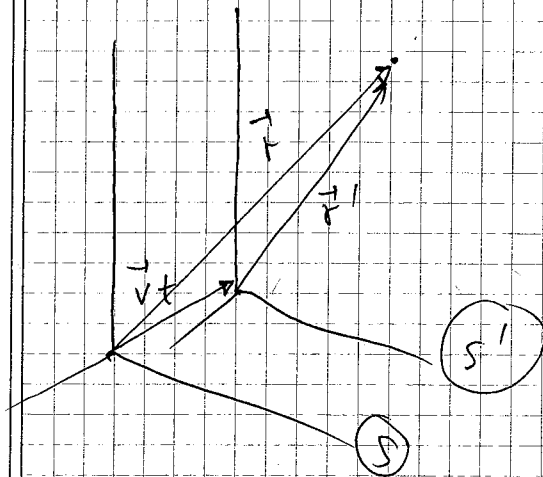
KLASİK MEKANİKTE ÖZEL RELATİVİTE

G.1. Özel Relativitenin temel programı :

uzay sistemi
veya
uzayda tespit edilmiş
sistem

→ kanıt → $\vec{F} = m\vec{a}$ 'nın geçerli olduğu
bir eylemsizlik sist.

- 1') bir eylemsizlik sist.'ine göre dönen bir sist.'de bu sağlanamaz; dönmenin etkisini ihmal eden terimler eklenmelidir.
- 2') bir eylemsizlik sist.'ine göre sürekli bir hızla ötelenen sistemin de bir eylemsizlik sistemi olman gerekir gibi görünür :



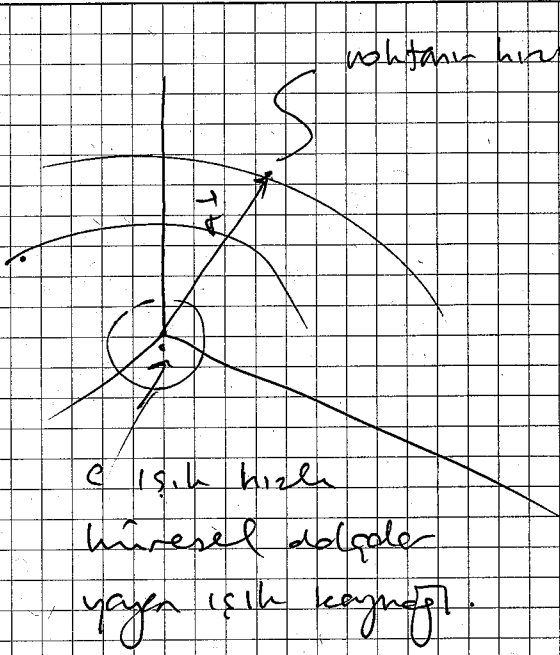
$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$$

Galilei dönüşümü

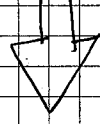
$$\dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{r}} - \vec{v}$$

$$\vec{a}' = \vec{a}$$

... Bu dönüşümler her iki sistemde de bir hızın farkı
olması gerektiğini söylüyor !!!



$$\vec{r}' = c\hat{n} - \vec{v} \quad \text{dir.}$$



dalga hızının siddeti (c) değişmezdir.

Fiziksel kanunların hareketli ve hareketli sistemler de değişmemesi için bazı fiziksel kanunlara ihtiyaç vardır.

→ Lorentz dönüşümü → Einstein

(Eşdeğerlik postulası)

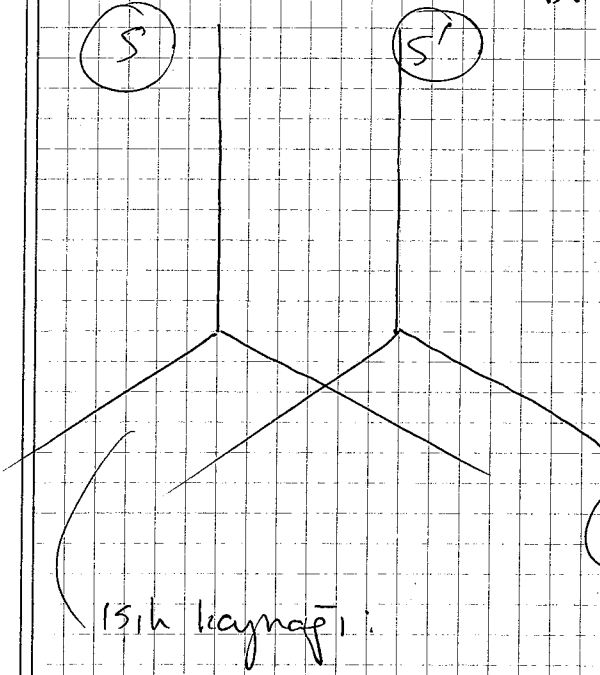
- 1-) Newton hareket denklemlerinin bir Galilei dönüşümü altında invariant kaldığı görülmüştü.
- 2-) Eşdeğerlik postulası c'ye yakın hızlarda fiziksel kanunların değişmesi olduğu dönüşüm denklemlerinin bulunmasını ve bunları düşük hızlarda Galilei dönüşüm denklemlerine indirgenmesi gerektiğini söyler.

// Işık hızı taşıyan bir dönüşüm

// Fizik kanunlarının dönüşümler altında özellikleri incelenerek, formu değişenler eşdeğerlik postulasına uygun olarak genelleştirilmiştir.

6.2 Lorentz Dönüşümü:

Başlangıçları $t=0$ anında çakışsın.



S 'de ki gözlemci dalganın cephesini

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

görür.

S' 'de ki

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

Arzu edilen dönüşüm;

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2$$

$$\sum_{i=1}^3 x_i^2 - c^2 t^2 = \sum_{i=1}^3 x_i'^2 - c^2 t'^2$$

ict = X_4 dersek

$$\sum_{\mu=1}^4 X_{\mu}^2 = \sum_{\mu=1}^4 X_{\mu}'^2$$

(Euren uzayı - Minkowski uzayı da demektir)

④ birbirine göre hareketli iki sist. arasındaki uzaysal dönüşüm Lorentz dön. için bir alt kümesidir.

⑤ uzaysal bir dönüşüm içinde bulunulmaması, sadece eksenleri birbirine göre paralel durgun hareketli sistemlerle ilgili dönüşümlere ilgileneceğiz $\rightarrow$ saf Lorentz dönüşümü

4

iki sistem arasındaki $\vec{v}$ hızının doğrultusunun, eksenlerden bir örneğin x_3 boyunca alabilir.

→ x_3 ile $\vec{v}$ 'nin doğrultusunun koordinat eksenleri. Gözetici adı bir dönme ile her zaman gerçekleştirilir. Bu nedenle

$$x'_\mu = \sum_{\nu=1}^4 a_{\mu\nu} x_\nu$$

dönüşümü; $\vec{v}$ 'nin x_3 'e paralel olduğu bir öz Lorentz dönüşümü için elave etmek yeterlidir

Direkt şartı : $\sum_{\nu} g_{\mu\nu} a_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\lambda}$

Matris elemanların hepsi gerçel değil!!!

ffarehete ilk doğrultular değişiminde etkilenmes

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2$$

→ $(x_3 \text{ ve } x_4)$ değişir.

üstelik $\downarrow$ bunların x_2 ve x_1 ortama çıkar.

Öz Lorentz dönüşümü

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Ortogonalite şartları ;

$$\mu = \lambda = 3 \Rightarrow \sum_{\nu} a_{3\nu} a_{3\nu} = 1$$

$\Rightarrow$

$$a_{33}^2 + a_{34}^2 = 1$$

1°

$$\mu = \lambda = 4 \Rightarrow \sum_{\nu} a_{4\nu} a_{4\nu} = 1$$

$$a_{43}^2 + a_{44}^2 = 1$$

2°

$$\lambda = 3, \mu = 4 \Rightarrow$$

$$a_{33} a_{43} + a_{34} a_{44} = 0$$

3°

Geri kalan elemanları tek değeri olarak belirleyebilmek için 4° bir şart gereklidir ;

$X_3' = 0$ (üçlü sistemin bağlanması) X_3 boyunca durgun hareket ettiği görülmüşse elde edilir

t anında X_3 'ün konumu ; $v t$ dir

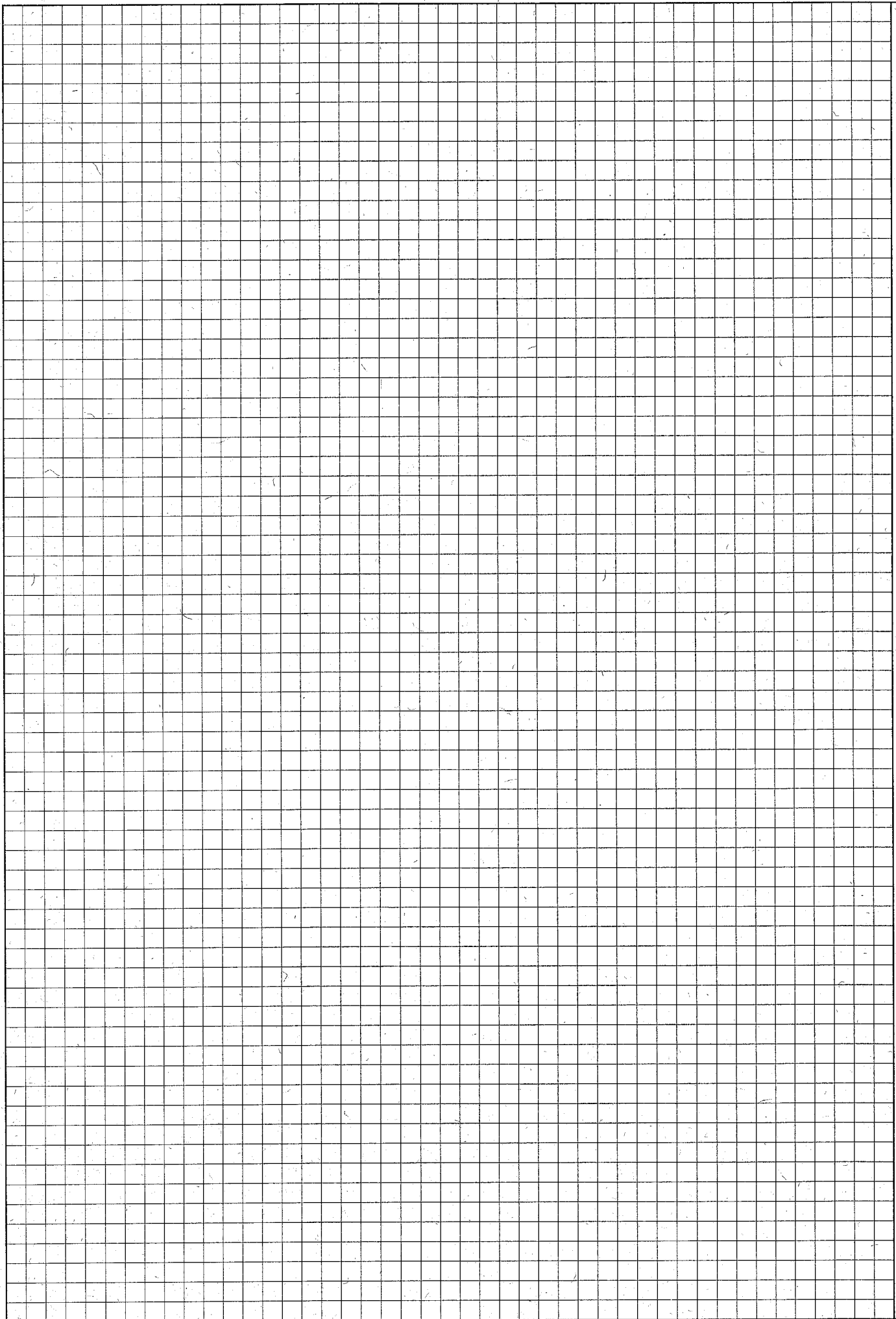
$$X_3 = v t = -i\beta X_4 \quad \beta = v/c$$

4°

$$X_{\mu}' = \sum_{\nu=1}^4 a_{\mu\nu} X_{\nu}$$

$$\Rightarrow X_3' = \sum_{\nu=1}^4 a_{3\nu} X_{\nu} = \cancel{a_{31} X_1} + \cancel{a_{32} X_2} + a_{33} X_3 + a_{34} X_4 = 0$$

$$= -i\beta X_4 a_{33} + a_{34} X_4 = X_4 (a_{34} - i\beta a_{33}) = 0$$



BS K

$$x_3' = x_4 (a_{34} - i\beta a_{33}) = 0$$

$$\Rightarrow a_{34} = i\beta a_{33}$$

1° 'den $a_{33}^2 - \beta^2 a_{33}^2 = 1 \Rightarrow a_{33} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma$

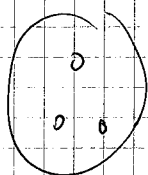


$$a_{34} = i\beta\gamma$$

3° 'den $a_{43} = -a_{44} \frac{a_{34}}{a_{33}} = -i\beta a_{44}$

2° 're verstehen

$$-\beta^2 a_{44}^2 + a_{44}^2 = 1 \Rightarrow a_{44} = \gamma$$



$$a_{43} = -i\beta\gamma$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

$\beta \rightarrow 0$ dann $\gamma \rightarrow 1$ und $\mathbb{I}$ matrix erhalten. ist positiv definit.

7

Bütün matrisin ailesini bir dönüşüm matrisi olan

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

ile aynı formda bir alt matrisi içinde bulundurm. Gerçekten de Lorentz matrisi $X_3 X_4$ ailesinden bir dönüşüm gösterir.

$$\cos \phi = \gamma > 1$$

$$\begin{cases} X_3' = X_3 \cos \phi + X_4 \sin \phi \\ X_4' = -X_3 \sin \phi + X_4 \cos \phi \end{cases}$$

$$X' = X$$

$$y' = y$$

$$z' = \gamma (z - vt)$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vz}{c^2} \right)$$

$$z' = z \gamma + ict (i\beta \gamma)$$

$$= \gamma (z - \beta ct)$$

$$ict' = -z i\beta \gamma + ict \gamma$$

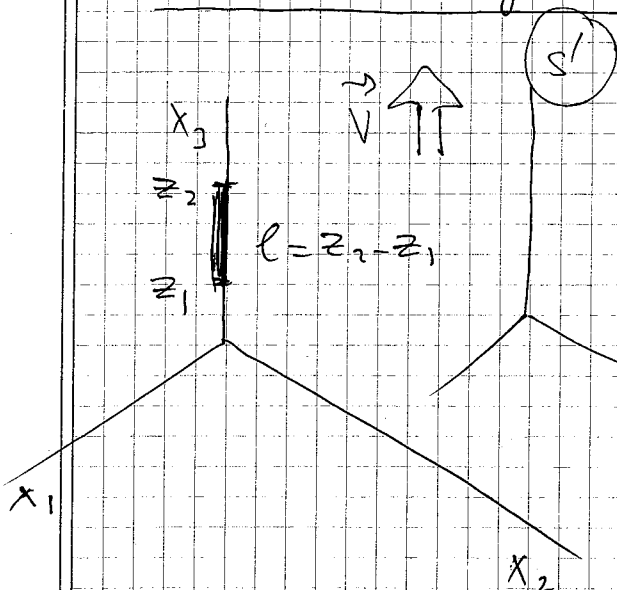
$$t' = \gamma \left(t - \frac{zv}{c^2} \right)$$

$X_\mu' \rightarrow X_\mu$ ya da dönüşüm Lorentz matrisinin transpozunu alarak bulun.

$$V \rightarrow -V$$

Çünkü 4 vektör sisteminin başlangıç göre $-V$ hız ile hareket.

Lorentz-Fitzgerald uzunluk daralması :



t' anında çıkan ışığın her iki ucunun

z_1' ve z_2' olarak ölçüldüğü

$$z_1 = \gamma(z_1' + vt')$$

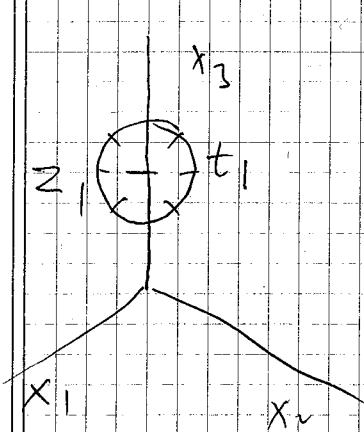
ters dön.

$$z_2 = \gamma(z_2' + vt')$$

$$\Rightarrow z_2' - z_1' = \frac{l}{\gamma}$$

$$l' = l/\gamma$$

Zaman ölçülerinin genişlemesi :

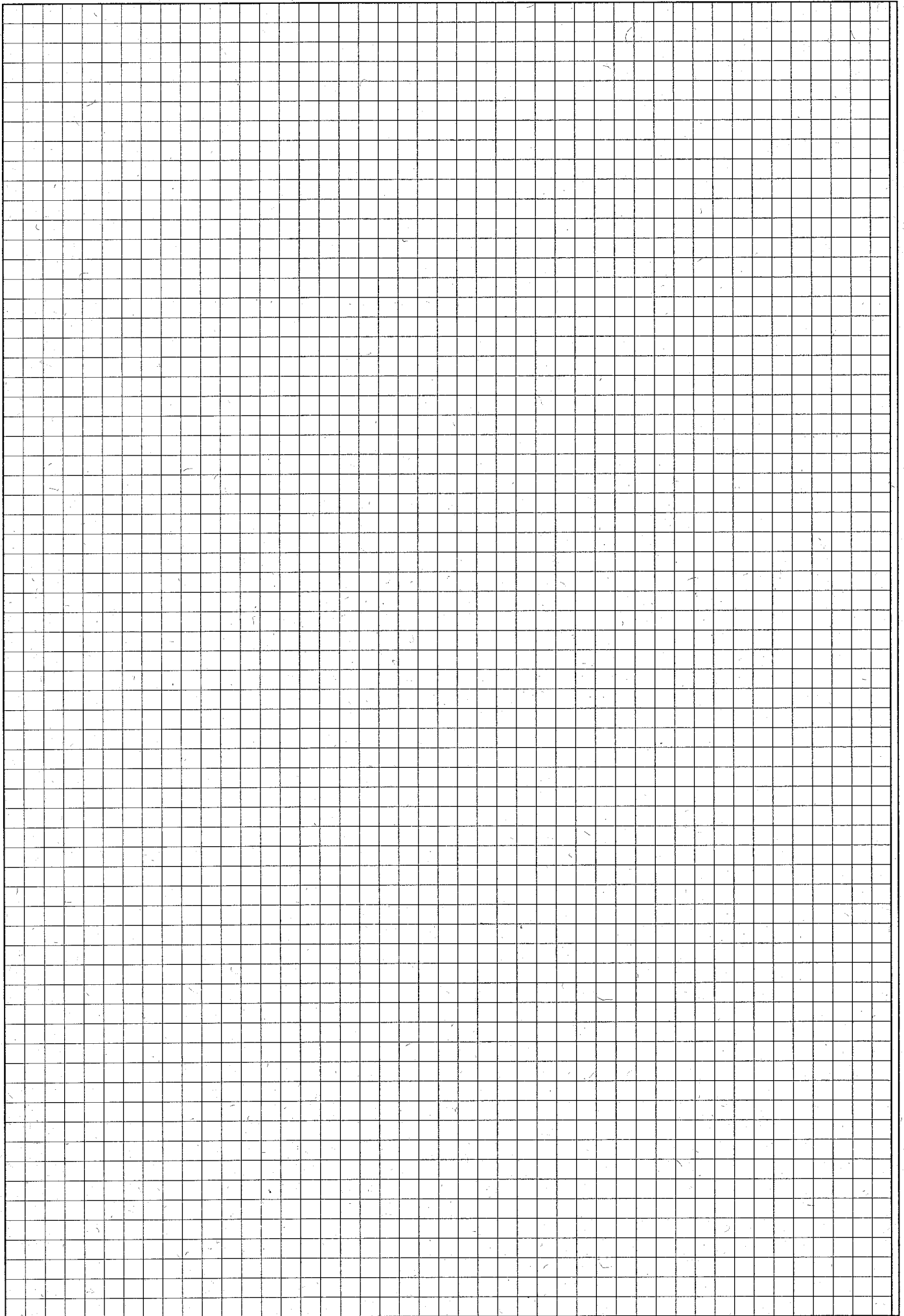


$$t_1' = \left(t_1 - \frac{vz_1}{c^2}\right)\gamma$$

$$t_2' = \left(t_2 - \frac{vz_2}{c^2}\right)\gamma$$

$$t_2' - t_1' = \gamma(t_2 - t_1)$$

$$\Delta t' = \gamma \Delta t$$



BS K

6.3. Kovaryant 4-boyutlu formülasyon:

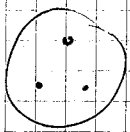
skaler : $a = b$

vektör : $\vec{A} = \vec{B}$ bileşenleri arasında $A_i = B_i$

↓ uzaysal dönüş altında

$$A_i' = B_i' \rightarrow \vec{A}' = \vec{B}'$$

⇒ kovaryant



4'ün vektöre bir örnek evren uzayında bir noktanın bileşenleri x_1, x_2, x_3, x_4 olan vektördür.

→ x_μ ile gösterilebilir.

$$x_\mu x_\mu \rightarrow \sum_{\mu=1}^4 x_\mu^2 \text{ demektir.}$$

Bir maddesel nokta aklı uzayda hareket ettikçe 4-boyutlu uzayda karşı gelen nokta evren çizgisi olarak bilinen bir yörünge çizilebilir.

dx_μ : evren çizgisi boyunca inf., her anı ile karşılaştıran bir evren skaler kümlenir (Lorentz invariant)

$$(d\tau)^2 = -\frac{1}{c^2} \sum_{\mu} (dx_\mu)^2$$

(16)

Hareketsiz bir sistemde dx_μ' 'nin bileşenleri:

$$(0, 0, 0, i c dt')$$

$$\Rightarrow (dz)^2 = -\frac{1}{c^2} \sum_\mu (dx_\mu')^2 = (dt')^2$$

maddesel iletken ile iletken hareket eden bir saat ile zaman ölçüleceği zaman aralığı.

$$(dz)^2 = -\frac{1}{c^2} \left\{ (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2 (dt)^2 \right\}$$

$$dz = dt \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] \right\}^{1/2}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{1-\beta^2}} = dt$$

bileşenlerinin birinin sıfır olduğu bir vektörün hareketin artık pozitif tanımlı olduğu düşünülür:

$$X_\mu = x_{\mu 1} - x_{\mu 2} \quad \text{fark vektörü olsun.}$$

$$X_\mu X_\mu = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 - c^2 (t_1 - t_2)^2$$

$$\text{Sıradaki hareket} \begin{cases} \geq 0 & \text{uzay tipi vektörler} \\ < 0 & \text{zaman " " " " } \end{cases}$$

$$X_\mu \text{ uzay tipi} \Rightarrow |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 \geq c^2 (t_1 - t_2)^2$$

$$\text{zaman " " " " } \Rightarrow |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 < c^2 (t_1 - t_2)^2$$

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \quad z\text{-ekseni üzerindeki mesafe}$$

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = z_2 - z_1 \text{ yazarsak.}$$

sist. $\vec{V}$ hızıyla z eksenine paralel hareket ediyorsa,

$$t' = \gamma \left(t - \frac{Vz}{c^2} \right) \text{ olduğundan,}$$

$$c(t_2' - t_1') = \gamma \left[c(t_2 - t_1) - \frac{V}{c}(z_2 - z_1) \right]$$

$$X_{\mu} \text{ uzay tipi} \Rightarrow c(t_2 - t_1) < z_2 - z_1$$

γ 'nın vektör örneklemini çoğaltabiliriz

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}$$

(bir maddesel noktanın konum vektörünün kendisi için zamana göre değişim hızı)

$$u_i = \frac{V_i}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$u_4 = \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$u_\mu^2 = u_\mu u_\mu = \frac{V_1^2}{(\sqrt{1-\beta^2})^2} + \frac{V_2^2}{(\sqrt{1-\beta^2})^2} + \frac{V_3^2}{(\sqrt{1-\beta^2})^2} - \frac{c^2}{(\sqrt{1-\beta^2})^2} = \frac{V^2}{1-\beta^2} - \frac{c^2}{1-\beta^2}$$

$$= -c^2 \quad \text{Evren Hızı} \quad \text{Zaman-tipi}$$

(2)

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

dalga denklemini: görüne alalım.

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4} \quad \text{def. op tanımlayalım.}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \sum_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} = \sum_\nu a_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}$$

$$\square^2 = \sum_\mu \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}$$

$$x_4 = ict$$

$$\frac{\partial}{\partial x_4} = \frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\square^2 \psi = 0$$

6.4. Kuvvet ve Enerji Denklemleri:

$\frac{d}{dt} (m\vec{v}) = \vec{F}$ I. Tasa Galilei dönüşümleri invariant ama Lorentz dön. altında değışik, olacak şekilde genişletilmeli. 4 boyutlu formda yazılmalı.

$$\frac{d}{d\tau} (m u_\nu) = K_\nu \text{ tanımlıyoruz.} \quad d\tau = dt$$

$$u \equiv (u_1, u_2, u_3, u_4) \equiv \left(\frac{v_1}{c}, \frac{v_2}{c}, \frac{v_3}{c}, \frac{ic}{c} \right)$$

Aynı zamanda $\lim_{\beta \rightarrow 0} K_i \rightarrow F_i$ olmalı.

Elektromagnetik kuvvet:

$$F_i = -q \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right) + \frac{1}{c} \frac{d\vec{A}_i}{dt} \right\}$$

$$i\phi = A_4$$

$$\phi - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c} \sqrt{1-\beta^2} u_4 A_4$$

$$F_i = -\frac{q}{c} \sqrt{1-\beta^2} \left\{ -\frac{\partial}{\partial x_i} (u_4 A_4) + \frac{dA_i}{dt} \right\}$$

$$= K_i \sqrt{1-\beta^2} \quad \text{ilk 3 bileşen}$$

4. bileşeni bulalım.

$$u_4 \frac{d}{d\tau} (m u_4) = K_4 u_4$$

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} m u_4 u_4 \right) = K_4 u_4$$

$-c^2$

$$K_0 u_0 = K_i u_i + K_y u_y = 0$$

$$K_i = \frac{F_i}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{1-\beta^2} + K_y \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0 \Rightarrow K_y = - \frac{ic}{c} \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$K_0 = \frac{d}{dz} (mu_0) \text{ idi } \Rightarrow K_y = \frac{d}{dz} (mu_y)$$

$$\frac{d}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \text{ den}$$

$$dz = dt$$

$$K_y = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \left(m \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \frac{ic}{c} \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \frac{dT}{dt}$$

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \left(\approx mc^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{2} + \dots \right) \right)$$

$$\approx mc^2 + \frac{1}{2} mv^2$$

Dörtü momentum olarak,

$$p_0 = mu_0, \quad p_y = mu_y = \frac{m \cdot ic}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{ic}{c} \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$p_y = \frac{iT}{c}$$

bu sistemde man koruyucu K.E'de korunur. Relativistik sistemde kütlenin değiştiğini kabul ederiz. Bu değişim K.E'ye aktarılır.

$$p_i = \frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$p_\mu p_\mu = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = \underline{-m^2 c^2 = \text{stat alalım}}$$

$$-m^2 c^2 = p^2 - \frac{T^2}{c^2} \Rightarrow \boxed{T^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

relativistik kütlesi $m_r = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}$

6.5. Relativistik Mekaniğin Lagrange formülasyonu.

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad \underline{\text{Hamilton prensibi}}$$

$$L = -mc^2 \sqrt{1-\beta^2} - V$$

birdekin bağımsız relativistik kinetik enerjiyi bir mekanik enerjiyle aynı Laf.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} \Rightarrow$$

$$V_j = q_j; \quad X_j = q_j$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{m v_i}{\sqrt{1-\beta^2}} = p_i$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{m v_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = - \frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i$$

$$H = \sum \dot{q}_j p_j - L = \sum v_j \frac{m v_j}{\sqrt{1 - \beta^2}} + m c^2 \sqrt{1 - \beta^2} + V$$

$$= \sum_j \frac{m v_j^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + m c^2 \sqrt{1 - \beta^2} + V$$

$$= \frac{m V^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + m c^2 \sqrt{1 - \beta^2} + V$$

$$= \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + V = T + V$$

$$x'_\mu = \sum_{\nu} a_{\mu\nu} x_\nu \quad \sum_{\mu} a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\lambda}$$

Fizik Tascaları

Lorentz Bn.

Değişirlik

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = \gamma(x_3 - vt) \\ t' = \gamma(t - \frac{vx_3}{c^2}) \end{cases}$$

4'ün evreni etkileyen
yanlır.

Sadece yegane sadece Lorentz değışirliği mükemmel

// Lorentz değışirliği değışik aynı zamanda

değişirlik alfabesi değişirlik alfabesi

İşaret : anlat!

$$a=b$$

$$\vec{F} = \vec{G} \rightarrow \vec{F}' = \vec{G}'$$

$$\vec{F}_i = \vec{G}_i$$

$$\vec{F}'_i = \vec{G}'_i$$

$$\vec{C} = \vec{D} \rightarrow \vec{C}' = \vec{D}'$$

2

x_1, x_2, x_3, x_4 4. lin. vektör.

$$\longrightarrow x_\mu$$

$$x_\mu x_\mu = \sum_\mu x_\mu^2$$

Maddesiz vektör

örölü n. vektör

Rishanski

Hermit

örölü n. vektör (gözet)

örölü n. vektör

dx_μ (örölü)

$$(dz)^2 = -\frac{1}{c^2} \sum_\mu (dx_\mu)^2$$

$$= -\frac{1}{c^2} dx_\mu dx_\mu$$

örölü skaler
örölü

Lorentz invariant

$d\tau$ 'nin anlamı :

maddesel noktanın ari olarak

hareketi boyunca
bir sistem

→ doğruya dx_μ'

örneğin

$(0, 0, 0, i c dt')$

$$(d\tau)^2 = -\frac{1}{c^2} dx_\mu' dx_\mu' = (dt')^2$$

Maddesel nokta ile sürekli hareket eden
bir saat eşzamanlı ölçülen zaman aralığı.

(maddesel noktanın öz zamanı veya evren zamanı)

$$(d\tau)^2 = -\frac{1}{c^2} \{ (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2 (dt)^2 \}$$

$$= dt \left[1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] \right]^{1/2}$$

$$= dt \left\{ 1 - \frac{v^2}{c^2} \right\}^{1/2}$$

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}$$

4

4'ün vektörün bileşenlerinden biri sıfır olacağı için
arkılı kavresi böyle olarak parçık tanımlı olmalı
zamanı aytl!!

$$X_{\mu} = x_{1\mu} - x_{2\mu}$$

$$X_{\mu} X_{\mu} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 - c^2 (t_1 - t_2)^2 \begin{cases} \geq 0 & \text{uzay tipi vektörler} \\ < 0 & \text{zaman tipi} \end{cases}$$

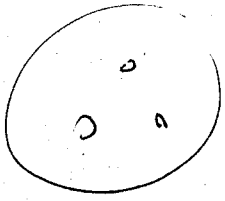
$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \geq c^2 (t_1 - t_2)^2 \quad \text{uzay}$$

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| < c^2 (t_1 - t_2)^2 \quad \text{zaman}$$

birleştirilemez!

İki olayın noktası arasındaki uzaklık
bir ışık ışığı ile birleştirilebilir.

$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 \gg X_3$ olacek sekide uaqrel elserini
secret number.



$$\vec{r} = (z_1, -z_2)$$

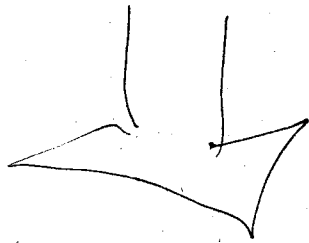
$$\vec{v}$$

$$c(t_1' - t_2') = \frac{c(t_1 - t_2) - \frac{v}{c}(z_1 - z_2)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$X_{\mu} \text{ uaqel hpi} \Rightarrow c(t_1 - t_2) < z_1 - z_2$$

$$0 \text{ zaman } ic(t_1' - t_2') = X_4' = 0 \text{ olacek sekide}$$

$$v < c \text{ hizi bulunacaq..}$$



evlen magrade sir ishte $(\vec{r}, t)$ olagme hasi
qel.

6

$$u_\nu = \frac{dx_\nu}{d\tau} \equiv \left(u_i = \frac{v_i}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$$

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt}$$

$$u_\nu u_\nu = \frac{v^2}{1-\beta^2} - \frac{c^2}{1-\beta^2} = -c^2 \quad (\text{stet.}) < 0$$

↓
zaman tipi

$$\partial^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

$$\square^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\tilde{D}^2 \psi = 0$$

Newton. 2.75a $\frac{d}{dt} (m \vec{v}_i) = F_i$



$$\frac{d}{dz} (m u_z) = K_z \rightarrow \text{q. / li units?}$$

$\beta \rightarrow 0$ limit $\rightarrow F_i$ should.

$$F_i = -q \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\phi - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right] + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right\}$$

$$\phi - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c} \sqrt{1-\beta^2} u_z A_z$$

$$\phi \rightarrow i\phi$$

$$= -\frac{1}{c} \left\{ u_z A_z + u_y A_y \right\} \sqrt{1-\beta^2}$$

$$= -\frac{1}{c} \left\{ \frac{v_i}{\cancel{\sqrt{1-\beta^2}}} + \frac{i c}{\cancel{\sqrt{1-\beta^2}}} i\phi \right\} \sqrt{1-\beta^2}$$

$$F_i = -\frac{q}{c} \sqrt{1-\beta^2} \left[-\frac{\partial}{\partial x_i} (u_z A_z) + \frac{dA_i}{dz} \right]$$

BS $K = K_i \sqrt{1-\beta^2}$

(8)

$$\frac{dp_i}{dt} = F_i \quad i \text{ di.}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}}}_{p_i} \right) = K_i \sqrt{1-\beta^2}$$

$$\underbrace{u_0 \frac{d}{dt}}_{K_0} (m u_0) = \frac{d}{d\tau} \left(\underbrace{\frac{1}{2} m u_i u_0}_{T. \text{ (sbt.)}} \right) = K_0 u_0$$

$$\Rightarrow K_0 u_0 = 0 = K_i u_i + K_y u_y$$

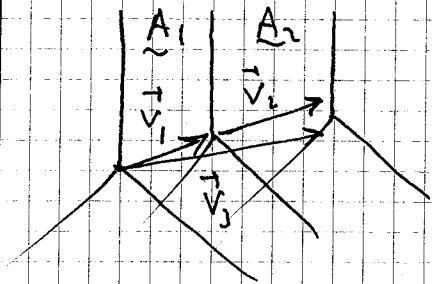
$$\frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{(\sqrt{1-\beta^2})^2} + \frac{\vec{r} \cdot c \vec{K}_y}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0$$

$$K_y = \frac{i}{c} \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Özel Rölativite

Problemler:

prb.1. $\beta_3 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}$ (6.20) oluğun gösterilecek!



$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & i\beta_1\gamma_1 \\ 0 & 0 & -i\beta_1\gamma_1 & \gamma_1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 & i\beta_2\gamma_2 \\ 0 & 0 & -i\beta_2\gamma_2 & \gamma_2 \end{bmatrix}$$

$\tilde{A}_3 = \tilde{A}_2 \tilde{A}_1$ 1'den 3'e

$$\tilde{A}_2 \tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 & i\beta_2\gamma_2 \\ 0 & 0 & -i\beta_2\gamma_2 & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & i\beta_1\gamma_1 \\ 0 & 0 & -i\beta_1\gamma_1 & \gamma_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 & i\beta_2\gamma_2 \\ 0 & 0 & -i\beta_2\gamma_2 & \gamma_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2) & i(\beta_1+\beta_2)\gamma_1\gamma_2 \\ 0 & 0 & -i(\beta_1+\beta_2)\gamma_1\gamma_2 & \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2) \end{bmatrix}$$

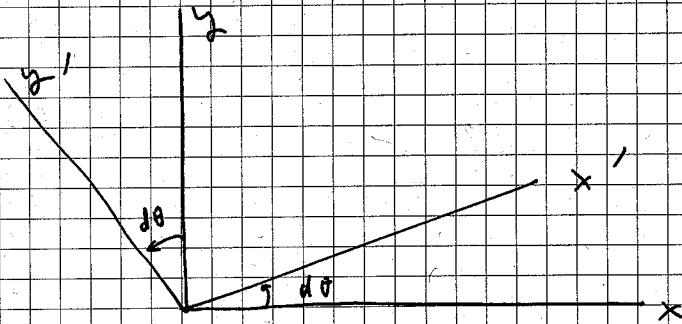
2

$$\gamma_3 = \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) \quad ; \quad i(\beta_1 + \beta_2) \gamma_1 \gamma_2 = i \beta_3 \gamma_3$$

$$\Rightarrow \cancel{\gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2)} = \cancel{i \beta_3} = \cancel{i(\beta_1 + \beta_2) \gamma_1 \gamma_2}$$

$$\beta_3 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} \quad \text{vege} \quad V_3 = \frac{V_1 + V_2}{1 + \frac{V_1 V_2}{c^2}}$$

6.2.



$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$z' = z$$

$$\cos \theta = 1 \quad \sin \theta = d\theta$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -d\theta & 0 \\ 0 & d\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underset{\sim}{A}$$

$$\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x'}$$

$$A^{-1} \underset{\sim}{x'} = \underset{\sim}{x}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d\theta & 0 \\ 0 & -d\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{A}^{-1} = \underset{\sim}{A}^T \quad \text{ik ortogonal} \\ \text{ki öyle.}$$

$$\underline{x}' = \underline{A} \underline{x} \quad \underline{x}'' = \underline{B} \underline{x}' \text{ olsun.}$$

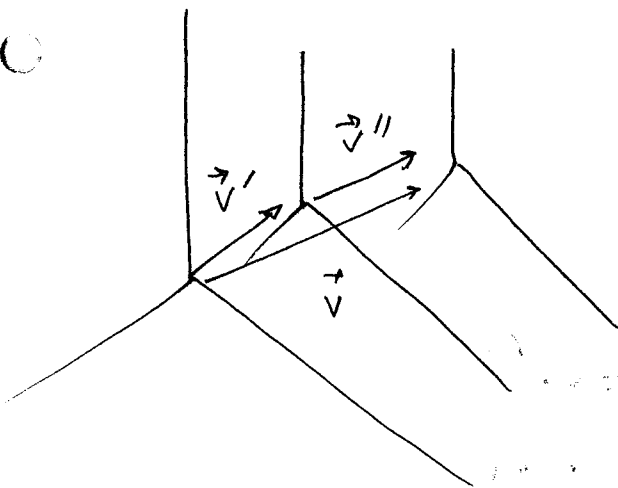
Her iki tarafı $\underline{A}^{-1}$ ile soldan çarpalım.

$$\underline{A}^{-1} \underline{x}'' = \underline{A}^{-1} \underline{B} \underline{A} \underline{x} = \underline{B}' \underline{x}$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\gamma \\ 0 & 0 & -i\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\underline{B}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -d\theta + \gamma d\theta & i\gamma d\theta \\ 0 & -d\theta + \gamma d\theta & \gamma & i\gamma \\ 0 & -i\gamma d\theta & -i\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

6.3.



$$\vec{v}' \uparrow \uparrow \vec{z}.$$

$$v = ?$$

1.'den 2.'ye dönüşüm

$$x_{\lambda}' = a_{\lambda\mu} x_{\mu}$$

$$\text{ters dönüşüm } x_{\lambda} = a_{\lambda\mu}^{-1} x_{\mu}'$$

$$a_{\lambda\mu}^{-1} = a_{\lambda\mu}^T$$

4

$$a_{\lambda\mu}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -i\beta\gamma \\ 0 & 0 & i\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix}$$

$$u_{\mu} = \frac{dx_{\mu}}{d\tau}$$

4' lü m_z.

$$u_{\mu} = \sum_{\nu} a_{\nu\mu} u_{\nu}$$

~~$$u_{\mu} = \sum_{\nu} a_{\nu\mu} u_{\nu}$$~~

$$u_{\mu}' = \sum_{\nu} a_{\nu\mu}^{-1} u_{\nu}$$

$$\left. \begin{matrix} u_1' = u_1 \\ u_2' = u_2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} u_3' = \gamma' (u_3 - i\beta' u_4) \\ u_4' = \gamma' (u_4 + i\beta' u_3) \end{matrix} \right. \quad \gamma' = 1/\sqrt{1-\beta'^2}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{\lambda\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \\ u_4' \end{pmatrix}$$

$$u_{\mu}' = (\gamma'' v'', i\gamma'' c) \quad \underline{3. \text{ den } 2' \text{ ge}}$$

$$u_1' = \gamma'' v_1''$$

$$u_1 = \gamma'' v_1''$$

$$u_2' = \gamma'' v_2''$$

$$u_2 = \gamma'' v_2''$$

$$u_3' = \gamma'' v_3''$$

$$u_3 = \gamma' \gamma'' (v_3'' + c\beta')$$

$$u_4' = i\gamma'' c$$

$$u_4 = \gamma' \gamma'' i c (1 + \beta' \beta_3'')$$

$$v_y = \frac{1}{\gamma} u_2 \text{ olduğuna göre ;}$$

$$u_1 = \gamma v_1$$

$$u_2 = \gamma v_2$$

$$u_3 = \gamma v_3$$

$$= \sqrt{1-\beta^2} \frac{1}{\sqrt{1-\beta'^2}} \cdot v_x''$$

BS K $v_x = \frac{1}{\gamma} u_1 = \frac{1}{\gamma} \gamma'' v_x''$ yanattık

$$u_4 = i \cancel{\gamma} \gamma' \gamma'' (1 + \beta' \beta_3'') = i \cancel{\gamma} \gamma \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta'^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta''^2}} \cdot (1 + \beta' \beta_3'')$$

$$u_x = \frac{\sqrt{1-\beta'^2}}{\sqrt{1-\beta''^2}} v_x'' = \frac{\sqrt{1-\beta'^2} \sqrt{1-\beta''^2}}{1 + \beta' \beta_3''} \cdot \frac{\cancel{v_x''}}{\cancel{\sqrt{1-\beta''^2}}}$$

$$u_x = \frac{v_x'' \sqrt{1-\beta'^2}}{1 + \beta' \beta_3''}$$

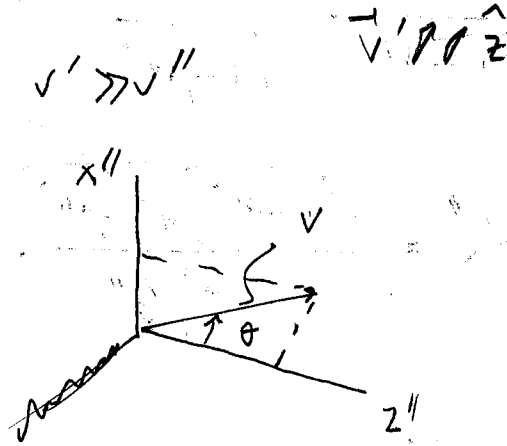
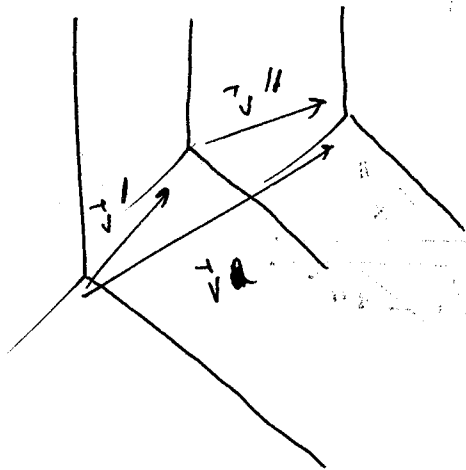
$$v_g = \frac{1}{\gamma} u_3 = \frac{1}{\gamma} \gamma' \gamma'' (v_3'' + c \beta') = \frac{\beta' + \beta_3''}{1 + \beta' \beta_3''}$$

$$v_y = \frac{1}{\gamma} u_2 = \frac{1}{\gamma} \gamma'' v_y'' = \frac{v_y'' \sqrt{1-\beta'^2}}{1 + \beta' \beta_3''}$$

6

prb. 4.

V'' : xz düzleminde ve v' 'ye göre sonsuz hızlı.

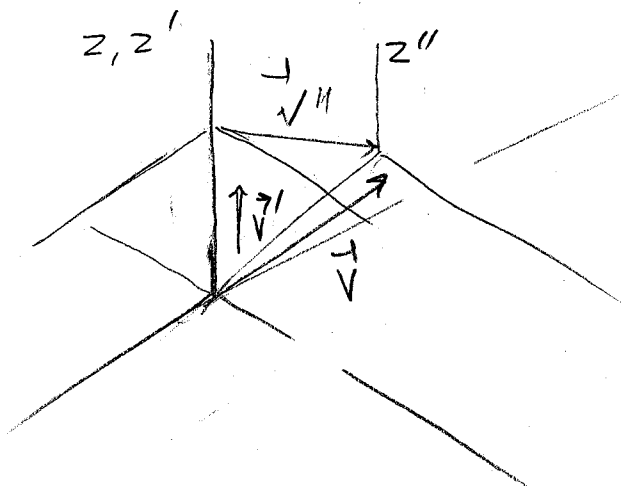


$$\tan \theta = \frac{v_x}{v_z} = \frac{\beta_x}{\beta_z} = \frac{\beta_x'' \sqrt{1-\beta'^2}}{1 + \beta' \beta_z''} \cdot \frac{1 + \beta' \beta_z''}{1 + \beta' \beta_z''} = \frac{\beta_x'' \sqrt{1-\beta'^2}}{\beta' + \beta_z''}$$

$\beta_z'' = \frac{v_z''}{c}$: v_z'' hızın. alması.

$$\tan \theta = \frac{\beta_x''}{\beta'} \frac{\sqrt{1-\beta'^2}}{1 + \beta_z''/\beta'} = \frac{\beta_x''}{\beta'} \left[1 - \frac{\beta'^2}{2} + \dots \right] = \frac{\beta_x''}{\beta'} - \frac{\beta'^2 \beta_x''}{2\beta'}$$

$d\theta = \frac{\beta_x''}{\beta'} - \frac{\beta'^2 \beta_x''}{2\beta'}$ $d\theta = -\frac{\beta'' \beta'}{2}$



$\vec{v}''$ (xz) düzleminde. Bütünleri
 $\vec{v}$ ($x''z''$) düzleminde.

prb. 5.

$$F_i = \frac{d}{dt} \frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (6.46)$$

$$F_i = m \frac{dv_i}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} + mv_i \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\frac{dv_i}{dt} = a_i$$

$$\frac{dV}{dt} = \beta \cdot \frac{d\beta}{dt}$$

$$F_i = \frac{ma_i}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{mv_i}{(1-\beta^2)^{3/2}} \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{a}$$

we $F_i = \frac{ma_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow$ kinetic energy same as in classical.

$$\vec{v} \cdot \vec{a} \Rightarrow v_i = \beta a_i$$

$$F_i = \frac{m}{(1-\beta^2)^{3/2}} \left[(1-\beta^2) a_i + \frac{v_i}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{a}) \right]$$

$$= \frac{m}{(1-\beta^2)^{3/2}} \left[a_i - \beta^2 a_i + \beta^2 a_i \right] = \frac{m a_i}{(1-\beta^2)^{3/2}} \quad \text{same result}$$

8

prb. 6.

$$a_x' = \frac{a_x}{1-\beta^2}, \quad a_y' = \frac{a_y}{1-\beta^2}, \quad a_z' = \frac{a_z}{(1-\beta^2)^{3/2}}$$

$$u_i = \frac{dx_i}{d\tau} = \frac{v_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \left(= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{dx_i}{dt} \right) \right)$$

$$\frac{du_i}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{dv_i}{d\tau} = \frac{dv_i/dt}{1-\beta^2} = \frac{a_i}{1-\beta^2}$$

prb. 7.

$$p_r = 1 \text{ MeV}/c \quad E_\gamma = 1 \text{ MeV}$$

$$p_e = 1.73 \text{ MeV}/c$$

$$E = mc^2 + E_e + E_\gamma$$

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^2$$

Özel Rölativite Fk Problemler:

①

prb. 1.) İki evrensel vektörün iç çarpımının Lorentz dönüşümüne göre invariant olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$P_\mu \equiv (P_1, P_4) \quad Q_\mu \equiv (Q_1, Q_4)$$

S eylemsizlik sist. 'inal tanımlı iki vektör olsun.

$$P_1' = P_1 \cos \phi + P_4 \sin \phi$$

$$Q_1' = Q_1 \cos \phi + Q_4 \sin \phi$$

$$P_2' = P_2$$

$$Q_2' = Q_2$$

$$P_3' = P_3$$

$$Q_3' = Q_3$$

$$P_4' = -P_1 \sin \phi + P_4 \cos \phi$$

$$Q_4' = -Q_1 \sin \phi + Q_4 \cos \phi$$

$$P'_\mu Q'_\mu = P_1' Q_1' + P_2' Q_2' + P_3' Q_3' + P_4' Q_4'$$

$$= (P_1 \cos \phi + P_4 \sin \phi)(Q_1 \cos \phi + Q_4 \sin \phi)$$

$$+ P_2 Q_2 + P_3 Q_3 + (-P_1 \sin \phi + P_4 \cos \phi)(-Q_1 \sin \phi + Q_4 \cos \phi)$$

$$= P_1 Q_1 + P_2 Q_2 + P_3 Q_3 + P_4 Q_4$$

$$= P_\mu Q_\mu$$

(2)

modül 25. hafta 2. soru

örb. 2. Bir P_μ evrensel vektörü ile, dörtlül bir Q_μ vektörünün skaler çarpımı Lorentz dönüşümüne göre invariant ise Q_μ ' da mutlaka bir evrensel vektör olacağını gösteriniz.

Çözüm:

$$P_\mu Q_\mu = P'_\mu Q'_\mu \quad \text{Lorentz invariant}$$

$$P_1 Q_1 + P_2 Q_2 + P_3 Q_3 + P_4 Q_4 = P'_1 Q'_1 + P'_2 Q'_2 + P'_3 Q'_3 + P'_4 Q'_4$$

P_μ evrensel,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P_1 Q_1 + P_2 Q_2 + P_3 Q_3 + P_4 Q_4 = (P_1 \cos \phi + P_4 \sin \phi) Q'_1 + P_2 Q'_2 + P_3 Q'_3 + (-P_1 \sin \phi + P_4 \cos \phi) Q'_4$$

$$= (Q'_1 \cos \phi - Q'_4 \sin \phi) P_1 + P_2 Q'_2 + P_3 Q'_3 + (Q'_1 \sin \phi + Q'_4 \cos \phi) P_4$$

$$\Rightarrow Q_1 = Q'_1 \cos \phi - Q'_4 \sin \phi$$

$$Q_4 = Q'_1 \sin \phi + Q'_4 \cos \phi$$

$$Q_2 = Q'_2$$

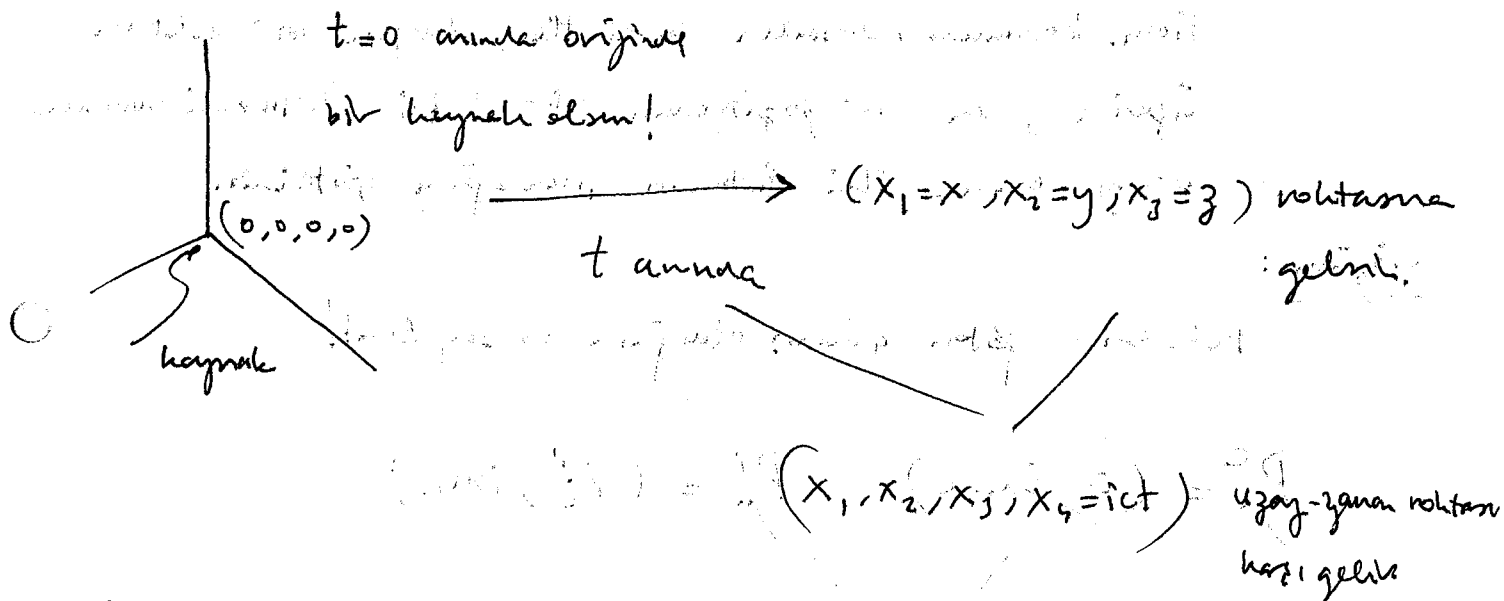
$$Q_3 = Q'_3$$

evrensel bir vektör.

$$\cos \phi = \gamma \quad ; \quad \sin \phi = i \beta \gamma$$

- Prb. 3.) Işığın yayılmasına karşı gelen 4'ü vektörün, teln bir evrensel vektör olduğunu gösteriniz.

Çözüm:



$$S^2 = R_\mu R_\mu = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - c^2 t^2 = R^2 - c^2 t^2$$

- R^2 (0 ile t) arasında ışıgın katetmiş olduğu uzaysal uzaklığı her iki durumda da aynıdır. $R = ct$ olduğundan $S^2 = 0$ olur.
- Hızı c olduğuna göre

$$R = ct = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = c \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\Rightarrow S^2 = R_\mu R_\mu = 0.$$

4

Prob. 4.) Maddesel bir tanele için tanımlanan enerji-momentum vektörü aşağıdaki gibidir:

$$P_\mu \equiv (P_i, imc) \equiv (\gamma m_0 \vec{u}, i\gamma m_0 c)$$

Norm. konumun ilkesinden hareketle, duran bir elektron üzerine gelen bir pozitronun birleşmesiyle yitirmeleri sonucu ortaya en az bir fotonun çıkacağını gösterir.

Çözüm:

tek bir foton çıkması elverişli değildir!!

$$P_\mu^e = (0, im_0 c) \quad P_\mu^p = (P_i^p, imc)$$

$$Q_\mu = \hbar K_\mu = \frac{h\nu}{c} (K_i, i) \quad \text{Enerji-mom vektörleri}$$

$$\text{Norm. konumu: } P_\mu^e + P_\mu^p = Q_\mu \quad (I)$$

$$\Rightarrow (P_\mu^e + P_\mu^p)(P_\mu^e + P_\mu^p) = (m_0 + m)^2 = 0$$

$$m_0 + m = 0$$

$$(I) \text{ 'in zamanlı bileşeni } c(m_0 + m) = \frac{h\nu}{c}$$

$$m_0 + m = \frac{h\nu}{c^2}$$

(II)

(III)

$v \neq 0 \Rightarrow$ uyumsuzlar.

en az iki fotonun çıkması olacağının varsayalım.

$$P_\mu^e + P_\mu^p = Q_\mu^1 + Q_\mu^2 \quad (\text{IV})$$

(IV)'ün normu.

$$m_0(m_0 + m) = \frac{h^2}{c^2} v_1 v_2 (1 - K_i^1 K_i^2)$$

ve zaman bileşeni,

$$m_0 + m = \frac{h v_1}{c} + \frac{h v_2}{c}$$

K_i^1 ve K_i^2 uygun değerler
recilerek bu bağışlarla
uygunlaştırılır.

Prb. 5.) $D_\mu \equiv (\partial_i, \partial_4)$ ile belirlenen 4'ün bir vektör olduğu

ve $\square^2 \equiv \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 - \frac{1}{c^2} \partial_4^2$ D'Alembert operatörünün

Çözüm: Lorentz dönüşümlerine göre invariant olduğu gösterilir.

$$X_\mu \equiv (X_i, X_4)$$

$$D_\mu X_\mu = \partial_i X_i + \partial_4 X_4 = \frac{\partial X_1}{\partial X_1} + \frac{\partial X_2}{\partial X_2} + \frac{\partial X_3}{\partial X_3} + \frac{\partial X_4}{\partial X_4} = 4 = \text{rbt.}$$

(invariant.) $P_\mu Q_\mu$ Lorentz invariant $\Rightarrow Q_\mu$ de bir evrensel
vektörler sonucunu çıkartmıştık.

X_μ : evrensel bir vektör $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ D_μ de evrensel vektördür!

D_μ 'nin normu da D_μ 'nin kendisi ile skaler çarpımı olduğu ve iki
vektörün skaler çarpımlarında Lorentz invariant olduğu bilindiğinden de
invarianttır.

$$D_\mu D_\mu = \square^2 = D_\mu' D_\mu' = \square'^2$$

analogous mapping from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$

$$(2) \quad \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}z^2 \quad (2)$$

analogous map (11)

$$\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2 \right) = 0 \quad (11)$$

analogous map from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$

analogous map from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$

analogous map

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}z^2$$

analogous map from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$ (11) $\Rightarrow$ (11) $\Rightarrow$ (11)

$$\text{analogous map from } \mathbb{R}^n \text{ to } \mathbb{R}^n \quad \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}z^2$$

analogous map from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$ (11) $\Rightarrow$ (11) $\Rightarrow$ (11)

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}z^2$$

$$\text{analogous map from } \mathbb{R}^n \text{ to } \mathbb{R}^n \quad \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}z^2$$

analogous map from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$ (11) $\Rightarrow$ (11) $\Rightarrow$ (11)

analogous map from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$

analogous map from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$ (11) $\Rightarrow$ (11) $\Rightarrow$ (11)

analogous map from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$ (11) $\Rightarrow$ (11) $\Rightarrow$ (11)

analogous map from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$ (11) $\Rightarrow$ (11) $\Rightarrow$ (11)

analogous map

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}z^2$$