

BÖLÜM 7

HAMILTON HAREKET DENKLEMLERİ

Bundan sonraki kesimlerde, mekanik sistemlerin holonom olduğunu ve kuvvetlerin ya sadece konuma bağlı ya da daha genel tartışılan tipte bize bağlı genelleştirilmiş potansiyellerden türediğini varsayacağız.

$$H = H(p, q, t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t)$$

H 'nin diferensiyeli,

$$dH = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (*)$$

$$\begin{aligned} dH &= \sum_i \left(\dot{q}_i dp_i + p_i dq_i \right) \\ &\quad - \sum_i \left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{p_i} dq_i + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{\dot{p}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned}$$

Lagrange denk. $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$

$$dH = \sum_i \left(\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (*)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \pi}{\partial p_i}$$

$$-\dot{p}_i = \frac{\partial \pi}{\partial q_i}$$

$$-\frac{\partial \pi}{\partial t} = \frac{\partial \pi}{\partial t}$$

Hamilton kanonik denklemleri

$(2n+1)$ bağıntı.

Örnek: Pek çok problemde kanonik momentümler fiziksel düşüncelerden çıkarılabilir. Bunu ek olarak π toplam enerji ise Hamilton hareket denklemleri elde ederken izlenen methodun adımları atlanabilir.

"Bir maddesel noktanın merkezsel kuvvet alan içindeki hareketini ele alalım".

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

$$\pi = T + V(r) \quad \text{toplam enerji.}$$

π 'nin r ve θ 'ye eşlenik momentümler alınarak elde edilmesi gerekir.

$$p_r = \frac{\partial \pi}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}$$

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

$$p_\theta = \frac{\partial \pi}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2}$$

$$\pi = \sum \dot{q}_i p_i - L$$

$$\pi = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m r^2} + V(r)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \end{aligned} \right\} \text{ yeni bilgi ihtiva ederler.}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\dot{p}_\theta = 0$$

Örnek:

$$T^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

$$\mathcal{H} = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} + V(r) \quad \text{bunu yazabilmek için } V(r) \text{ ın}$$

hızdan bağımsız olması gerekir.

Örnek: Bir maddesel nokta için,

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - q \phi + \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{v}$$

kanonik momentümler; $p_i = m v_i + \frac{q}{c} A_i$

$$\mathcal{H} = \sum_i p_i v_i - L$$

$$= m v^2 + \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - L$$

$$= \frac{1}{2} m v^2 + q \phi = T + q \phi$$

$$= \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + q \phi$$

7.4. Hamilton Hareket Denklemlerinin Değişim İlkesinden Giderilmesi:

$$\delta I \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

$$\equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(p, q, t) \right) dt = 0$$

$$\delta \sum_i \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i - \delta \int_{t_1}^{t_2} H dt = 0 \quad \text{Değiştirilmiş Hamilton İlkesi}$$

Bunlar α parametreye bağlı; α gerçel yönlüleri etkilerken aynıdır, üç noktalar $\alpha=0$ almalarıyla değişim ile yönlülerin izde kalır.

$$\delta \rightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha} d\alpha \Rightarrow$$

$$d\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i p_i \dot{q}_i - H(p, q, t) \right] dt \quad \text{zaman yönlülerinde sdt. Yani her yönlüye sınırlar aynı.}$$

$$d\alpha \int \left(\sum_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \dot{q}_i + p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right) \right) dt = 0$$

$$\int p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} dt = \int p_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha \partial t} dt = p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \Big|_0^2 - \int \dot{p}_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} dt$$

$$d\alpha \int \sum_i \left[\frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \dot{q}_i - p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right] dt = 0$$

$$d\alpha \int \sum_i \left[\frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \left(\dot{q}_i - \frac{\partial \pi}{\partial p_i} \right) - \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \left(\dot{p}_i + \frac{\partial \pi}{\partial q_i} \right) \right] dt = 0$$

$$\int \sum_i \left\{ \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial \alpha} d\alpha}_{\delta p_i} \left(\dot{q}_i - \frac{\partial \pi}{\partial p_i} \right) - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} d\alpha}_{\delta q_i} \left(\dot{p}_i + \frac{\partial \pi}{\partial q_i} \right) \right\} dt$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \pi}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \pi}{\partial q_i}$$

Prb.1. Hamilton formülasyonda derişel değişkenleri yk edip, iki nokta kütlelin merkezsel kınnet hareketi problemini kını mız.

$$L = \frac{1}{2}m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

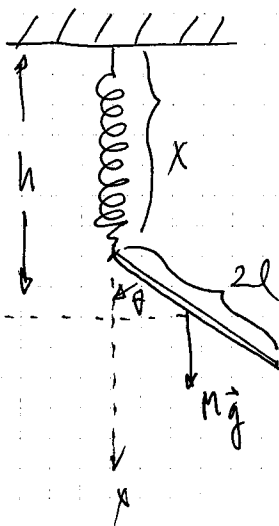
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = p_r = m\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = p_\theta = mr^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

prb. 7-2. Kütleli M uzunluğu ise $2l$ olan düzgin bir çubuk
 uından yay sist. i k olan yayla asılmıştır. Çubuk sadece bir
 dikey düzlemde serbestçe sekinir. yay ise sadece dikey doğrultu
 da hareket ederek selen kılarmıştır. sist. in Hamilton hareket
 denklemleri elde ediniz.



$$\text{Yayın pot. enerjisi} = V_1 = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\text{Çubuğun pot. } V_2 = M g (x + \underbrace{l \cos \theta}_h)$$

$$V = \frac{1}{2} k x^2 + M g (x + l \cos \theta) \quad \text{Hareket enerjisi}$$

yay $\rightarrow$ sist. kinetik.

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M l^2 \dot{\theta}^2$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k x^2 - M g (x + l \cos \theta)$$

$$\pi = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = p_x \dot{x} + p_\theta \dot{\theta} - L$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M \dot{x}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = M l^2 \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \pi = M \dot{x}^2 + M l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} M \dot{x}^2 - \frac{1}{2} M l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} k x^2 + M g (x + l \cos \theta)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M l^2 \dot{\theta}^2}_T + \underbrace{\frac{1}{2} k x^2 + M g (x + l \cos \theta)}_V$$

$$\pi = T + V$$

