BÖLÜM 10

KÜÇÜK SALINIMLAR

Kararlı denge durumu konumları civarında küçük salınımlar incelen cek. Bununla birlikte kararlı hareket civarında küçük salınımlar da işle mek mümkündür.

<u>10.1. Problemin Formülasyonu</u>: Potansiyel enerjinin sadece konumun fon olduğu korunumlu sistemleri inceleyelim. Sistemin $q_1, \dots, q_N$ genelleştirilm koordinatlarını tanımlayan dönüşüm denklemlerinin açık zaman bağımlılığı içer diğini varsayacağız. Böylece zaman-bağımlı bağ koşulları içerilmez.

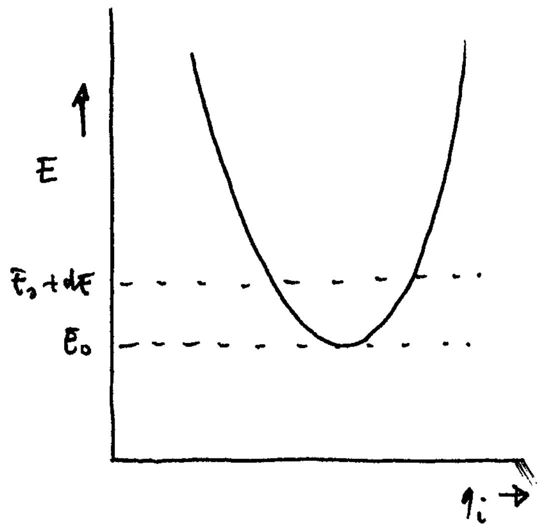
Sistem üzerine etki eden genelleştirilmiş kuvvetler

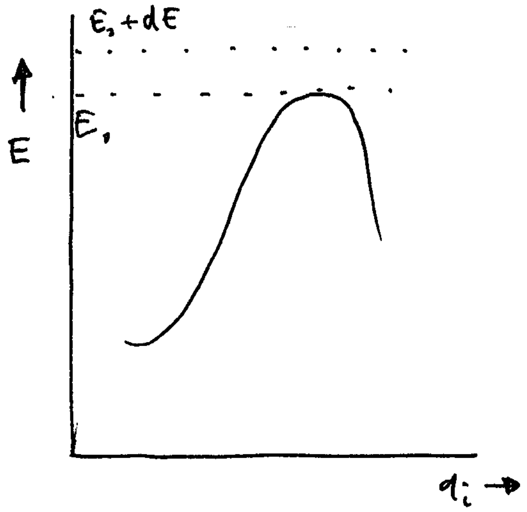
$$Q_i = \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 = 0$$

sıfır olduğu zaman sistemin <u>dengede</u> olduğu söylenir. Böylece pot. enerj sistemin $q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0n}$ denge konfigürasyonun'da bir extremum'a sahiptir. Başlangıçta konfigürasyon $\dot{q}_i$ başlangıç hızı (sıfır) ile denge konumunda ise müddetsiz olarak dengede kalacaktır. Dengede olan mekaniksel sistler: Durgun bir sarkaç, dikine duran bir yumurta, ..., .

(#) Bir denge durumu ; sist. in dengeden küçük bir ayrılması durgun konum civarında <u>bağlı</u> (küçük) hareketle sonuçlanırsa <u>kararlı</u> olarak, bağlı olmayan hare ketle sonuçlanırsa <u>kararsız</u> olarak sınıflandırılır. Sarkaç kararlı, yumurta kara V'nin ekstremumu <u>min.</u> ile <u>kararlı</u>.

BS K





Kendimizi bir kararlı denge konfigürasyonunun hemen komşuluğuna sist.'in hareketini sınırlayacağız. Dengeden ayrılmalar çok küçük olduğundan tüm fonk.'lar denge civarında Taylor serisine açılabilir: Genelleştirilmiş koordinatların η_i ile gösterilecek olan denge'den sapmalar:

$$q_i = q_{0i} + \eta_i \quad : \text{hareketin yeni genelleştirilmiş koord.}$$

$$V(q_1, \ldots, q_n) = V(q_{01}, \ldots, q_{0n}) + \cancel{\sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 \eta_i}^{\,0} + \frac{1}{2}\sum_{ij}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 \eta_i \eta_j + \cdots$$

Denge şartından dolayı η_i ile lineer orantılı terimler sıfır.

Denge konumunun pot. enerjisi: sıfır seçilebilir.

$$V = \frac{1}{2}\sum_{ij}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 \eta_i \eta_j = \frac{1}{2}\sum_{ij} V_{ij}\eta_i \eta_j \qquad V_{ij} = V_{ji} \text{ simetrik.}$$

BS K

Benzer seri açılımını kinetik enerji için yapabiliriz. Genelleştirilmiş koordinatlar açık zaman bağımlılığı içermediğinden

$$T = \frac{1}{2}\sum_{ij} m_{ij}\, \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2}\sum_{ij} m_{ij}\, \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$$

: q_i'lerin genel fonk.ları fakat denge konfigürasyonu civarında Taylor serisine açılabilir.

$$m_{ij} = m_{ij}(q_1, \dots, q_n)$$

$$= m_{ij}(q_{01}, \dots, q_{0n}) + \sum_k \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\right)_0 \eta_k + \cdots$$

$$T = \sum_{ij} \frac{1}{2} T_{ij}\, \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j \qquad \text{sym.}$$

$$L = \frac{1}{2}\sum_{ij}\left(T_{ij}\, \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - V_{ij}\, \eta_i \eta_j\right).$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0 \Rightarrow \sum_j T_{ij}\, \ddot{\eta}_j + \sum_j V_{ij}\, \eta_j = 0$$

10.2. Özdeğer denklemi ve ana eksen dönüşümü:

$$\sum_j \left(T_{ij}\, \ddot{\eta}_j + V_{ij}\, \eta_j\right) = 0 \quad \text{Sbt katsayılı lineer dif. denk. seti.}$$

$$\eta_i = C a_i e^{-i\omega t} \quad \text{tipli osilatör çözümleri denenir.}$$

$$\sum_j \left(V_{ij}\, a_j - \omega^2 T_{ij}\, a_j\right) = 0 \quad a_i\text{'lerde } n \text{ lineer homojen denk.}$$

$$\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} & \dots \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} & \dots \\ \vdots & & \end{vmatrix} = 0$$

BS K

Uygun genelleştirilmiş koord.ların kartezyen koord. olduğunu varsayalım. Kinetik enerji sadece hız bileşenlerinin karelerini içerir. Genelleştirilmiş koord.ları kartezyen bileşenlerin $1/\sqrt{m}$ ile çarpılmış hali olarak alalım.

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \dot{y}_i^2$$

$T_{ij} = \delta_{ij}$

$\omega^2 \rightarrow \lambda$ ile gösterilir ise: $\sum_j V_{ij} a_j = \lambda a_i \leftarrow \sum_j (V_{ij} a_j - \omega^2 T_{ij} a_j) = 0$ (10.10)

V_{ij} : $n \times n$ matrisinin elemanı

a_i : n-boyutlu bir $\vec{a}$ vek.nün bileşeni

$$\underset{\sim}{V}\,\underset{\sim}{a} = \lambda \underset{\sim}{a} \qquad V: \text{sym. \& reel.}$$

n özdeğere karşı gelen a_i'leri n kümesi $\underset{\sim}{A}$ matrisine dönüştürülür ise

$\underset{\sim}{A}$ benzerlik dönüşümü ile V'yi diagonalize eder.

$\underset{\sim}{a}$ (n özvektör) ~~diagonal~~ ortogonal. ve diagonalize eden matris $\underset{\sim}{A}$ ortogonal olur.

Bunların hepsi T_{ij}'nin diyagonal olması halinde geçerli.

(10.10) $Va = \lambda Ta$ bir özdeğer denk.i tipini temsil etmez.

(*) λ'ların V ve T'nin hermitik özelliğini sonucu olarak reel ve pozitif olduğunu göstereceğiz.

(*) $\underline{a}$'ların ortogonal oldukları'da gösterilecek.

(*) Özvektörler matrisi $\underset{\sim}{A}$ hem T'yi ve hem de V'yi köşegenleştireceği gösterilecek.

BS K

$\underset{\sim}{V}$ simetrik ve gerçel olduğu için, karşı gelen özdeğerlerde gerçeldir. n özdeğere karşı gelen n tane a_i takımı bir $\underset{\sim}{A}$ matrisi şeklinde konulur ise $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{V}$'yi benzerlik döm. yardımı ile köşegenleştirmelidir. Ayrıca n tane $\underset{\sim}{a}$ özvektörü birbirine diktir. Bunedenle $\underset{\sim}{A}$ ortogonal olmalıdır. Yukarıda bulunan sonuçlar T_{ij}'nin köşegen olmadığı haldede geçerlidir. Bu ispatlanabilir:

$$\underset{\sim}{V}\underset{\sim}{a} = \lambda \underset{\sim}{T}\underset{\sim}{a}$$

Bu denk.in sağlayacağı λ özdeğerlerinin $\underset{\sim}{T}$ ve $\underset{\sim}{V}$'nin hermite özelliğinden dolayı hepsinin reel ve pozitif olacağı gösterilecek. Ayrıca bir anlamda $\underset{\sim}{a}$ ların ort. oldukları da gösterilecek. Buna ek olarak özvektörlerin $\underset{\sim}{A}$ matrisi hem $\underset{\sim}{T}$'yi ve hem de $\underset{\sim}{V}$'yi köşegenleştirir. İlkini $\mathbb{I}$'ye diğer ikinciyi de köşegen elemanları λ olan bir matrise indirger.

a_{ik} : k. özvektörün j. bileşeni olsun. λ_k özdeğeri için $\underset{\sim}{V}\underset{\sim}{a} = \lambda \underset{\sim}{T}\underset{\sim}{a}$ denk.lerinden birisi

$$\sum_j V_{ij}\, a_{jk} = \lambda_k \sum_j T_{ij}\, a_{jk} \qquad / \, a_{il}^*$$

komp. eşleniği : $$\sum_i V_{ij}\, a_{il}^* = \lambda_l^* \sum_i T_{ij}\, a_{il}^* \qquad / \, a_{jk}$$

$$0 = (\lambda_k - \lambda_l^*) \sum_{ij} T_{ij}\, a_{jk}\, a_{il}^*$$

$$l = k \Rightarrow \quad (\lambda_k - \lambda_k^*) \underbrace{\sum_{ij} T_{ij}\, a_{jk}\, a_{ik}^*}_{\text{gerçek olduğunu gösterelim.}} = 0$$

BS K

$$a_{jk} = \alpha_{jk} + i\beta_{jk}$$

$$\Rightarrow \sum_{ij} T_{ij}\, a_{jk} a_{ik}^{*} = \sum_{ij} T_{ij}\, \alpha_{jk}\alpha_{ik} + \sum_{ij} T_{ij}\, \beta_{jk}\beta_{ik} + i\sum_{ij} T_{ij}\, \cancelto{0}{(\beta_{jk}\alpha_{ik} - \beta_{ik}\alpha_{jk})}$$

$\downarrow$ reel. ve sıfırdan farklı

$$\lambda_k = \lambda_k^{*}$$

Özdeğerler gerçek oldukları için $\sum_j V_{ij} a_{jk} = \lambda_k \sum_j T_{ij} a_{jk}$ ile tanımlanan a_{jk} özvektör bileşenlerinin oranları hep reel olmalıdır. Bunu a_{ik} ile çarpıp i üzerinden toplayalım.

$$\sum_{ij} V_{ij}\, a_{jk} a_{ik} = \lambda_k \sum_{ij} T_{ij}\, a_{ik} a_{jk}$$

$$\lambda_k = \frac{\sum V_{ij}\, a_{jk} a_{ik}}{\sum T_{ij}\, a_{ik} a_{jk}}$$

Bunun paydası a_{ik} hızları için kin. enerjinin 2 katına eşittir ve özvektörler gerçel olduğundan λ_k'ler pozitif tanımlı olmalıdırlar. Benzer şekilde a_{ik} koord. ları için pot. enerji pay'dır ve V'nin değerde min. olması şartı toplamın sıfır ya da pozitif olmasını gerektirir.

(*) pot. min. olmasa idi pay negatif olabilir bu da sanal frekanslar meydana getirirdi ki bu da kararsız hareket.

BS K

Özdeğerler ve özvektörlerin reel olduğu gözönüne alınarak

$$(\lambda_k - \lambda_\ell) \sum_{i,j} T_{ij}\, a_{i\ell}\, a_{jk} = 0$$

Karakteristik denk.in kökleri ayrıksa

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{ij} T_{ij}\, a_{i\ell}\, a_{jk} = 0 & \ell \neq k \\ \sum_{ij} T_{ij}\, a_{ik}\, a_{jk} = 1. & \end{array} \right.$$

n tane denk. vardır ve bunlar n tane $\vec{a}_k$ vek. ünün birer keyfi bileşenini tek değerli olarak seçerler.

$$\downarrow$$

$$\sum_{ij} T_{ij}\, a_{i\ell}\, a_{jk} = \delta_{\ell k}$$

Şimdilik hem $\sum_j (V_{ij} a_j - \omega^2 T_{ij} a_j) = 0$ ve hem de $\sum_{ij} T_{ij}\, a_{i\ell}\, a_{jk} = 0$ denk. lerini sağlayacak bir a_{jk} katsayılar takımının bulunabileceğini ifade etmek yetecektir.

$$\tilde{A}\, T\, A = 1 \qquad \tilde{A} A = \mathbb{1}. \Rightarrow A \text{ ortogonal.}$$

benzer ama burada $\underline{T}$ var.

kartezyen olmayan bir uzayda ~~ortogonallik~~ ortogonallik şartını gösterecek.

Adi ortogonallik şartı

$$\vec{a}_k \cdot \vec{a}_k = \sum_j a_{jk}^2 = 1. \qquad \vec{a}_\ell \cdot \vec{a}_k = \sum_j a_{j\ell}\, a_{jk} = 0 \quad \ell \neq k.$$

olmasını gerektirir.

T metrik tensörünün elemanlarını koord.'lardan bağımsız sbt.ler aldığımızda, eğik eksenli kartezyen olmayan bir uzayda $\bar{a}_k$ vektörünün uzunluğu

$$\bar{a}_k \cdot \bar{a}_k = \sum_{ij} T_{ij}\, a_{ik}\, a_{jk}$$

$$\vec{a}_\ell \cdot \vec{a}_k = \sum_{ij} T_{ij}\, a_{i\ell}\, a_{jk}$$ iç çarpım. böyle bir uzayda.

(#) $\tilde{A} T A = \mathbb{1}$. metrik tensörü $\underset{\sim}{T}$ olan uzayda $\underset{\sim}{A}$ için diklik şartı.

Kartezyen uzayda $\underset{\sim}{T} = \mathbb{1}$.'dir.

→ Benzerlik dönüşümü: $C' = B C B^{-1}$ idi.

→ $\underset{\sim}{C}$'nin $\underset{\sim}{A}$ ile kongruent dön: $C' = \tilde{A} C A$

$\underset{\sim}{A}$ ortogonal ise $\tilde{A} = A^{-1}$ iki tip dönüşüm arasında bir fark yok.

$\tilde{A} T A = 1$. kongruent dön. ile T'yi köşegenleştirir ($\mathbb{1}$ birim matris)

Eğer elemanları $\lambda_{\ell k} = \lambda_k \delta_{\ell k}$ olan bir $\|\lambda\|$ köşegen mat. kullanılırsa,

$$\sum_j V_{ij}\, a_{jk} = \sum_{j\ell} T_{ij}\, a_{j\ell}\, \lambda_{\ell k}$$

$$\downarrow$$

$$VA = TA\|\lambda\|$$

$$\tilde{A} V A = \tilde{A} T A \|\lambda\|$$

$= \|\lambda\|$ kongruent dön. ile V'yi elemanları λ_k olan köşegen matrise dönüştürür.

A matrisi hem T hem de V'yi aynı zamanda köşegenleştirir. Dönüşmüş metrik tensörün 1. olması gerçeği ile açıkça belirdiği gibi $\underset{\sim}{A}$'yı bir eğik eksen sist. inden kartezyen ortogonal eksenlere lineer dönüşümün matrisidir. Aynı zamanda yeni eksenler $\underset{\sim}{V}$'nin dik asal eksenleridir.

(7) Şimdi sadece karekteristik denk. in çok katlı kökleri haline bakalım. Bir ya da daha fazla kök çok katlı ise özdeğerler arasındaki bağımsız denk. lerin sayısının özvektörlerin bileşenlerinin oranını bile belirlemekte yetersiz olduğu görülür.

λ çift katlı kökse a_j bileşenlerinin herhangi ikisi keyfi seçilebilir. Geri kalanlarda özdeğer denk. i ile saptanır.

karekteristik denk. in
$$\begin{vmatrix} V_{11}-\lambda T_{11} & V_{12}-\lambda T_{12} \\ V_{12}-\lambda T_{12} & V_{22}-\lambda T_{22} \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(V_{12}-\lambda T_{12}\right)^2-\left(V_{11}-\lambda T_{11}\right)\left(V_{22}-\lambda T_{22}\right)=0$$

olarak ortaya çıktığı 2-boyutlu sist. i alalım.

Matris elemanlarının $\dfrac{V_{12}}{T_{12}}=\dfrac{V_{11}}{T_{11}}=\dfrac{V_{22}}{T_{22}}=\lambda_0$ olduğunu varsayalım.

$$\Rightarrow \quad \left(T_{12}^{\,2}-T_{11}T_{22}\right)\left(\lambda_0-\lambda\right)^2=0$$

bu yazımdan λ_0 karekteristik denk.in çift katlı bir köküdür.

BS K

Fakat bu kök için özdeğer denk. leri

$$\left(V_{11}-\lambda_0 T_{11}\right)a_1+\left(V_{12}-\lambda_0 T_{12}\right)a_2=0$$

$$\left(V_{12}-\lambda_0 T_{12}\right)a_1+\left(V_{22}-\lambda_0 T_{22}\right)a_2=0$$

şartlar dolayısıyla a'ların bütün katsayıları özdeş olarak sıfır olur. Bu halde iki a için herhangi değer takımı özdeğer denk. ini sağlar. Hatta normalleştirme şartı ile bile, çift katlı köke karşı gelen sonsuz sayıda özvektör bulunacaktır.

Sonsuz sayıdaki mümkün vektörlerden keyfi olarak seçilen bir özvektör çifti ortogonal olmayacaktır. Bununla beraber ortogonal olan mümkün bir vektör çiftini kurmak mümkündür ve bunlar A matrisini kurmak için kullanılabilirler. Çift katlı kök halinde ne yapacağız?

a_k' ve a_ℓ' : λ çift katlı kökü için herhangi iki müsaade edilen özvek. olsun.

a_k' normalize edilmiş olsun. a_k' ve a_ℓ' nün herhangi bir lineer bileşimi de λ için bir özvektör olacaktır.

$$a_\ell = c_1 a_k' + c_2 a_\ell'$$

Bileşen formunda

$$\sum_{ij} \Big/ \quad a_{i\ell} = c_1 a_{ik}' + c_2 a_{i\ell}' \quad \Big/ T_{ij} a_{jk}'$$

$$\underbrace{\sum_{ij} T_{ij} a_{i\ell} a_{jk}'}_{\text{ortogonallik şartına göre sıfır olmalı}} = c_1 + c_2 \sum_{ij} T_{ij} a_{i\ell}' a_{jk}'$$

$$\frac{c_1}{c_2} = -\sum_{ij} T_{ij} a_{i\ell}' a_{jk}'$$ } c_1, c_2 bu denk. ve a_ℓ'nün normalleştirme şartı ile elde edilebilir.

BS K

Hem a_l, hem de $a_k = a_k'$ öteki ayrık özdeğerlerin özvektörlerine otomatik olarak diktir. Çünkü $(\lambda_k - \lambda_l) \sum_{ij} T_{ij} a_{il} a_{jk} = 0$ ispatı bu halde geçerli kalır. Bu halde bileşenleri $\tilde{A} T A = 1$ denklemini sağlayan $\underset{\sim}{A}$ matrisini meydana getiren n tane a_j özvektöründen meydana gelen bir takımımız var.

Benzer bir methodla daha çok katlı kök için uygulanabilir. Eğer λ, m katlı bir kök ise, buna karşı gelen m tane $a_1', \dots, a_m'$ özvektörlerinin lineer bileşiminden ortonormal özvektörler kurulur. Bunların ilki a_1, a_1' nin bir katı seçilir. a_2, a_1' ve a_2' nün lineer bileşimi alınır ve böyle devam eder.... Bu şekilde sbt.lerin sayısı $\frac{1}{2} m(m+1)$ vektörlerin birim olma özelliği m tane şart getirir. $\frac{1}{2} m(m-1)$ tane de ortogonallik şartı bulunduğundan sbt.ler seçilebilir.

10.3. Serbest titreşimin frekansları ve normal koordinatlar.

Yaptığımız ispatlar hareket denklemlerinin tek bir frekans için değil, genel olarak n tane ω_k frekansı için $y_i = C a_i e^{-i\omega t}$ formunda salınım tipinde bir çözümle sağlanabileceğini gösteriyor. Bu nedenle hareket denk.lerinin tam bir çözümü bütün müsaade edilen frekanslardaki salınımların bir süperpozisyonunu içine bulundurur. Eğer sist. denge konumundan hafifçe ayrılmış ve sonra tekrar bırakılmışsa denge konumu etrafında $\omega_1 \dots \omega_n$ frekansları ile küçük titreşimler yapar. Bu nedenle ω_k'lar serbest titreşim frekansları ya da rezonans frekansları olarak adlandırılır.

$$y_i = \sum_k C_k a_{ik} e^{-i\omega_k t}$$

Her rezonans frekansı için bir C_k kompleks ölçü çarpanı var. Karakteristik denk.in her λ_k çözümü için $+\omega_k$, $-\omega_k$ frekansı var. a_k özvektörü ~~ail~~ her iki frekans için eş olacaktı. Fakat C_k^+ ve C_k^- ölçü çarpanları farklı olabilirdi. Bu nedenle,

$$\eta_i = \sum_k a_{ik} \left(C_k^+ e^{+i\omega_k t} + C_k^- e^{-i\omega_k t} \right)$$

Bununla birlikte gerçek hareket kompleks çözümün gerçel parçasıdır.

$$\eta_i = \sum_k f_k \, a_{ik} \cos(\omega_k t + \delta_k)$$

genlik ve faz başlangıç şartları ile belirlenir

A'nın ortogonallik özellikleri, başlangıç şartları cinsinden C_k ölçü çarpanlarının belirtilmesini büyük ölçüde kolaylaştırır. $t=0$ anında

$$\eta_i(0) = \sum_k \mathrm{Re}\, C_k \, a_{ik} \qquad (I)$$

Benzer şekilde hızların başlangıç değeri

$$\dot{\eta}_i(0) = \sum_k \mathrm{Im}\, C_k \, a_{ik} \, \omega_k \qquad (II)$$

Bu iki denk. ile C_k ların reel ve sanal parçaları bulunabilir. I'in her iki tarafını $T_{ij} a_{jl}$ ile çarpıp $\sum_{ij}$ yapalım.

$$\sum_{ij} T_{ij} \eta_i(0) a_{jl} = \sum_{ijk} \mathrm{Re}\, C_k \, T_{ij} \, a_{ik} \, a_{jl}$$

$$= \sum_k \mathrm{Re}\, C_k \, \delta_{kl}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\, C_l = \sum_{ij} T_{ij} \, \eta_i(0) \, a_{jl}$$

Benzer şekilde

$$\mathrm{Im}\, C_l = -\frac{1}{\omega_l} \sum_{ij} T_{ij} \, \dot{\eta}_i(0) \, a_{jl}$$

BS K

η_i 'nin tam çözümü çok katlı periyodik hareketin bir örneğidir. Özellikle basit tipte çok katlı periyodiklik olduğu doğrudur.; Çünkü çok katlı Fourier açılımının her teriminde temel frekanslardan yalnız biri vardır ve hiçbir harmonik terim yoktur. Bu basitleştirme bile şartlı olarak periyodiktir.; çünkü rezonans frekanslarının ortak böleni bulunmadıkça η_i başlangıç değerini tekrarlamayacaktır. O zaman η_i koord. ları genel halde prob. lemin herbiri basit olarak periyodik olan ayrım koord. ları değildir. Bununla beraber böyle bir periyodik koord. takımını η_i lerden bir nokta dönüşümü ile elde edebiliriz. η_i lere

$$\eta_i = \sum a_{ij} \zeta_j$$

şeklinde bağlı yeni bir koord. takımı tanımlayalım. $\|\eta\|$, $\|\zeta\|$ sütun matrisleri.

$$\|\eta\| = A\|\zeta\|$$

$$\begin{cases} V = \frac{1}{2}\sum_{ij} \eta_i V_{ij} \eta_j = \frac{1}{2}\|\tilde{\eta}\| V \|\eta\| \\ T = \frac{1}{2}\sum_{ij} \dot{\eta}_i T_{ij} \dot{\eta}_j = \frac{1}{2}\|\dot{\tilde{\eta}}\| T \|\dot{\eta}\| \end{cases} \qquad \|\tilde{\eta}\| = \widetilde{A\|\zeta\|} = \|\tilde{\zeta}\|\tilde{A}$$

$$V = \frac{1}{2}\|\tilde{\zeta}\|\tilde{A} V A\|\zeta\| = \frac{1}{2}\|\tilde{\zeta}\|\,\|\lambda\|\,\|\zeta\| = \frac{1}{2}\sum_k \omega_k^2 \zeta_k^2$$

$$T = \frac{1}{2}\|\dot{\tilde{\zeta}}\|\tilde{A} T A\|\dot{\zeta}\| = \frac{1}{2}\|\dot{\tilde{\zeta}}\|\,\|\dot{\zeta}\| = \frac{1}{2}\sum_k \dot{\zeta}_k^2$$

A: asal eksen dönüşümü meydana getirmiştir. Bu asal eksen dönüşümü, iki kuadratik formun birlikte köşegenleştirilmesi olarak bilinen cebrik işlemin özel bir örneğidir

Yeni Lagrange fonksiyonu,

$$L = \frac{1}{2} \sum_k \left(\dot{\xi}^2 - \omega_k^2 \xi^2 \right) \Rightarrow \ddot{\xi}_k + \omega_k^2 \xi_k = 0$$

$$\xi_k = C_k e^{-i\omega_k t}$$

Yeni koord. ların her biri rezonans frekanslarından sadece birini bulunduran basit periyodik bir fonk. dur. Bu nedenle ξ 'lar sist. in normal koord. ları olarak adlandırılır.

Her normal koord. sist. in sadece bir frekansla titreşimine karşı gelir ve şu bu bileşen salınımlarından titreşimin normal modları olarak sözedilir. Her modda bütün maddesel noktalar aynı frekansta ve fazda titreşirler.

BS K

Her normal modun ne ölçüde uyarıldığını iki etken belirler. Biri genelleştirilmiş Q_{0i} uyarıcı kuvvetidir. Eğer her maddesel nokta üzerine etkiyen kuvvetin bir özel modun titreşim doğrultusunda bileşeni yoksa moda karşı gelen genelleştirilmiş kuvvetin ve dolayısı ile Q_{0i}'nin sıfır olacağı açıktır. Bir dış kuvvetin bir normal modu uyarması ancak maddesel noktalar verilen mod doğrultusunda hareket ettirmesi ile mümkündür. İkinci etken uyarıcı kuvvetin frekansının, modun serbest frekansına yakın olmasıdır.

Tartışmamız kayıp ve sürtünme kuvvetlerinin bulunmadığını farzettiğimizden gerçeğe uymuyordu. Fiziksel sistemlerin çoğunda bu kuvvetler maddesel noktanın hızı ile orantılıdırlar ve

$$\mathbb{F} = \frac{1}{2}\sum_{ij} F_{ij}\,\dot{\eta}_i\,\dot{\eta}_j$$

kayıp fonk.undan türetilebilirler. $F_{ij}=F_{ji}$ ve koord.ların fonk.u. Denge komşuluğunda küçük titreşimlerle ilgilendiğimizden katsayılar bulunduklar[illegible] seriye açıp 1. terimi sbt tutmamız yeter. $2\mathbb{F}$'nin sürtünme kuvvetlerinden doğan enerji kaybının zamana göre türevi olduğu hatırlanırsa $\mathbb{F}$ hiç negatif olmaz ve dolayısı ile F_{ij}'ler pozitif veya sıfır olmalıdır. Lagrange denklemleri tarihim

$$\sum_j T_{ij}\ddot{\eta}_j + \sum_j F_{ij}\dot{\eta}_j + \sum_j V_{ij}\eta_j = 0$$

Bazen T ve V'yi köşegenleştiren asal eksen dönüşümü $\mathbb{F}$'yi de köşegenleştirebilir. Örneğin sürt. kuvveti hem maddesel noktanın kütlesine hemde hızı ile orantılı ise durum böyledir. Böyle ~~…~~ istisnai durumda

$$\ddot{\xi}_i + F_i\dot{\xi}_i + \omega_i^2\xi_i = 0$$

BS K

16

$$\xi_i = C_i\, e^{-i\omega_i' t}$$

$$\Rightarrow \omega_i'^2 + i\omega_i' F_i - \omega_i^2 = 0$$

$$\omega_i' = \pm\sqrt{\omega_i^2 - \frac{F_i^2}{4}} - i\,\frac{F_i}{2}$$

∴ hareket saf bir titreşim değil. ω_i' nin sanal parçası

$$e^{-i\omega_i' t} \longrightarrow e^{-F_i t/2}$$

Maddesel noktalar titreşirken sürtünme kuvvetlerine karşı iş yaparlar. ve sist.in enerjisi (dolayısı ile tit. genlikleri) zamanla azalmalıdırlar.

ω_i' 'nün reel parçasından sürtünmenin varlığının titreşim frekansınıda etkilediği gözükür. Kayıp küçükse ω_i' deki F_i^2 atılabilir ve salınımın frekansı sürtünmesiz değere iner. Bu halde

$$\xi_i = C_i\, e^{-i\omega_i t}\, e^{-F_i t/2}$$

(#) Kayıp fonk.u T ve V ile köşegenleşmiyorsa çözümün eldesi güçtür. Çözümün tabiatı aynı kalır. Üstel bir sönüm çarpanı ve salınım tipi bir üstel fonk.nun çarpımı.

$$\eta_i = C a_j\, e^{-i\omega t} = C a_j\, e^{-\chi t}\, e^{-2\pi i \nu t}$$

şeklinde çözümler arayalım.

BS K

$$\sum_j V_{ij} a_j - i\omega \sum_j \mathcal{F}_{ij} a_j - \omega^2 \sum_j T_{ij} a_j = 0$$

$\omega \to i\gamma$ yazarsak.

$$\sum_j V_{ij} a_j + \gamma \sum_j \mathcal{F}_{ij} a_j + \gamma^2 \sum_j T_{ij} a_j = 0$$

genellikle komp. olacak olan a_j ler γ (veya ω)'nın belli başlı değerleri için çözülebilir. Karşı gelen karakteristik denklemi değerlendirme işlemi yapmadan ω'nın sanal parçasının (γ'nın reel) daima negatif olması gerektiğini gösterebiliriz.

$$\sum_i \Big/ \sum_j V_{ij} a_j + \gamma \sum_j \mathcal{F}_{ij} a_j + \gamma^2 \sum_j T_{ij} a_j = 0 \Big/ a_i^*$$

$$\sum_{ij} V_{ij} a_j a_i^* + \gamma \sum_{ij} \mathcal{F}_{ij} a_i^* a_j + \gamma^2 \sum_{ij} T_{ij} a_i^* a_j = 0$$

$V_{ij}, T_{ij}, \mathcal{F}_{ij}$ 'nin simetrisi bu denklemdeki toplamları reel olduğunu söyler.

$$\sum_{ij} V_{ij} (\alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j) + \gamma \sum_{ij} \mathcal{F}_{ij} (\alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j) + \gamma^2 \sum_{ij} T_{ij} (\alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j) = 0$$

γ^* da bu denklemin bir kökü olmalı $\gamma + \gamma^*$ ise $2\mathrm{Re}\,\gamma$ dır.

$$\gamma + \gamma^* = 2\chi = -\frac{\sum \mathcal{F}_{ij} (\alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j)}{\sum T_{ij} (\alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j)}$$

χ sadece pozitif olabilir

BS K

Son olarak kayıp kuvvetlerinin varolması halinde zorlanmış titreşimleri ele alabiliriz. Uyaran kuvvetin zamanla değişimini; F_{0j} komp. olabilmek üzere

$$F_j = F_{0j}\, e^{-i\omega t}$$

Hareket denk.-i

$$\sum_j V_{ij} \eta_j + \sum_j \mathcal{F}_{ij} \dot{\eta}_j + \sum_j T_{ij} \ddot{\eta}_j = F_{0j}\, e^{-i\omega t}$$

Bu denk.-in $\eta_i = A_j e^{-i\omega t}$ şeklinde özel bir çözümünü ararsak

$$\sum_j A_j \left(V_{ij} - i\omega \mathcal{F}_{ij} - \omega^2 T_{ij} \right) = F_{0i}$$

Bu denk.-lerin çözümü Cramer kuralından

$$A_j = \frac{D_j(\omega)}{D(\omega)}$$

$D(\omega)$ ← A_j lerin katsayılar determinantı.

D_j : D de j. sütun yerine $F_{01}, \ldots, F_{0n}$ konulması ile elde edilen değiştirilmiş determinant.

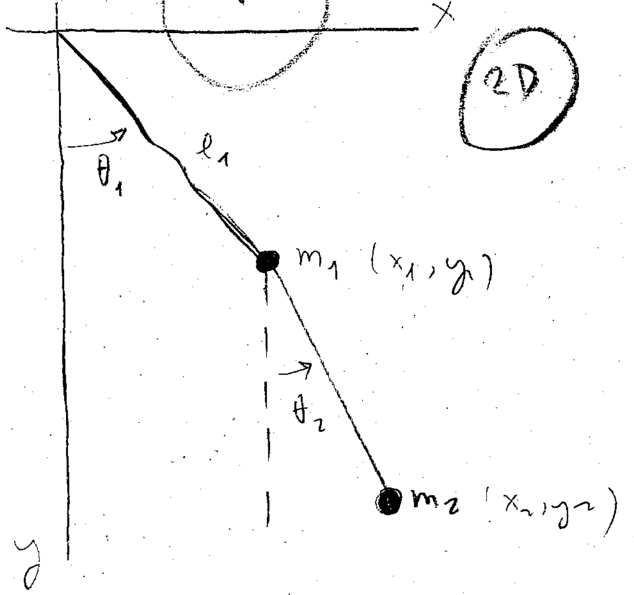
D : karakteristik denklemde ortaya çıkan determinant. Kökleri serbest titreşim modlarının $\omega_1 \ldots \omega_n$ kompleks frekansları. G sbt olmak üzere.

$$D(\omega) = G(\omega - \omega_1) \cdots (\omega - \omega_n)$$

$$= G \prod_{i=1}^{n} \left[2\pi (\nu - \nu_i) - i\chi_i \right]$$

BS K

prb. 10.1.)



2D

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$V_1 = m_1 g y_1$$

$$V_2 = m_2 g y_2$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots$$

$$x_1 = l_1 \sin\theta_1 \qquad \dot{x}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 = l_1 \dot{\theta}_1$$

$$x_2 = x_1 + l_2 \sin\theta_2 \qquad \dot{x}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2 = l_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2$$

$$y_1 = l_1 \cos\theta_1 \qquad \dot{y}_1 = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 = -\cancel{l_1 \dot{\theta}_1}$$

$$y_2 = y_1 + l_2 \cos\theta_2 \qquad \dot{y}_2 = -l_1 \dot{\theta}_1 \cancel{\sin\theta_1} - l_2 \dot{\theta}_2 \cancel{\sin\theta_2} = -\cancel{l_1 \dot{\theta}_1} - \cancel{l_2 \dot{\theta}_2}$$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 \left[l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \cancel{l_1^2 \dot{\theta}_1^2} \right] + \frac{1}{2} m_2 \left[(l_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2)^2 + \cancel{(l_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \cancel{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cancel{2} (l_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2)^2$$

$$T = \frac{1}{2} \left[\cancel{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \cancel{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \cancel{4} m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right]$$

$$V = V_1 + V_2 = m_1 g l_1 \left(1 - \frac{\theta_1^2}{2!}\right) + m_2 g \left[l_1 \left(1 - \frac{\theta_1^2}{2!}\right) + l_2 \left(1 - \frac{\theta_2^2}{2!}\right) \right]$$

$$V = (m_1 + m_2) g l_1 \left(1 - \frac{\theta_1^2}{2}\right) + m_2 g l_2 \left(1 - \frac{\theta_2^2}{2}\right)$$

$$L = T - V = L_0 + \frac{1}{2} \left[\cancel{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \cancel{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \left[(m_1 + m_2) g l_1 \theta_1^2 + m_2 g l_2 \theta_2^2 \right]$$

BS K

(2)

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} \cancel{2}(m_1+m_2)l_1^2 & \cancel{2}m_2 l_1 l_2 \\ \cancel{2}m_2 l_1 l_2 & \cancel{2}m_2 l_2^2 \end{pmatrix}$$

$$V_{ij} = \begin{pmatrix} (m_1+m_2)gl_1 & 0 \\ 0 & m_2 g l_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |V_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = \begin{vmatrix} \underbrace{(m_1+m_2)gl_1 - \omega^2 \cancel{2}(m_1+m_2)l_1^2} & \underbrace{-\cancel{2}\omega^2 m_2 l_1 l_2} \\ \underbrace{-\omega^2 \cancel{2} m_2 l_1 l_2} & \underbrace{m_2 g l_2 - \omega^2 \cancel{2} m_2 l_2^2} \end{vmatrix} = 0$$

$$\left[(m_1+m_2)gl_1 - \omega^2 \cancel{2}(m_1+m_2)l_1^2\right](m_2 g l_2 - \omega^2 \cancel{2} m_2 l_2^2) - \cancel{4}\omega^4 m_2^2 l_1^2 l_2^2 = 0$$

$$(m_1+m_2)m_2 g^2 l_1 l_2 - \omega^2 \cancel{2} m_2 (m_1+m_2) g l_1 l_2^2 - \omega^2 \cancel{2}(m_1+m_2)m_2 g l_1^2 l_2$$

$$+ \omega^4 \cancel{4} m_2 (m_1+m_2) l_1^2 l_2^2 - \cancel{4}\omega^4 m_2^2 l_1^2 l_2^2 = 0$$

$$\cancel{4}\left[(m_1+\cancel{m_2}) - \cancel{m_2}\right] m_2 l_1^2 l_2^2 \omega^4 - \cancel{2} m_2 (m_1+m_2) g l_1 l_2 (l_1+l_2)\omega^2 + m_2(m_1+m_2) g^2 l_1 l_2 = 0$$

$$\underbrace{\cancel{4} m_1 m_2 l_1^2 l_2^2}_{a} \omega^4 - \underbrace{\cancel{2} m_2 (m_1+m_2) g l_1 l_2 (l_1+l_2)}_{b} \omega^2 + \underbrace{m_2(m_1+m_2) g^2 l_1 l_2}_{c} = 0$$

$$a\Omega^2 + b\Omega + c = 0$$

$$b^2 - 4ac = \cancel{4} m_2^2 (m_1+m_2)^2 g^2 l_1^2 l_2^2 (l_1+l_2)^2 - \cancel{16} m_1 m_2^2 l_1^2 l_2^2 (m_1+m_2) g^2 l_1 l_2$$

$$= \cancel{4} m_2^2 g^2 l_1^2 l_2^2 (m_1+m_2)\left[(m_1+m_2)(l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2)\right] - \cancel{16} m_1 m_2^2 l_1^2 \cancel{l_2^2}(m_1+m_2) g^2 l_1 l_2$$

-2

$$= \cancel{4} m_2^2 g^2 l_1^2 l_2^2 (m_1+m_2)(m_1+m_2)(l_1-l_2)^2$$

$$\Omega_{1,2} = \frac{+\cancel{2} m_2 (m_1+m_2) g l_1 l_2 (l_1+l_2) \pm \cancel{2} m_2 (m_1+m_2)(l_1-l_2) g l_1 l_2}{\cancel{8} m_1 m_2 l_1^2 l_2^2}$$

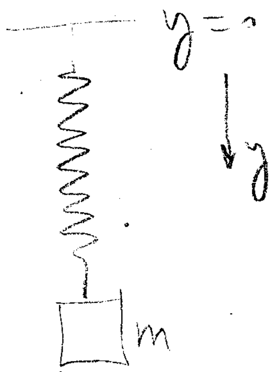
BS K

$$\Omega_+ = \frac{\cancel{2}\cancel{m_2}(m_1+m_2)g\cancel{l_1^2}\cancel{l_2}}{2\cancel{8}m_1\cancel{m_2}\cancel{l_1^2}l_2^{\cancel{2}}} = \frac{2(m_1+m_2)g}{\cancel{2}m_1 l_2} = \frac{2g}{\cancel{2}l_2}\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right) = \omega_+^2$$

$$\Omega_- = \frac{\cancel{4}\cancel{m_2}(m_1+m_2)g\cancel{l_1^2}\cancel{l_2^2}}{2\cancel{8}m_1\cancel{m_2}l_1^{\cancel{2}}\cancel{l_2^2}} = \frac{2(m_1+m_2)g}{\cancel{2}m_1 l_1} = \frac{2g}{\cancel{2}l_1}\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right) = \omega_-^2$$

$$l_1 = l_2 = l \Rightarrow \quad \omega_+^2 = \omega_-^2 = \frac{g}{2l}\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)$$

BS K



(1D)

$T=\frac{1}{2}m\dot{y}^2$

$V=mgy+\frac{1}{2}ky^2$

$$V(y)=V(y_0)+(y-y_0)\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{y=y_0}+\frac{1}{2!}(y-y_0)^2\left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{y=y_0}$$

$$=mgy_0+\frac{1}{2}ky_0^2+(y-y_0)(mg+ky_0)+\frac{1}{2}(y-y_0)^2k$$

$$=-mg(y-y_0)$$

$$=mgy_0+\frac{1}{2}ky_0^2+(y-y_0)(mg+ky_0)+\frac{1}{2}k(y-y_0)^2$$

$$=\cancel{mgy_0}+\frac{1}{2}ky_0^2+mgy-\cancel{mgy_0}-ky_0^2+\frac{1}{2}ky^2+\frac{1}{2}ky_0^2-kyy_0$$
$$+\cancel{kyy_0}\quad-\cancel{\frac{1}{2}ky_0^2}$$

$$=mgy+\frac{1}{2}ky^2$$

$$mg(y-y_0)+\frac{1}{2}k(y-y_0)^2$$

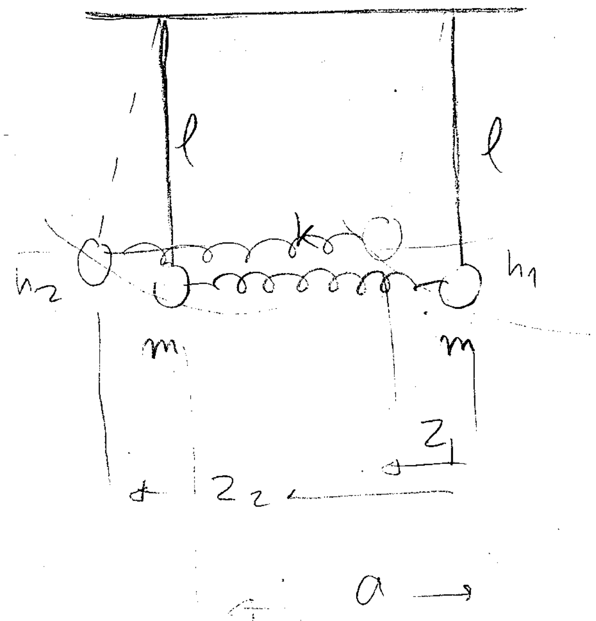
$$V(y)=0+(y-y_0)\left[mg+k(y-y_0)\right]_{y_0}+\frac{1}{2}(y-y_0)^2k\Big|_{y_0}$$

$$=(y-y_0)mg+\frac{1}{2}k(y-y_0)^2$$

$V-V_0=\frac{1}{2}ky^2 \qquad T=\frac{1}{2}m\dot{y}^2 \Rightarrow |V-\omega^2T|=k-\omega^2m=0$

$\boxed{\Rightarrow \omega^2=\frac{k}{m}}$

BS K



$$T=\frac{1}{2}m(\dot{z}_1^2+\dot{h}_1^2)+\frac{1}{2}m(\dot{z}_2^2+\dot{h}_2^2)$$

$$V=mg(h_1+h_2)+\frac{1}{2}k(z_2-z_1-a)^2$$

$$h_1=l(1-\cos\theta_1)\simeq\frac{l\theta_1^2}{2}$$

$$h_2=l(1-\cos\theta_2)\simeq\frac{l\theta_2^2}{2}$$

$$z_1=l\sin\theta_1\simeq l\theta_1$$

$$z_2=a+l\sin\theta_2\simeq a+l\theta_2$$

$$\dot{h}_1\equiv l\theta_1\dot{\theta}_1$$
$$\dot{h}_2\equiv l\theta_2\dot{\theta}_2$$

$$T=\frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\theta}_1^2+\cancel{\frac{1}{4}l^2\dot{\theta}_1^2\theta_1^2}+l^2\dot{\theta}_2^2+\cancel{\frac{l^2}{4}\dot{\theta}_2^2\theta_2^2}\right)$$

$$\dot{h}_1=l\theta_1\dot{\theta}_1$$
$$\dot{h}_1^2\sim 0$$

$$T=\frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\theta}_1^2+l^2\dot{\theta}_2^2\right)$$

$$V=\frac{1}{2}mgl(\theta_1^2+\theta_2^2)+\frac{1}{2}k(l\theta_2-l\theta_1)^2$$

$$V=\begin{pmatrix} mgl+kl^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & mgl+kl^2 \end{pmatrix}$$

$$T=\begin{pmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{pmatrix}$$

$$|V-\omega^2\mathbb{T}|=\begin{vmatrix} mgl+kl^2-\omega^2 ml^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & mgl+kl^2-\omega^2 ml^2 \end{vmatrix}=0$$

BS K

$$\left(mgl + kl^2 - \omega^2 ml^2\right)^2 - k^2 l^4 = 0$$

$$mgl + kl^2 - \omega^2 ml^2 = \mp kl^2$$

$$-\omega_+^2 ml^2 + mgl + \cancel{kl^2} = \cancel{kl^2}$$

$$\boxed{\omega_+^2 = \frac{\cancel{m}g\cancel{l}}{\cancel{m}l^{\cancel{2}}} = \frac{g}{l}}$$

$$-\omega_-^2 ml^2 + mgl + kl^2 = -kl^2$$

$$\omega_-^2 ml^2 = mgl + 2kl^2 \Rightarrow \boxed{\omega_-^2 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}$$

BS K

Çift Sarkaç ; $m = l = g = 1$

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2\right) \qquad V_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \\ -\epsilon & 1 \end{pmatrix}$$

$$V = \frac{1}{2}\left(\theta_1^2 + \theta_2^2 - 2\epsilon\theta_1\theta_2\right) \qquad T_{ij} = \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|V - w^2 \mathbb{I}| = \begin{vmatrix} 1-w^2 & -\epsilon \\ -\epsilon & 1-w^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-w^2)^2 - \epsilon^2 = 0 \Rightarrow 1 - w^2 = \pm\epsilon \Rightarrow w = 1 \mp \epsilon \qquad \epsilon \ll 1$$

$$\longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\left(1 \mp \frac{1}{2}\epsilon\right)$$

$$(\underset{\sim}{V} - \omega^2 \underset{\sim}{T})\underset{\sim}{q} = 0 \Rightarrow \left.\begin{aligned} \pm\epsilon\theta_1 - \epsilon\theta_2 &= 0 \\ -\epsilon\theta_1 \pm \epsilon\theta_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \frac{\theta_1}{\theta_2} = \pm 1$$

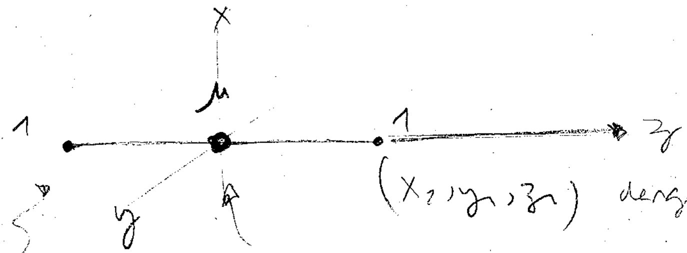
$\epsilon > 0$ farzedildiğinden $\theta_1/\theta_2 = +1 \Rightarrow$ iki sarkaç beraberce herhangi biri tekbaşına olduğu zamanlardan daha küçük bir açısal frekansla

$\theta_1/\theta_2 = -1 \Rightarrow$ her iki sarkaçta zıt yönlerde kaplaşma halde-
linden daha büyük frekansla salınırlar

Genel salınım her iki salınımın modlarının süperpozisyonudur. Herbir sarkacın salınımı genel olarak bir vurgu görünümü verir.

BS K

CO_2 benzeri molekül :



(x_2, y_2, z_2) denge konumlarından sapmalar.

(x_1, y_1, z_1) (x_3, y_3, z_3)

μ koord. takımının başlangıcı.

Bu sistemde lineer mom. sıfırdır.

$$\dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \mu \dot{x}_3 = 0 \qquad x_3 = -\frac{1}{\mu}(x_1 + x_2)$$

$$\dot{y}_1 + \dot{y}_2 + \mu \dot{y}_3 = 0 \qquad y_3 = -\frac{1}{\mu}(y_1 + y_2)$$

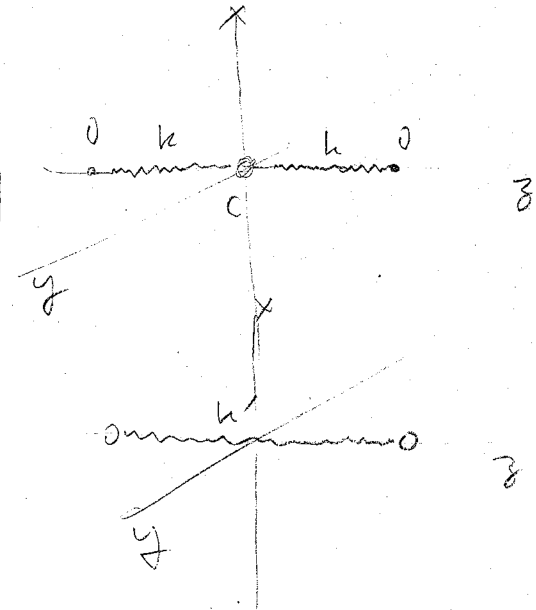
$$\dot{z}_1 + \dot{z}_2 + \mu \dot{z}_3 = 0 \qquad z_3 = -\frac{1}{\mu}(z_1 + z_2)$$

Bir titreşim sırasında atomun merkezi merkezden sonsuz küçük yerdeğiştirme yapacağından ve diğer iki atom yalnızca sonlu büyüklükte bir açısal mom. kadar katkıda bulunacağından

$$\left.\begin{aligned} L_x &= a(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) = 0 \\ L_y &= a(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{y}_2 \quad & \dot{x}_1 &= \dot{x}_2 \\ y_1 &= y_2 \quad & x_1 &= x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_3 &= -\frac{2}{\mu} x_1 \\ y_3 &= -\frac{2}{\mu} y_1 \end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) + \frac{1}{2}\mu(\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2)$$

$$V = \frac{1}{2}k\left[(z_1 - z_3)^2 + (z_2 - z_3)^2\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\chi\left[(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2\right]$$
$$+ \frac{1}{2}k'(z_2 - z_1)^2$$



$$\frac{1}{2}k'(z_1^2 + z_2^2 - 2z_1 z_2)$$

BS K

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2\right) + \frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_2^2\right) + \frac{1}{2}\mu\left(\frac{4}{\mu^2}\dot{x}_1^2 + \frac{4}{\mu^2}\dot{y}_1^2 + \frac{1}{\mu^2}\left(\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2 + 2\dot{z}_1\dot{z}_2\right)\right)$$

$$= \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2\right) + \frac{2}{\mu}\left[\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \frac{1}{4}\left(\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2 + 2\dot{z}_1\dot{z}_2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 + \frac{4}{\mu}\right)\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\left(\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2\right) + \frac{1}{\mu}\dot{z}_1\dot{z}_2$$

$$V = \frac{1}{2}k\left\{\left[z_1 + \frac{1}{\mu}(z_1 + z_2)\right]^2 + \left[z_2 + \frac{1}{\mu}(z_1 + z_2)\right]^2\right\}$$

$$+ \frac{1}{2}\chi\left\{\left[x_1 + \frac{2}{\mu}x_1\right]^2 + \left[y_1 + \frac{2}{\mu}y_1\right]^2 + \left[x_1 + \frac{2}{\mu}x_1\right]^2 + \left[y_1 + \frac{2}{\mu}y_1\right]^2\right\}$$

$$+ \frac{1}{2}k'(z_1 - z_2)^2$$

$$= \frac{1}{2}k\left\{\left[\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)z_1 + \frac{1}{\mu}z_2\right]^2 + \left[\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)z_2 + \frac{1}{\mu}z_1\right]^2\right\}$$

$$+ \frac{1}{2}\chi\left\{2\left(1 + \frac{2}{\mu}\right)^2 x_1^2 + 2\left(1 + \frac{2}{\mu}\right)^2 y_1^2\right\}$$

$$+ \frac{1}{2}k'(z_1 - z_2)^2$$

$$= \frac{1}{2}k\left[\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^2 z_1^2 + \frac{1}{\mu^2}z_2^2 + \frac{2}{\mu}\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)z_1 z_2\right.$$

$$\left.\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^2 z_2^2 + \frac{1}{\mu^2}z_1^2 + \frac{2}{\mu}\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)z_1 z_2\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\chi\left[2\left(1 + \frac{2}{\mu}\right)^2\left(x_1^2 + y_1^2\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}k'(z_1 - z_2)^2$$

$$= \frac{1}{2}k\left[\left(1 + \frac{1}{\mu^2} + \frac{2}{\mu} + \frac{1}{\mu^2}\right)\left(z_1^2 + z_2^2\right) + \frac{4}{\mu}\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)z_1 z_2\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\chi\left[2\left(1 + \frac{2}{\mu}\right)^2\left(x_1^2 + y_1^2\right)\right]$$

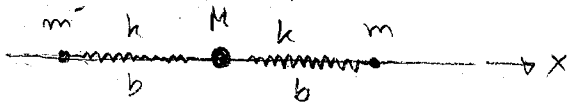
$$+ \frac{1}{2}k'(z_1 - z_2)^2$$

BS K

prb. 10.2.)

2D

1



$$V = \frac{1}{2}k\left[(x_2-x_1-b)^2+(x_3-x_2-b)^2\right]$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_3^2\right)+\frac{1}{2}M\dot{x}_2^2$$

$m(x_1+x_3)+Mx_2=0$; K.M. 'nin kararlı kalacağı şartı

$$y_1 = x_2 - x_1$$
$$y_2 = x_3 - x_2$$
$$x_2 = -\frac{m}{M}(x_1+x_3)$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_3^2\right)+\frac{1}{2}\cancel{M}\frac{m^2}{M^{\cancel{2}}}\left(\dot{x}_1+\dot{x}_3\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left[\dot{x}_1^2+\dot{x}_3^2+\frac{m}{M}\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_3^2+2\dot{x}_1\dot{x}_3\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}m\left[\left(1+\frac{m}{M}\right)\dot{x}_1^2+\left(1+\frac{m}{M}\right)\dot{x}_3^2+2\frac{m}{M}\dot{x}_1\dot{x}_3\right]$$

$$= \frac{1}{2}m\left[\left(1+\frac{m}{M}\right)\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_3^2\right)+2\frac{m}{M}\dot{x}_1\dot{x}_3\right]$$

$$\cancel{V = \frac{1}{2}k\left[\left(-\frac{m}{M}(x_1+x_3)-x_1-b\right)^2+\left(x_3+\frac{m}{M}(x_1+x_3)-b\right)^2\right]}$$

$$= \frac{1}{2}k\left[\left(x_1+\frac{m}{M}(x_1+x_3)+b\right)^2+\left(x_3+\frac{m}{M}(x_1+x_3)-b\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}k\left\{\left[\left(1+\frac{m}{M}\right)x_1+\frac{m}{M}x_3+b\right]^2+\left[\left(1+\frac{m}{M}\right)x_3+\frac{m}{M}x_1-b\right]^2\right\}$$

$$-y_1 = -\frac{m}{M}(x_1+x_3)-x_1 = +\left(1+\frac{m}{M}\right)x_1+\frac{m}{M}x_3$$

$$y_2 = x_3+\frac{m}{M}(x_1+x_3) = \left(1+\frac{m}{M}\right)x_3+\frac{m}{M}x_1$$

$$-\left(\frac{M}{m+M}\right)y_1 = x_1+\frac{m}{\cancel{M}}\left(\frac{\cancel{M}}{m+M}\right)x_3$$

$$\frac{M}{m}y_2 = x_1+\frac{\cancel{M}}{m}\,\frac{m+M}{\cancel{M}}\,x_3$$

$$\frac{M}{m}y_2+\frac{M}{m+M}y_1 = x_3\left(\frac{m+M}{m}-\frac{m}{M+m}\right) = x_3\,\frac{(m+M)^2-m^2}{m(m+M)} = \frac{M^2+2mM}{m(m+M)}\,x_3$$

BS K

(2)

$$x_3 = \frac{m(m+M)}{M(M+2m)}\left[\frac{M}{m+M}y_1 + \frac{M}{m}y_2\right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{M}(2m+M)}\left[m\cancel{M}y_1 + \cancel{M}(m+M)y_2\right]$$

$$\boxed{x_3 = \frac{1}{2m+M}\left[m(y_1+y_2)+My_2\right]}$$

$$\cancel{x_1 = \frac{M}{m}y_2 - \frac{m+M}{m}x_3}$$

$$= \frac{M}{m}y_2 - \frac{m+M}{m}\frac{1}{2m+M}\left[m(y_1+y_2)+My_2\right]$$

$$= -\frac{m+M}{2m+M}(y_1+y_2) + \left[\frac{M}{m}\frac{m+M}{2m+M}+\frac{M}{m}\right]y_2$$

$$= -\frac{m+M}{2m+M}(y_1+y_2) + \frac{M}{m}\left(\frac{(m+M)m+M(2m+M)}{2m+M}\right)y_2$$

$$= -\frac{m+M}{2m+M}y_1 + \frac{1}{2m+M}\left[\frac{M}{m}\left[(m+M)m+M(2m+M)\right] - (m+M)\right]y_2$$

$$y_2 - y_1 = x_3 - 2x_2 + x_1 \qquad y_2 + y_1 = x_3 - x_1$$

$$= x_1 + x_3 + 2\frac{m}{M}(x_1+x_3)$$

$$= \left(1+2\frac{m}{M}\right)(x_1+x_3) = \frac{M+2m}{M}(x_1+x_3)$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_3^2\right) + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left[(\dot{x}_3-\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_3+\dot{x}_1)^2\right] + \frac{1}{2}\cancel{M}\frac{m^2}{M^{\cancel{2}}}(\dot{x}_1+\dot{x}_3)^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left[(\dot{x}_3-\dot{x}_1)^2 + \left(1+\frac{m}{M}\right)(\dot{x}_1+\dot{x}_3)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}m\left[(\dot{y}_1+\dot{y}_2)^2 + \left(1+\frac{m}{M}\right)\frac{M^2}{(M+2m)^2}(\dot{y}_2-\dot{y}_1)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}m\left[\dot{y}_1^2+\dot{y}_2^2+2\dot{y}_1\dot{y}_2 + \frac{M+m}{\cancel{M}}\frac{M^{\cancel{2}}}{(M+2m)^2}\left(\dot{y}_2^2+\dot{y}_1^2-2\dot{y}_1\dot{y}_2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}m\left[\left(1+\frac{M(M+m)}{(M+2m)^2}\right)\dot{y}_1^2 + \left(1+\frac{M(M+m)}{(M+2m)^2}\right)\dot{y}_2^2 + 2\left(1-\frac{M(M+m)}{(M+2m)^2}\right)\dot{y}_1\dot{y}_2\right]$$

$$\frac{\cancel{M^2}+4m^2+4mM+M^2+mM}{(M+2m)^2} = \frac{2M^2+4m^2+5mM}{(M+2m)^2} \qquad \frac{\cancel{M^2}+4m^2+4mM-\cancel{M^2}-mM}{(M+2m)^2} = \frac{4m^2+3mM}{(M+2m)^2}$$

BS K

$$T = \frac{1}{2}\left(T_{11}\dot{y}_1^2 + T_{22}\dot{y}_2^2 + T_{12}\dot{y}_1\dot{y}_2 + T_{21}\dot{y}_2\dot{y}_1 \right)$$

$$T_{11} = m\left(1 + \frac{M(m+M)}{(M+2m)^2}\right) = T_{22} \qquad \mathbb{T} = \begin{pmatrix} m\left(1+\frac{M(m+M)}{(M+2m)^2}\right) & m\left(1-\frac{M(m+M)}{(M+2m)^2}\right) \\ m\left(1-\frac{M(m+M)}{(M+2m)^2}\right) & m\left(1+\frac{M(m+M)}{(M+2m)^2}\right) \end{pmatrix}$$

$$T_{12} = T_{21} = m\left(1 - \frac{M(m+M)}{(M+2m)^2}\right)$$

$$V = \frac{1}{2}k\left[(y_1-b)^2 + (y_2-b)^2\right] \qquad \mathbb{V} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

$$|\mathbb{V} - \omega^2\mathbb{T}| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} k - \omega^2 m\left(1+\frac{M(m+M)}{(M+2m)^2}\right) & -\omega^2 m\left(1-\frac{M(m+M)}{(M+2m)^2}\right) \\ -\omega^2 m\left(1-\frac{M(m+M)}{(M+2m)^2}\right) & k-\omega^2 m\left(1+\frac{M(m+M)}{(M+2m)^2}\right) \end{vmatrix} = 0$$

$$+\omega^4 m^2\left(1-\frac{M(m+M)}{(M+2m)^2}\right)^2 - \left[k-\omega^2 m\left(1+\frac{M(m+M)}{(M+2m)^2}\right)\right]^2 = 0$$

$$\omega^4 m^2\left[\left(1-\frac{M(m+M)}{(M+2m)^2}\right)^2 - \left(1+\frac{M(m+M)}{(M+2m)^2}\right)^2\right]$$

$$(1-x)^2-(1+x)^2$$

$$\cancel{1}+\cancel{x^2}-2x \; \cancel{-1}-x^2-2x$$

$$-4x$$

$$+\omega^2 2km\left(1+\frac{M(m+M)}{(M+2m)^2}\right) - k^2 = 0$$

$$+\omega^4 m^2 4\frac{M(m+M)}{(M+2m)^2} - \omega^2 2km\left(1+\frac{M(m+M)}{(M+2m)^2}\right) + k^2 = 0$$

$$a\Omega^2 - b\Omega + k^2 = 0$$

BS K

(4)

$$b^2-4ac = 4k^2m^2\left(1+\frac{M(m+M)}{(M+2m)^2}\right)^2 - 16k^2m^2\,\frac{M(m+M)}{(M+2m)^2}$$

$$= 4k^2m^2(1+x)^2 - 16k^2m^2x$$

$$= 4k^2m^2\left[(1+x)^2-4x\right] = 4k^2m^2(1+x^2+2x-4x)$$

$$= 4k^2m^2\left(1-\frac{M(m+M)}{(M+2m)^2}\right)^2$$

$$\Omega_{1,2} = \frac{2km\left(1+\frac{M(m+M)}{(M+2m)^2}\right) \pm 2km\left(1-\frac{M(m+M)}{(M+2m)^2}\right)}{8m^2\,\frac{M(m+M)}{(M+2m)^2}}$$

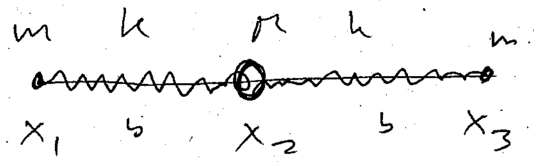
$$\Omega_+ = \frac{4k\cancel{m}\,(M+2m)^2}{8m^{\cancel{2}}(m+M)M} \qquad \Omega_- = \frac{4k\cancel{m}\,\cancel{M}\,\cancel{(m+M)}/\cancel{(M+2m)^2}}{8m^{\cancel{2}}\,\cancel{M}\,\cancel{(m+M)}/\cancel{(M+2m)^2}}$$

$$\omega_-^2 = \frac{k}{2m} \qquad \omega_+^2 = \frac{k}{2mM}\cdot\frac{(M+2m)^2}{(M+m)} \qquad \frac{(M+m)^2+m}{M+m}$$

$$\omega_3^2 = \frac{k}{m}\;\frac{M+2m}{M}$$

BS K

Lineer üç atomlu bir molekülün serbest titreşimleri



$$V = \frac{k}{2}\left(x_2 - x_1 - b\right)^2 + \frac{k}{2}\left(x_3 - x_2 - b\right)^2$$

$y_i = x_i - x_{0i}$ Denge konumu koord.

$$y_1 = x_1 - \cancel{0} \qquad y_2 - y_1 = x_2 - x_1 - b$$

$$y_2 = x_2 - b \qquad y_3 - y_2 = x_3 - x_2 - b$$

$$y_3 = x_3 - 2b$$

$$V = \frac{1}{2}k\left(y_2 - y_1\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(y_3 - y_2\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}k\left(y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2 - 2y_1y_2 - 2y_2y_3\right)$$

$$V = \frac{1}{2}\sum_{ij} v_{ij}\, y_i y_j = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}$$

BS K

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_3^2 \right) + \frac{1}{2} M \dot{y}_2^2$$

$$= \begin{pmatrix} m & & 0 \\ & M & \\ 0 & & m \end{pmatrix}$$

$$\left| V - \omega^2 T \right| = \begin{vmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 M \end{vmatrix} = 0$$

$$\omega_1^2 = 0 \qquad \omega_2^2 = \frac{k}{m} \qquad \omega_3^2 = \frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M} \right)$$

$$\sum_j \left(V_{ij} a_j - \omega^2 T_{ij} a_j \right) = 0$$

$$\begin{pmatrix} k - \omega_j^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega_j^2 M & -k \\ 0 & -k & k - \omega_j^2 M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \end{pmatrix} = 0$$

BS K

$$(k-\omega_j^2 m)\,a_{1j} \quad - k a_{2j} \qquad = 0$$

$$-k a_{1j} + (2k-\omega_j^2 M)\,a_{2j} \quad - k a_{3j} \quad = 0$$

$$-k a_{2j} \quad + (k-\omega_j^2 m)\,a_{3j} \quad = 0$$

Normalleştirme şartı :

$$\sum_{ij} T_{ij}\, a_{i\ell}\, a_{jk} = \delta_{\ell k}$$

$$\sum_{ij} T_{ij}\, a_{i\ell}\, a_{j\ell} = 1$$

$$\sum_{j} \left[T_{1j}\, a_{1\ell}\, a_{j\ell} + T_{2j}\, a_{2\ell}\, a_{j\ell} + T_{3j}\, a_{3\ell}\, a_{j\ell} \right] = 1$$

$$T_{11}\, a_{1\ell}\, a_{1\ell} + T_{22}\, a_{2\ell}\, a_{2\ell} + T_{33}\, a_{3\ell}\, a_{3\ell} = 1$$

$$\boxed{m\left(a_{1\ell}^2 + a_{3\ell}^2\right) + M\, a_{2\ell}^2 = 1}$$

$$\omega_1^2 = 0 \Rightarrow \quad \cancel{k a_{1j} - k a_{2j} =}$$

$$k a_{11} - k a_{21} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{11} = a_{21} = a_{31}$$

$$-k a_{11} + 2k a_{21} - k a_{31} = 0$$

$$-k a_{21} + k a_{31} = 0$$

BS K