

1. Elektrostatik'e Giriş

1. Coulomb yasası
2. Elektrik Alanı
3. Gauss yasası
4. Gauss yasasının dif formu
5. Elektrostatik'in diğer denklemleri ve skaler pot.
6. Yüzeysel yük ve dipol dağılımları
7. Poisson ve Laplace denklemleri
8. Green teor.
9. Dirichlet ve Neumann sınır şartları ile çözümün tekliği
10. Elektrostatik sınır değer problemleri: Green fonksiyonu ve formal çöz.
11. Elektrostatik pot. enerjisi ve enerji yoğunluğu
12. Laplace ve Poisson denklemlerine varyasyonel yaklaşım
13. İki boyutlu elektrostatik problemleri için duralma yöntemi

2. Elektrostatik de sınır değer problemleri I

1. Görüntü yük yöntemi
2. Topraklanmış iletken bir kürenin varlığında nokta yük
3. Yüklü, yalıtılmış, iletken " " " "
4. Sk. pot. de iletken bir küre etrafında nokta yük
5. Görüntü yük yöntemi ile teledüze elektrik alanında iletken küre
6. Küre için Green fonksiyonu
7. Farklı pot. lardaki iki ya da daha kürelerden oluşan iletken küre
8. Ortogonal fonksiyonlar ve açılımları
9. Değişkenlerin ayrışması
10. İki boyutlu pot. prob.
11. Alanlar ve yük yoğunlukları (2 boyutta)
- 12.

3. Elektrostatik ve sinir-döğer problemleri II.

7. Bir düz mag. alandaki bir alana dâhiliminin enerjisi ve kuvvet ve tork.

8. Makroskopik denklemler ve $\vec{B}$ ve $\vec{H}$ için sınır şartları

9. Magnetostatikte sınır-değer problemleri çöz.

10. Tünelde magnetik alana baskı

11. Düz alanda " "

12. Mag. kuantum

13. Kuvvetli bir düzlemdeki dairesel bir deliğin etrafı

14.

15. Faraday yasası

16. Mag. alanda enerji

17. Enerji

18. Kuantum-statik mag. alanlar

6. Maxwell denklemleri, makroskopik elektromagnetizma
kuramının yasaları.

1. Maxwell denklemleri

2. Vektör ve skaler pot.

3. Ayar dönüşimleri

4. Dalga denklemleri için Green fonksiyonları

5. Geometrik çözümler

6. Makroskopik elektromagnetizma denklemleri türetimi

7. Poynting teoremi

8. " "

9. " "

10. Elektromagnetik alan ve kuantum teorileri, özel yansımalar ve zaman tersinirliği altında dönüşümleri

11. Dirac kuantumlama teorisi

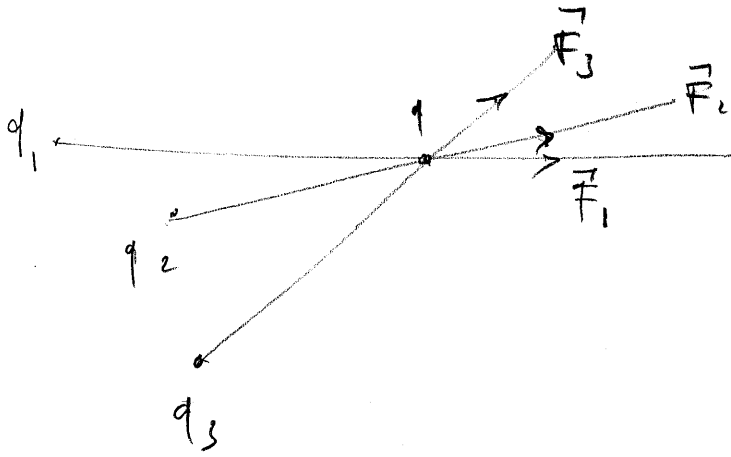
12. Mag. monopoller

13. Polarizasyon pot.ları

1. ELEKTROSTATİĞE GİRİŞ

1.1. Coulomb Yasası: yüklü iki cisim arasındaki kuvvet şu şekilde özetlenebilir.

1. $|\vec{F}| \propto q_1, q_2$,
2. $|\vec{F}| \propto 1/r^2$,
3. Kuvvet yükleri birleştiren çizgi boyunca yönelir,
4. İki'den fazla yüklü parçacık var ise, bunların bir q yüküne uyguladığı kuvvet bileşik kuvettir, ve

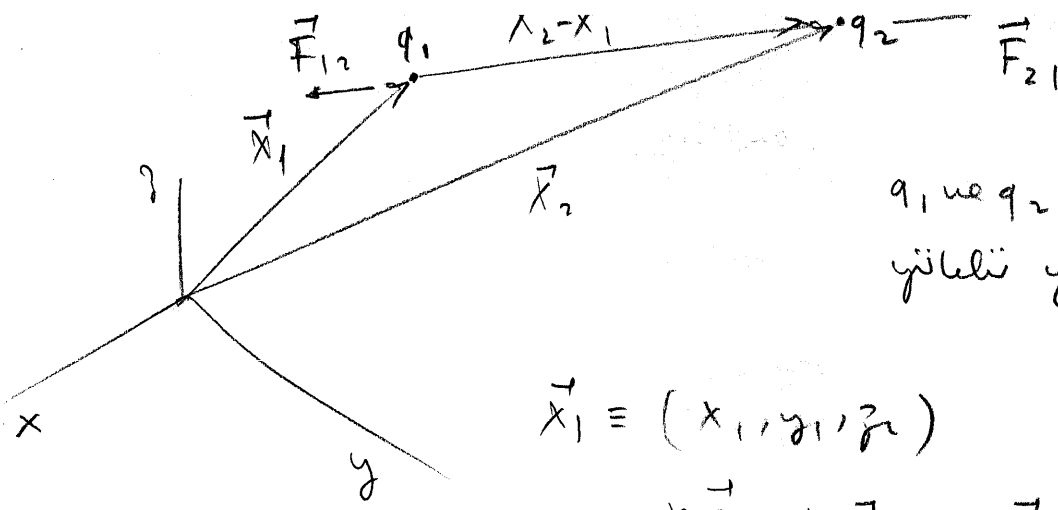


her çift arasındaki kuvvetlerin vektörel toplamıdır, yani

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \text{superpozisyon ilkesi}$$

5. Farklı yükler arasında çekim, aynı yükler arasında itme kuvveti olur.

(2)



q_1 ve q_2 gibi iki adet aynı yüklü yükümüz olsun.

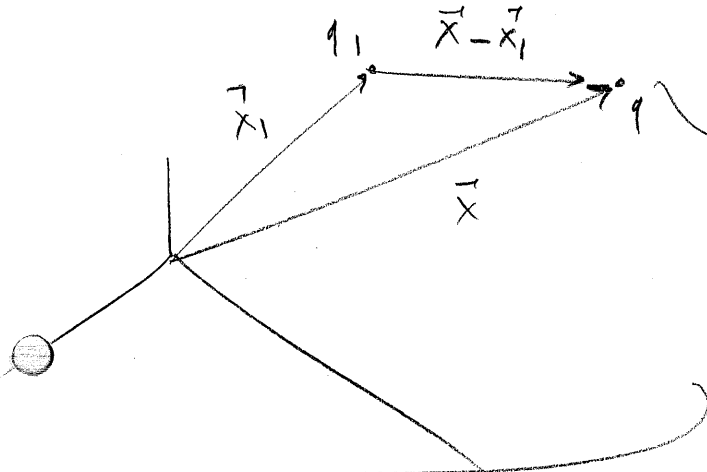
$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$$

$$= x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = \sum_1^3 x_i \vec{e}_i$$

$$\vec{F}_{21} = k q_1 q_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

pozitif ya da negatif olabilecekle cebirsel nicelikler.



buraya koyacağımız yük diğer yükleri etkilememeni için doğru seçilir.

$$\vec{F} = k q q_1 \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}$$

1.2. Elektrik Alanı.

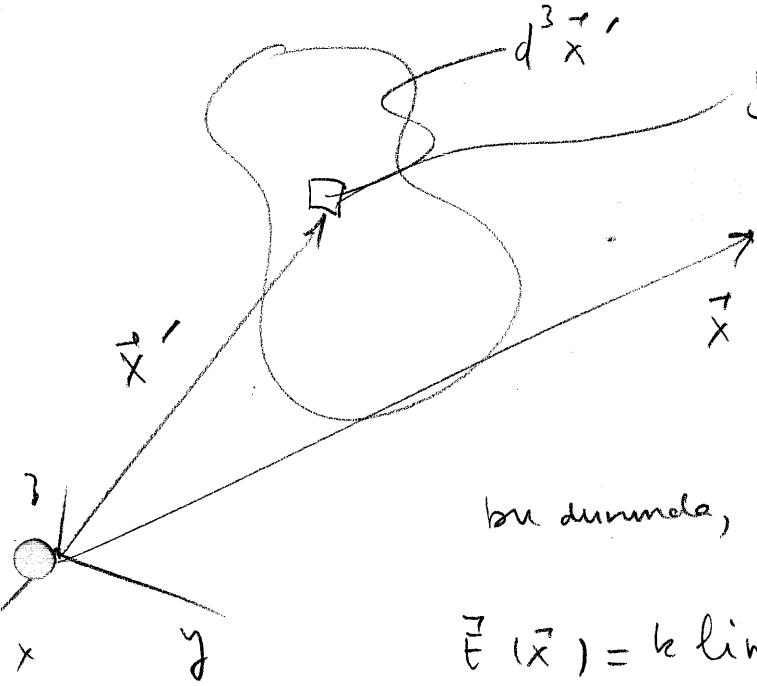
Uzayın bir noktasındaki $\vec{E}(\vec{x})$ elektrik alanı

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\vec{F}}{q} = k q_1 \frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3}$$

Benzer şekilde n adet yük varlığında,

$$\vec{E}(\vec{x}) = k q_1 \frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3} + k q_2 \frac{\vec{x} - \vec{x}_2}{|\vec{x} - \vec{x}_2|^3} + \dots = k \sum_{i=1}^n q_i \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3}$$

* Eğer yüklerin sayısı çok ve birbirlerine çok yakın iseler,



$\rho(\vec{x}')$: $\vec{x}'$ civarındaki btkm hacimdeki yük mik.

$d^3\vec{x}'$ hacimdeki yük mik.

$$\rho(\vec{x}') d^3\vec{x}'$$

bu durumda, $\vec{x}$ noktasındaki $\vec{E}(\vec{x})$

$$\vec{E}(\vec{x}) = k \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \rho(\vec{x}_i') d^3\vec{x}_i' \frac{\vec{x} - \vec{x}_i'}{|\vec{x} - \vec{x}_i'|^3}$$

$$= k \int_{\text{tüm uzay}} \rho(\vec{x}') d^3\vec{x}' \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Not:

$$= 1 \quad \text{CGS}$$

$$= 9 \times 10^9 \quad \text{MKSA} \quad \frac{\text{Nm}^2}{\text{Coul}^2} = \frac{\text{kg m}^3}{\text{Coul}^2 \text{s}^2}$$

ileri eşit yükü 1cm uzaklığa koyduğumuzda birbirlerine 1dyn'lik kuvvet uygularsa yükü 1 statCoul denir, yani

$$1 \text{ dyn} = \frac{(1 \text{ statCoul})^2}{1 \text{ cm}^2} = 1 \text{ statCoul} = \sqrt{1 \text{ dyn} \cdot 1 \text{ cm}^2}$$

$$= \sqrt{\mu \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}} \text{ cm}^2$$

Dirac Delta Fonksiyonu

1. $\delta(x-a) = 0$ eğer $x \neq a$
2. $\int \delta(x-a) dx = 1$ eğer int. bölgesi a 'yı içeriyorsa
aksi takdirde "0"

3. Düzgün bir $f(x)$ fonk.'u alalım

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(x-a) = f(a)$$

$$\begin{aligned} 4. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta'(x-a) dx &= f(x) \delta(x-a) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ &\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \delta(x-a) dx \\ &= -f'(a) \end{aligned}$$

$$5. \delta(f(x)) = \sum_{i=1} \frac{\delta(x-x_i)}{\left| \frac{df}{dx}(x_i) \right|} \quad i=1, 2, 3, \dots$$

bu durumda $f(x)$ 'i sıfır yapan ($f(x)=0$) durumlardan $f(x_i)$ 'in köklerini buluruz, bunlar $\rightarrow x_i$.

Örn: $x^2 - a^2$ $x_1 = +a$ $x_2 = -a$ $\frac{df}{dx} = 2x$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x-a)}{2a} + \frac{\delta(x+a)}{2a}$$

(5)

$$\int g(x) \delta(x^2 - a^2) dx = \frac{1}{2a} [g(a) + g(-a)]$$

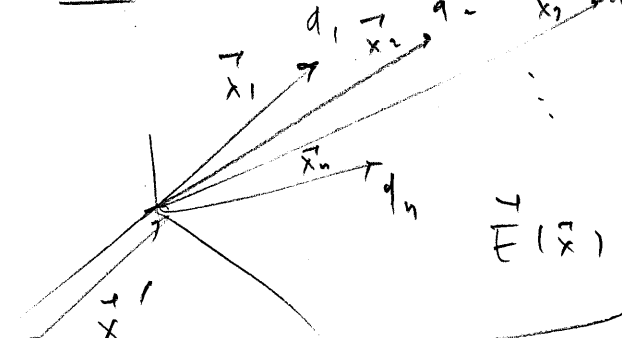
6. Üç boyutlu,

$$\delta^3 = \delta(\vec{x} - \vec{x}') = \delta(x_1 - x_1') \delta(x_2 - x_2') \delta(x_3 - x_3')$$

$$\int d^3 \vec{x} \delta(\vec{x} - \vec{a}) = \int dx_1 \delta(x_1 - a_1) \int dx_2 \delta(x_2 - a_2) \int dx_3 \delta(x_3 - a_3)$$

$$\int d^3 \vec{x} f(\vec{x}) \delta^3(\vec{x} - \vec{a}) = f(a_1, a_2, a_3)$$

Örn:



$$f(\vec{x}') = q_1 \delta^3(\vec{x}' - \vec{x}_1) + \dots = \sum_{i=1}^n q_i \delta^3(\vec{x}' - \vec{x}_i)$$

$$E(\vec{x}) = \int d^3 \vec{x}' \sum_i q_i \delta^3(\vec{x}' - \vec{x}_i) \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

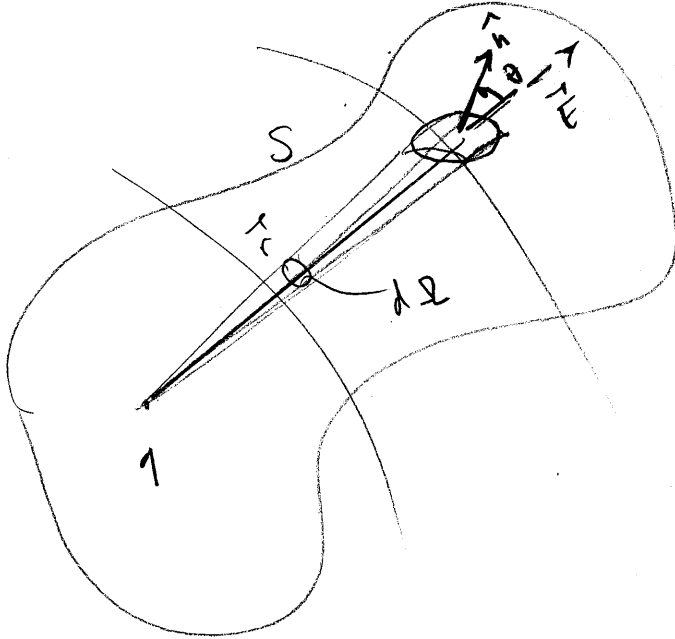
$$= \sum_i q_i \int d^3 \vec{x}' \delta^3(\vec{x}' - \vec{x}_i) \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

$$\frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3}$$

Çingüler yük dağılımı

1.3. Gauss yasası

Bir q noktasal yükü içine alan kapalı bir yüzey olsun.



$$d\vec{S} \equiv \hat{n} da = \hat{n} da$$

$$\vec{E} = q \frac{\hat{r}}{r^2}$$

$\frac{q}{4\pi\epsilon_0}$ alanıdır

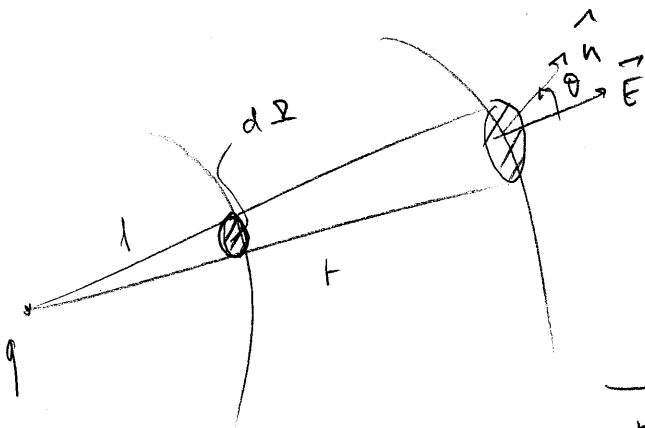
$d\vec{S}$ yüzeyden geçen elektrik akısı $\vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \hat{n} da$

$$= q \frac{\hat{r} \cdot \hat{n}}{r^2}$$

$$= q \frac{\cos \theta da}{r^2}$$

Katı açı :

q 'yu merkez kabul eden birim yarıçaplı küre yüzeyi üzerindeki konik kesitiği yüzey elemanı.



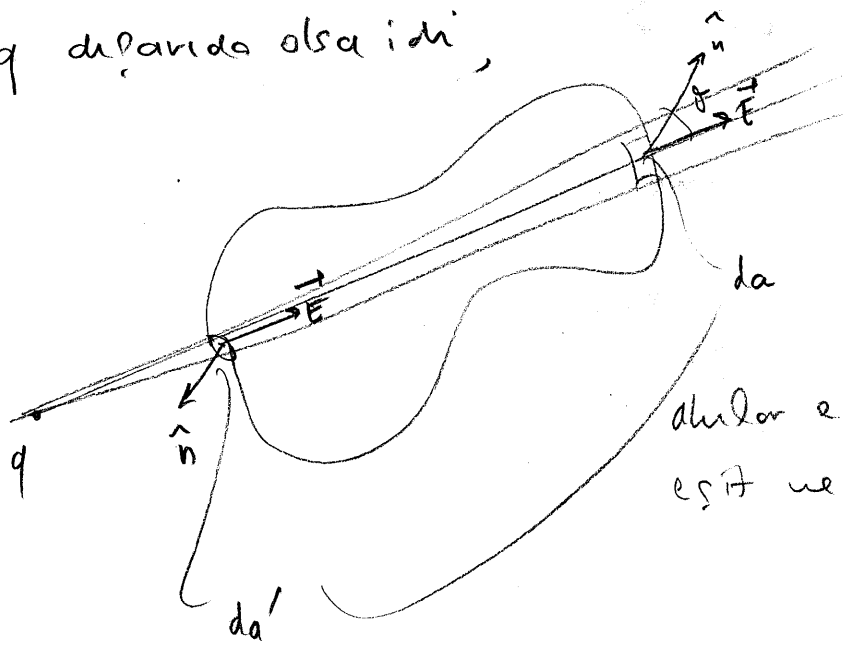
$$d\vec{S} \cdot \hat{r} = da \hat{n} \cdot \hat{r} = \cos \theta da$$

İki boyutlu Thales teoremi.

$$\frac{1}{r^2} = \frac{da}{da \cos \theta} \Rightarrow \frac{da \cos \theta}{r^2} = da$$

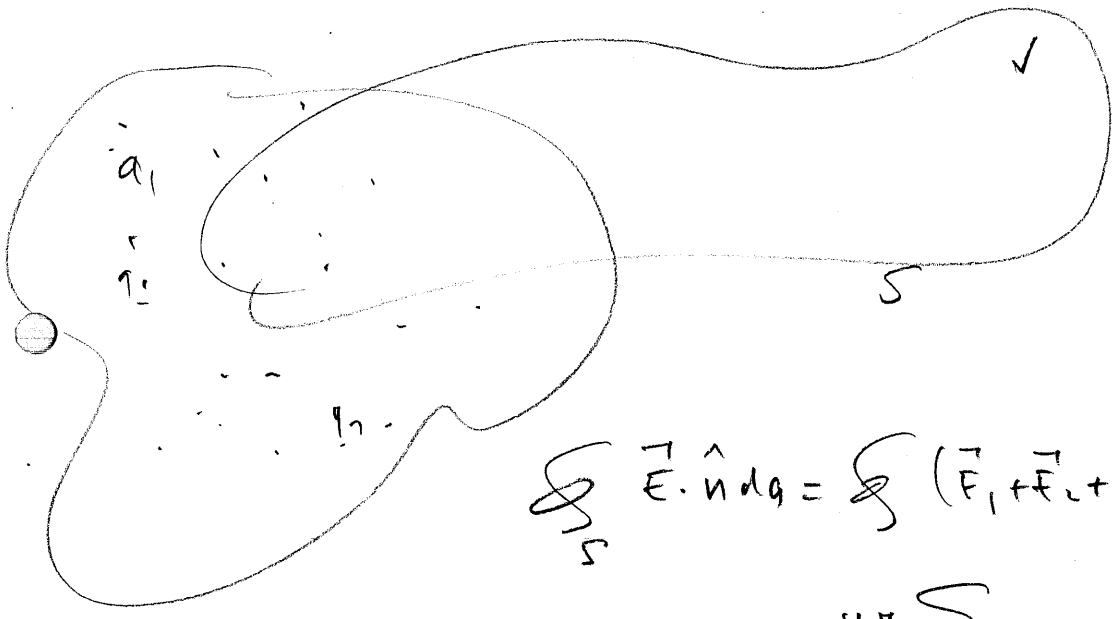
$$\vec{E} \cdot \hat{n} da = q da \Rightarrow \text{bütün yüzeyden geçen akı} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S q da = 4\pi q$$

q dışarıda olsa idi,



da'dan dışarıya ve zıt yönlü. katı açılar
da'dan içeriye ve zıt yönlü. katı açılar

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = \begin{cases} 4\pi q & q \text{ S içerisinde} \\ 0 & \text{" " dışarıda} \end{cases}$$



$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = \oint (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots) \cdot \hat{n} da$$

$$= 4\pi \sum_i q_i$$

$$= 4\pi \int_V (\rho(\vec{x})) d^3x$$



S' 'nin sınırladığı hacim

1.4. Gauss yasasının diferensiyel şekli

Diverjans teoremi

$$\oint_S \vec{A} \cdot \hat{n} da = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d^3\vec{x}$$

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d^3\vec{x} = 4\pi \int_V \rho(\vec{x}) d^3\vec{x}$$

$\Downarrow$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho(\vec{x})$$

1.5. Elektrostatik'in Diğer Denklemleri ve Skaler pot.

$$\vec{\nabla}_x \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = \vec{\nabla} \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2}}$$

$$= \sum_i \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2 \right]^{-1/2}$$

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$$

$$= \hat{e}_1 \frac{-(x_1 - x'_1)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} + \hat{e}_2 \frac{-(x_2 - x'_2)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} + \hat{e}_3 \frac{-(x_3 - x'_3)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

$$= -(\vec{x} - \vec{x}') / |\vec{x} - \vec{x}'|^3$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \int \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3\vec{x}'$$

$$= - \int \rho(\vec{x}') \vec{\nabla}_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3\vec{x}'$$

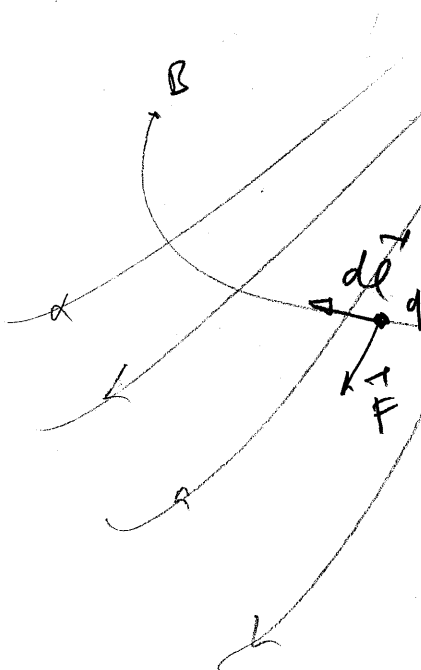
$$= - \vec{\nabla}_{\vec{x}} \left(\int \rho(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3\vec{x}' \right)$$

$\Phi(\vec{x})$

$$\vec{E}(\vec{x}) = - \vec{\nabla} \Phi(\vec{x})$$

$$\Downarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} \Phi(\vec{x})) = 0$$

Skaler potansiyel'in fiziksel anlamı.



Her noktada q 'ya $\vec{F} = q\vec{E}$ etkiyor. $A \rightarrow B$ 'ye q 'yu hareket ettirmek için her noktada buna zıt $\vec{F}_{dr}$ uygulanmalı.

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_A^B \vec{F}_{dr} \cdot d\vec{r} \\ &= - \int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = q \int_A^B \vec{\nabla} \Phi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = q(\Phi_B - \Phi_A) \end{aligned}$$

Kapalı bir yol boyunca yapılan iş $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -(\Phi_B - \Phi_A)$$

Stokes teoremi

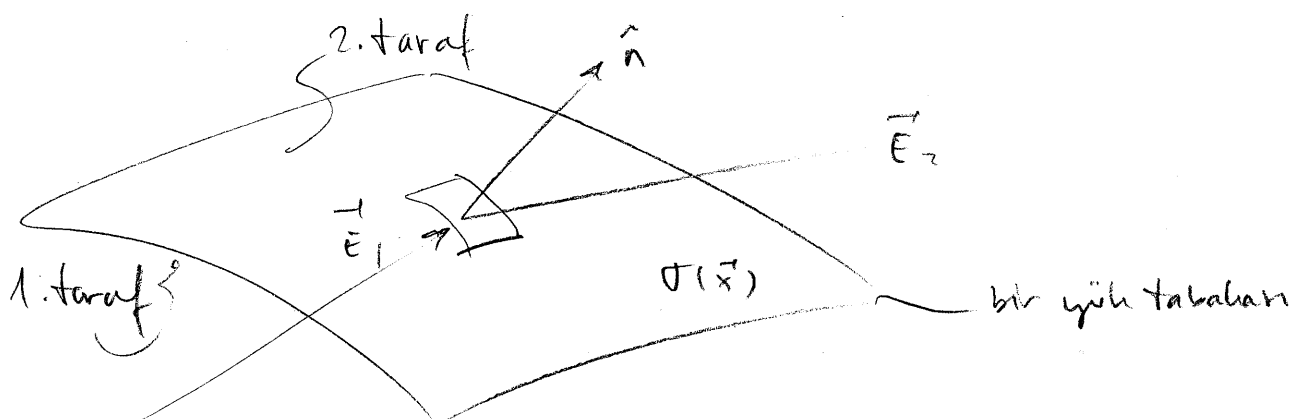
$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \hat{n} da$$

Türevsel yük ve dipol dağılımları, Elektrik Alan ve Potansiyeldeki ilişkiler

Not: $-\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \Rightarrow \nabla^2 \Phi = -4\pi\rho$ Poisson dif. denk. PDD

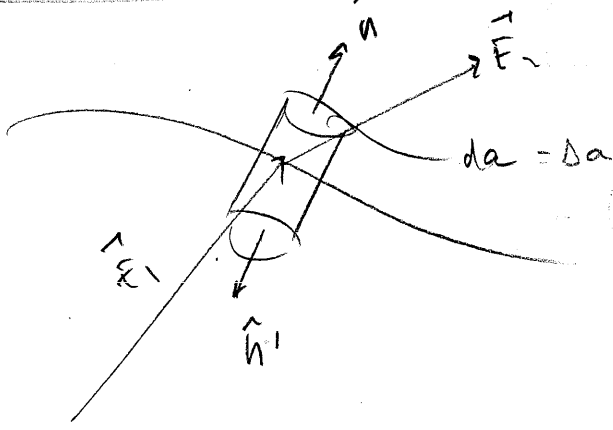
$\nabla^2 \Phi = 0$ Laplace (yük dağılımı sıfır olduğu)

$\Phi(\vec{x}) = \int \frac{\rho(\vec{x}') d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$, PDD'ni Laplace'a göster!



Dik Bileşenin Hesabı

11



$$\oint_{\text{Silindirin}} \vec{E} \cdot \hat{n} da = 4\pi \int_{\text{Sil. Hacmi}} \rho(\vec{x}) d^3x$$

$$\oint_{\text{üst}} \vec{E} \cdot \hat{n} dq + \oint_{\text{alt}} \vec{E} \cdot \hat{n} da + \cancel{\oint_{\text{yan}} \vec{E} \cdot \hat{n} da} = 4\pi \underbrace{\int \rho(\vec{x}) d^3x}_{\sigma \Delta a}$$

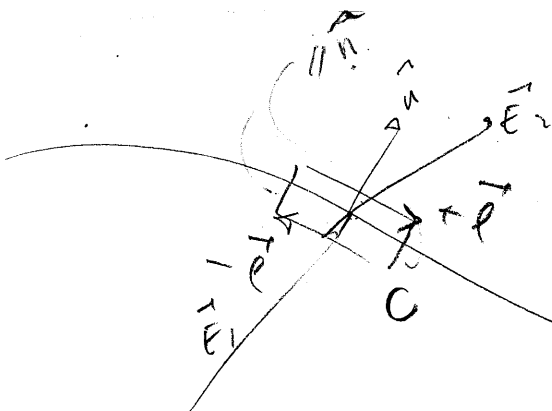
$$\vec{E}_2 \cdot \hat{n} \Delta a + \vec{E}_1 \cdot \hat{n}' \Delta a + 0 = 4\pi \sigma \Delta a$$

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n} = 4\pi \sigma$$

Elektirik alanın dik bileşenlerinin eşitliği.

$$\sigma / \epsilon_0$$

Teğet Bileşenlerin Hesabı



$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} + \oint \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$= 0 \quad E_{\parallel} \perp \hat{n}$$

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{p} = 0$$

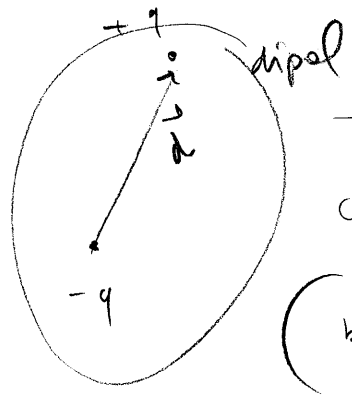
$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \hat{n} = 0$$

$\vec{E}_2 \times \hat{n} : \vec{E}_2$ 'ye ist teğet dir.
 $\vec{E}_1 \times \hat{n} : \vec{E}_1$ 'e " "

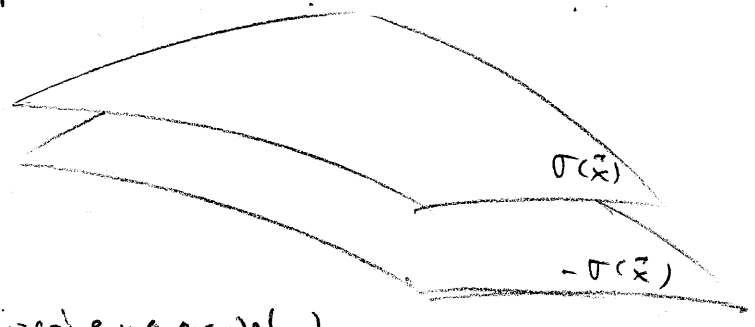
Yüzeysel Dipol Dağılımı.

$$\vec{P} = q \vec{d}$$

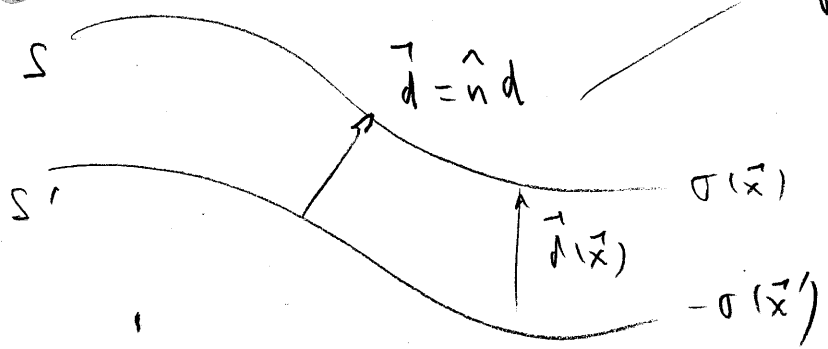
$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3}$$



Çoğaltır
iceli
(bir düzlem üzerinde yoğunlaş)



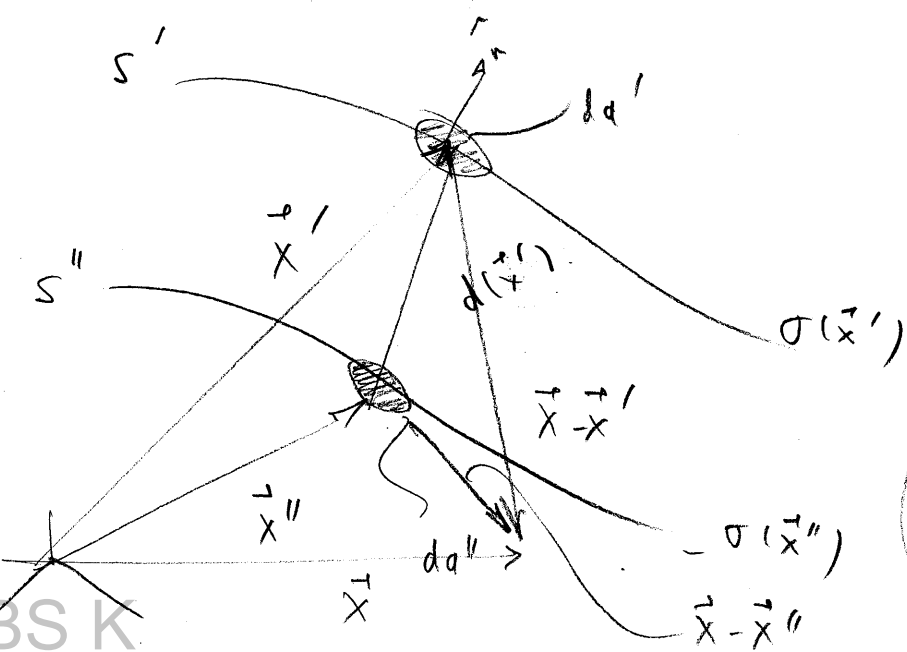
Dipol tabaka geometrisi



yüzeysel dipol dağılımı.

$$D(x) = \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ d(x)}} d \sigma(\vec{r}) \quad \vec{D}(\vec{r}) = D(\vec{r}) \hat{n}$$

Böylece bir dipol dağılımının potansiyeli,



$$\Phi(\vec{r}) = \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}') da'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{S''} \frac{-\sigma(\vec{r}'') da''}{|\vec{r} - \vec{r}''|}$$

$$\vec{r}'' = \vec{r}' - \vec{d}$$

$$\Phi(\vec{x}) = \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{x}') da'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \int_{S''} \frac{-\sigma(\vec{x}'') da''}{|\underbrace{\vec{x} - \vec{x}' + \vec{d}}_{\vec{y}}|}$$

$$|\vec{d}| \ll |\vec{y}| \Rightarrow \frac{1}{|\vec{y} + \vec{d}|} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + d^2 + 2\vec{y} \cdot \vec{d}}} \approx \frac{1}{|\vec{y}|} \left(1 + \frac{2\vec{y} \cdot \vec{d}}{y^2}\right)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{|\vec{y}|} \left(1 - \frac{\vec{y} \cdot \vec{d}}{y^2} + \dots\right)$$

$$\Phi(\vec{x}) = \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{x}') da'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \int_{S''} da'' (-\sigma(\vec{x}'')) \left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{(\vec{x} - \vec{x}') \cdot \vec{d}}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} + \dots \right]$$

$$= \lim_{d \rightarrow 0} \int_{S'} \sigma(\vec{x}') \frac{\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \cdot \hat{n} \cdot \vec{d} da'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

$$|\vec{d}|^2 \approx 0$$

$$= \int_{S'} \sigma(\vec{x}') \frac{\hat{n} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} da'$$

$$= \frac{1}{|\vec{y}|} - \frac{d}{|\vec{y}|^3} \vec{y} \cdot \hat{n} + \dots = \frac{1}{y} + d \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{y}|} \quad \text{şeklinde de yazılabildiğinden}$$

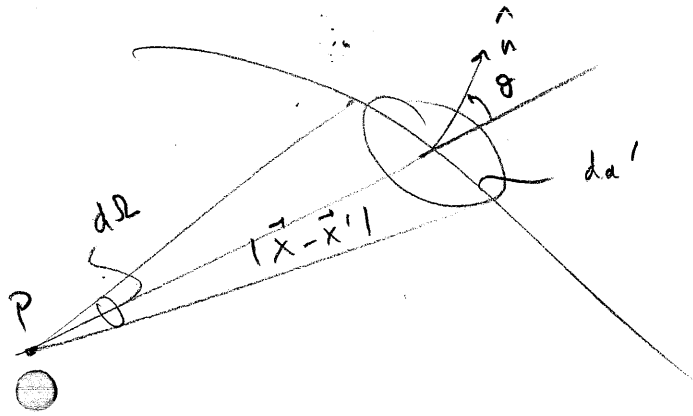
⇓

$$= \int_{S'} da' \sigma(\vec{x}') \hat{n} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

yazılabilir.

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\hat{n} \cdot \nabla_{\vec{x}'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} da' = - \frac{\cos \theta da'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} = - d\Omega$$



$$\Phi(\vec{x}) = - \int_S D(\vec{x}') d\Omega$$

1.7. Poisson ne Laplace Denklemleri

$$\nabla^2 \Phi(\vec{x}) = -4\pi f(\vec{x})$$

$$\Phi(\vec{x}) = \int \frac{f(\vec{x}') d^3\vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$\nabla^2 \Phi(\vec{x})$: potansiyel.

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\vec{r})$$

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

$\vec{x}'$ de bulunan bir yerden $\vec{x}$ de eleştirebiliriz pot.

15

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2}{dr^2} \left(r \cdot \frac{1}{r} \right) = 0 \quad \text{+ 8 ne 4'ye göre türeler}$$

$r \neq 0$ olduğu değerlerde doğru

$$\int \nabla^2 \frac{1}{r} d^3y = C = \lim_{a \rightarrow 0} \int \nabla^2 \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} d^3y$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) r^2 dr \underbrace{\int d\Omega}_{4\pi}$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) r^2 dr \cdot 4\pi$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0} (-12\pi) \int \frac{a^2 r^2 dr}{(r^2 + a^2)^{5/2}} \quad r/a = t$$

$$= -4\pi$$

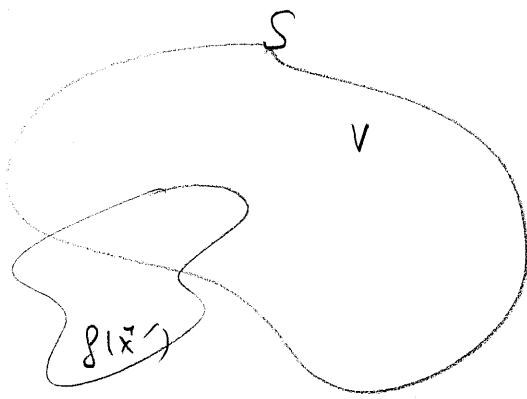
$$\Rightarrow \nabla^2 \Phi(x) = -4\pi \rho(x)$$

1.8. Green Teoremi

Bir yük yoğunluğu ve sonlu bir yüzey (sınırlı) verilir ise, bu sınır içerisinde ve dışarısında potansiyeli bulmak istiyoruz.

Sınır yüzeyi almazsa idi

$$\Phi(\vec{x}) = \int \frac{\rho(\vec{x}') d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$



$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d^3\vec{x} = \oint_S \vec{A} \cdot \hat{n} da$$

Diverjans teor.

$$\vec{A} = \varphi \vec{\nabla} \psi \text{ olsun.}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{\nabla} \psi) = \varphi \vec{\nabla}^2 \psi + \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} \psi$$

$$\oint_V \varphi \vec{\nabla}^2 \psi d^3\vec{x} + \oint_V \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} \psi d^3\vec{x} = \oint_S \varphi \vec{\nabla} \psi \cdot \hat{n} da$$

$$\varphi \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right) \quad \psi' \text{nin y\u00f6reye dik t\u00fcresi}$$

$$\left(\text{I. Green \u00f6zde\u015fli\u011fi} \right)$$

$$= \oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} da$$

$$\vec{A} = \psi \vec{\nabla} \varphi \text{ de alabilir idik: bu durumda}$$

$$\oint_V \psi \vec{\nabla}^2 \varphi d^3\vec{x} + \oint_V \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \varphi d^3\vec{x} = \oint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} da \text{ olurdu.}$$

$$\left(\text{II. Green \u00f6zde\u015fli\u011fi} \right) \downarrow$$

$$\oint_V [\varphi \vec{\nabla}^2 \psi - \psi \vec{\nabla}^2 \varphi] d^3\vec{x} = \oint_S [\varphi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \varphi] \cdot \hat{n} da$$

$$= \oint_S \left[\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] da$$

$$\phi = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \equiv \frac{1}{R} \text{ olarak alalım, } \Phi = \Phi \text{ olsun.}$$

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi \rho(\vec{x}) \text{ ve } \nabla^2 \frac{1}{R} = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}') \text{ kullanalım.}$$

↓ çözümü aradığımız elektrostatik potansiyel.

$$\begin{aligned} \int_V \Phi(\vec{x}') (-4\pi) \delta(\vec{x} - \vec{x}') d^3 \vec{x}' &= \int_V (-4\pi) \rho(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 \vec{x}' \\ &= \oint_S \left[\Phi(\vec{x}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \frac{\partial}{\partial n'} \Phi(\vec{x}') \right] da' \end{aligned}$$

$$\Phi(\vec{x}) = -4\pi \Phi(\vec{x}) + 4\pi \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 \vec{x}' = \oint_S$$

Eğer $\vec{x}$ noktası V hacminin içerisinde ise,

$$\Rightarrow \Phi(\vec{x}) = \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 \vec{x}' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\Phi(\vec{x}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \frac{\partial \Phi(\vec{x}')}{\partial n'} \right] da'$$

dağılımı ise bu 0.

$$\hat{n} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{\hat{n} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

$\sigma = \left(1/4\pi\right) \frac{\partial \Phi}{\partial n'}$ değerindeki bir yüzeysel yük yoğunluğu ile

$D = -\frac{1}{4\pi} \Phi$ değerindeki bir dipol tabakanın potansiyeli olarak

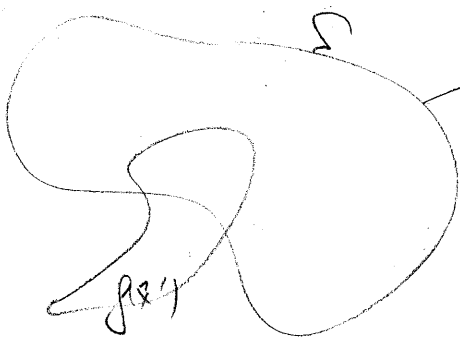
yorumlanabilir. Elektrik alan ve potansiyelin yüzeyle ilişkileri

$\left[(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma, \Phi_2 - \Phi_1 = 4\pi D \right]$ V hacminin içindeki alan ve pot. 'in sıfır vemenbe yol açar.

1.9. Dirichlet ve Neumann sınır şartları ile çözümün tekliği

1. Dirichlet sınır koşulu : S üzerinde her noktada Φ değeri verilir
ise , S içerisindeki pot. 'i tek olarak belirtebiliriz

2. Neumann " " : S üzerinde $\partial \Phi / \partial n$ değeri verilir ve
 Φ 'yi S " tek olarak belirtebiliriz.



Dirichlet şartları ($\Phi = \Phi_s$ yüzeyde)

icisindeki farklı bölümler olan Φ_1 ve Φ_2

$$\nabla^2 \Phi_1 = -4\pi \rho \quad \nabla^2 \Phi_2 = -4\pi \rho$$

$$\Phi_2 - \Phi_1 = u \quad \left(\begin{array}{l} \text{yüzey üzerinde bu sıfır} \\ u=0 \end{array} \right)$$

I. Green özdeşliği'ni U ile yardım.

$$\int_V \left(u \nabla^2 u + \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} u \right) d^3x = \oint_S u \frac{\partial u}{\partial n} da \quad (I)$$

$$\nabla^2 \Phi_2 - \nabla^2 \Phi_1 = \nabla^2 u = 0 \Rightarrow \int_V |\vec{\nabla} u|^2 d^3x = \oint_S u \frac{\partial u}{\partial n} da = 0$$

$$\vec{\nabla} u = 0 \Rightarrow u = \text{const} = 0 \quad \Phi_2 = \Phi_1$$

2) Neumann. S' üzerinde $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ her noktada verilir.

$$\Phi_2 = \Phi_1 : u = \Phi_2 - \Phi_1, \quad \nabla^2 u = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \text{ sınır üzerinde} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

$\oint \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$ bağıntısı gereği $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ her yerde ayn.

$$u = \text{const} \Rightarrow \Phi_2 = \Phi_1$$

1.10. Elektrostatik sınır-değer probleminin Green fonk. lu yardımı ile formal çözümü :

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad \nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

[Genel olarak Laplace denklemini sağlayan herhangi bir kayf fonk. $F(\vec{x}, \vec{x}')$]

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + F(\vec{x}, \vec{x}')$$

$$\nabla^2 F = 0$$

$$\psi : (= G)$$

$$\varphi : (\Phi \text{ Poisson denkleminin formü } \nabla^2 \Phi = -4\pi \rho)$$

$$\int_V [\Phi(\vec{x}') (-4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}')) - G(-4\pi f(\vec{x}'))] d^3\vec{x}'$$

$$= \oint_S \left[\Phi(\vec{x}') \frac{\partial G}{\partial n'} - G \frac{\partial \Phi(\vec{x}')}{\partial n'} \right] da'$$

x. V hâmi içerisinde

$$-4\pi \Phi(\vec{x}) + 4\pi \int_V G(\vec{x}, \vec{x}') f(\vec{x}') d^3\vec{x}' = \oint_S \left[G \frac{\partial \Phi}{\partial n'} - \Phi \frac{\partial G}{\partial n'} \right] da'$$

$$\Phi(\vec{x}) = \int_V f(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}') d^3\vec{x}' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\text{I} - \text{II} \right] da'$$

= 0 Dirichlet sınır koşulu ile. (I yardımı ile)

= 0 Neumann " " " " (")

Dirichlet sınır koşulu halinde sınır yüzeyi üzerindeki (ki $\vec{x}'$ lerin)

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = 0 \text{ olmasını isteriz } \vec{x}' \in V(s)$$

$$\neq \Phi(\vec{x}) = \int_V f(\vec{x}') G_D(\vec{x}, \vec{x}') d^3\vec{x}' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \Phi(\vec{x}') \frac{\partial G_D(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} da'$$

* Neumann sınır koşulu halinde ise $\frac{\partial G}{\partial n'} = 0$ Süratle $\vec{x}' \in V(s)$ dımları ana bu

$$\oint_S \frac{\partial G}{\partial n'} da' = -4\pi$$

(I)

$$\nabla^2 G = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

ile seçiyor.

$$\int_V \nabla \cdot \nabla G d^3\vec{x}' = -4\pi \int_V \delta(\vec{x} - \vec{x}') d^3\vec{x}'$$

vektör alan. = -4\pi

← $\nabla \cdot \nabla G = -4\pi \delta$
buca Gauss
yasaını uygula

$$\oint \hat{n}' \cdot \vec{\nabla}' G(\vec{x} - \vec{x}') d\vec{x}' = -4\pi \quad \text{bu izlenli.}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n'} = -\frac{4\pi}{S} \quad \text{seçmeliyim} \quad x' \in V(S)$$

$$\Phi(\vec{x}) = \int_V f(\vec{x}') G_{\mu}(\vec{x} - \vec{x}') d^3\vec{x}' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\partial \Phi}{\partial n'} G_{\mu} d\vec{x}' + \frac{1}{4\pi} \frac{4\pi}{S} \oint_S \Phi d\vec{x}'$$

$\langle \Phi \rangle$

S kapalı yüzeyi içeren
ort.

$$= \langle \Phi \rangle_S + \int_V f(\vec{x}') G_{\mu}(\vec{x} - \vec{x}') d^3\vec{x}' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\partial \Phi}{\partial n'} G_{\mu}(\vec{x}, \vec{x}') d\vec{x}'$$

1.11. Elektrostatik potansiyel enerji ve enerji yoğunluğu

Bir q_i yükünü sonsuzdan $\vec{x}_i$ noktasına getirmek için yapılan iş,

$$W_i = q_i \Phi(\vec{x}_i) = \sum_{j \neq i}^n \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \quad i. \text{ yükün pot. i}$$

Bütün yüklerin pot. enerjisi

$$W = \sum_i W_i = \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}$$

yük dağılımı durumunda

$$W = \frac{1}{2} \iint \frac{f(\vec{x}) f(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3\vec{x} d^3\vec{x}' = \frac{1}{2} \int f(\vec{x}) \Phi(\vec{x}) d^3\vec{x}$$

bütün enerji

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{x}) \Phi(\vec{x}) d^3\vec{x}$$

tümrey

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi \rho \quad \text{ya da} \quad \rho(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \Phi$$

$$W = \frac{-1}{8\pi} \int d^3\vec{x} \Phi(\vec{x}) \nabla^2 \Phi(\vec{x}) = \frac{-1}{8\pi} \int d^3\vec{x} \underbrace{\Phi(\vec{x})}_{u} \underbrace{\nabla \cdot \nabla \Phi(\vec{x})}_{dW}$$

$$= \frac{-1}{8\pi} \left\{ \underbrace{\Phi \nabla \Phi}_{\substack{\delta \\ (V)'yi \text{ sınırlayın}}} - \int d^3\vec{x} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \right\}$$

Sınav Sorusu:

$$\Phi \nabla \Phi \text{ 'ın diverjans } \nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) = \Phi \nabla^2 \Phi + \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi$$

$$\oint_V \nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) d^3\vec{x} = \oint_V \Phi \nabla^2 \Phi d^3\vec{x} + \oint_V \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi d^3\vec{x}$$

$$= \oint_S (\Phi \nabla \Phi) \cdot \hat{n} da$$

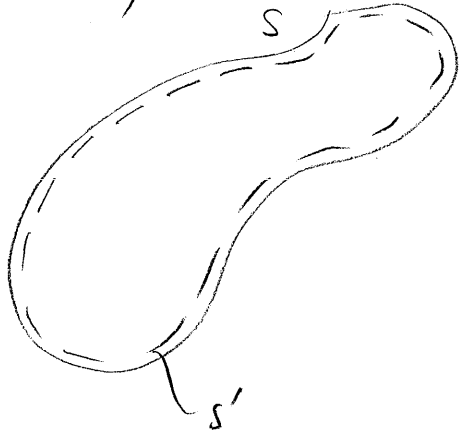
$$\oint_V \Phi \nabla^2 \Phi d^3\vec{x} = \oint_S (\Phi \nabla \Phi) \cdot \hat{n} da - \oint_V \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi d^3\vec{x}$$

bu sonun değerlendirilmesi

$$\frac{1}{R^2} \frac{1}{R} R^3 \rightarrow 0 \text{ yüzey sonsuz.}$$

$$W = \frac{1}{8\pi} \int d^3\vec{x} |\nabla \Phi|^2 = \frac{1}{8\pi} \int |\vec{E}|^2 d^3\vec{x}$$

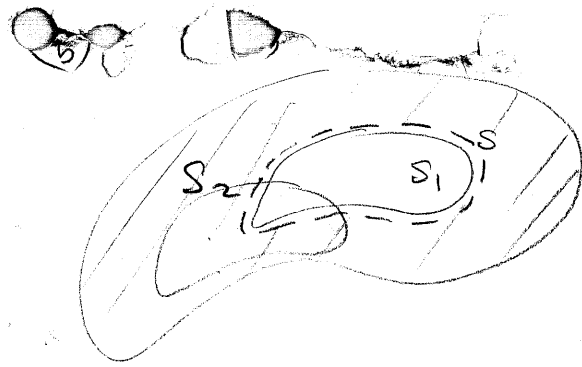
Drb. 1.1.) (a)



Varsayalım ki $\vec{E}_{ic} \neq 0$ olsun, 0 zaman iletkendeki serbest elektronların $\vec{F} = -e\vec{E}_{ic}$ kuvveti etkilil $\vec{F}$ altında hareket eder (kolbulu yok!) yük iletken üzerinde o şekilde dağılmak ki $\vec{E}_{ic} = \vec{0}$ olsun.

$$\oint_{S'} \vec{E}_{ic} \cdot d\vec{a} = 4\pi q = 0$$

$q=0$ çünkü S üzerinde toplam yük 0'dır.

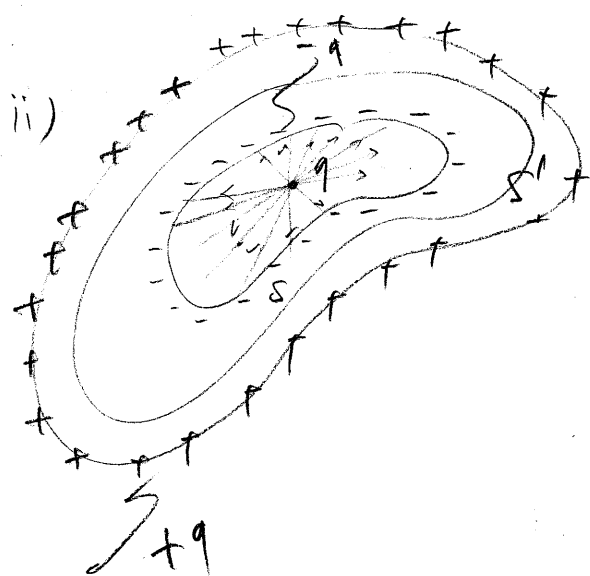


Oynukta yük bulunmadığını kabul ederseniz, iç yüzey üzerinde yük bulunmadığını ispatlamalıdır. S Gauss yüzeyleri geçiren alan "afak" ar. (iletkenin içinde $\vec{E} = \vec{0}$)

Oynuk içinde q kadar yük varsa de yüzey üzerinde $-q$ kadar olmalıdır.

$$\oint_{S_1 + S_2} \vec{E} \cdot \hat{n} da = 0 = \oint_{S_1} \vec{E} \cdot \hat{n} da + \oint_{S_2} \vec{E} \cdot \hat{n} da$$

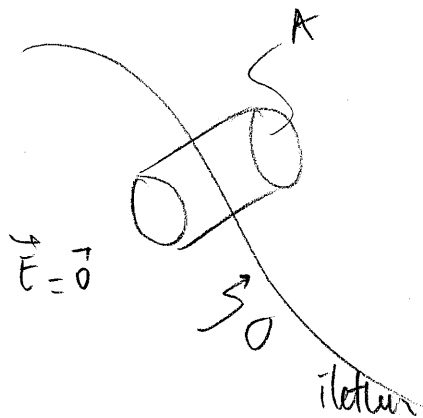
0 zaman bu da sağlanmalıdır.



$$\oint_{S'} \vec{E}_{ic} \cdot d\vec{a} = 4\pi q$$

$\neq 0$

(c)

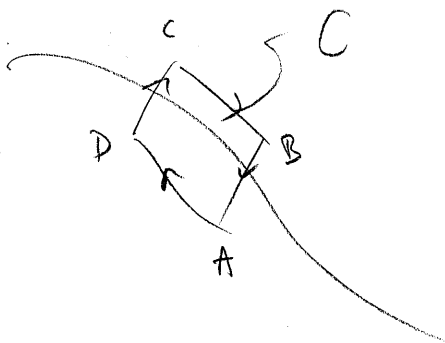


$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = 4\pi (A\sigma)$$

Sylinder

$$\int_{\text{üst kap}} + \int_{\text{alt kap}} + \int_{\text{yan yüz}} = 4\pi \sigma A$$

Sylinder görselindeki yüzeye eşit olduğu için.



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

$$\int_{AD} + \int_{DC} + \int_{CB} + \int_{BA} = 0$$

$$2 E_{\text{gözet}} \overline{CB} = 0$$

$E_{\text{gözet}} = 0$ sadece dış yüzeyinde var.

Prb. 1.2.) $D(\alpha; x, y, z) = (2\pi)^{-3/2} \alpha^{-3} e^{-(x^2 + y^2 + z^2)/2\alpha^2}$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} D = \delta(\vec{x}) = \begin{cases} 0 & x^2 + y^2 + z^2 \neq 0 \\ \infty & x^2 + y^2 + z^2 = 0 \end{cases}$$

fakat $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int D dx dy dz = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (2\pi)^{-3/2} \alpha^{-3} \int e^{-(x^2 + y^2 + z^2)/2\alpha^2} dx dy dz = 1$

$$dx dy dz = \frac{du}{u} \frac{dv}{v} \frac{dw}{w} \quad r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{dr}{1} \frac{d\theta}{1/r} \frac{d\varphi}{1/r \sin \theta}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} D(\alpha; dx, dy, dz) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} D\left(\alpha; \frac{du}{u}, \frac{dv}{v}, \frac{dw}{w}\right) \left\{ \begin{aligned} & \lambda^2 + \gamma^2 + z^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \\ & \alpha \rightarrow 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \delta\left(\frac{u-u'}{u}\right) \delta\left(\frac{v-v'}{v}\right) \delta\left(\frac{w-w'}{w}\right)$$

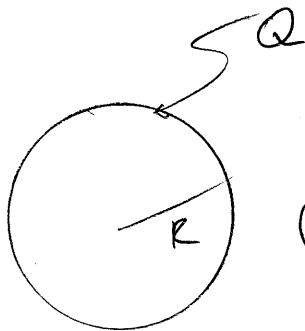
$$= uvw \delta(u-u') \delta(v-v') \delta(w-w')$$

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = r^2 \sin\theta \delta(r-r') \delta(\theta-\theta') \delta(\varphi-\varphi')$$

$$dx_1 dx_2 dx_3 = |J| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \Rightarrow \int \delta(\vec{x}) d^3x = \int \delta(\vec{r}) \frac{d^3\vec{r}}{|J|}$$

$$\Rightarrow \delta(\vec{x}) = \frac{1}{|J|} \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

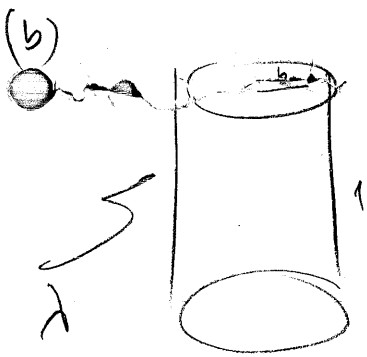
Ex 1.3.) (a)



$$\rho(\vec{x}) = ? \quad (= A \delta(r-R))$$

$$\int_V \rho(\vec{x}) d^3\vec{x} = Q \Rightarrow \int A \delta(r-R) 4\pi r^2 dr = Q$$

$$A = \frac{Q}{4\pi R^2}$$



$$\rho(\vec{x}) = A \delta(\rho-b)$$

$$\int \rho(\vec{x}) d^3x = \lambda$$

$$A \int \delta(\rho-b) \rho d\rho d\varphi dz = \lambda$$

$$A \int \rho \delta(\rho-b) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dz = \lambda$$

$$A = \frac{\lambda}{2\pi b}$$

(c)



$$\rho(\vec{r}) = A \delta(z) \Theta(R - \rho)$$

$$\Theta(r) = \begin{cases} 1 & r > 0 \\ 0 & r < 0 \end{cases}$$

$$A \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \Theta(R - \rho) \rho d\rho \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) dz = Q$$

$$2\pi A \underbrace{\int_0^R \rho d\rho}_{R^2/2} \cdot 1 = Q \Rightarrow A = \frac{Q}{\pi R^2}$$

(d)

$$\rho(\vec{r}) = A \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \Theta(R - r)$$

$$\int \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} = Q = A \underbrace{\int_0^{\pi} \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \sin\theta d\theta}_{\sin\frac{\pi}{2}} \underbrace{\int_0^{\infty} \Theta(R - r) r^2 dr}_{\frac{R^3}{3}} \int_0^{2\pi} d\varphi$$

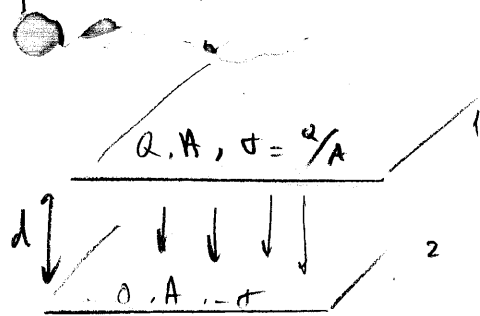
$$A = \frac{3Q}{2\pi R^3}$$

Demoliri originea năstărilor și găsiți soluția.

$$\rho(\vec{r}) = - \underbrace{\frac{q \delta^3(\vec{r})}{8\pi}}_{\text{electroni liberi}} + \underbrace{q \delta(\vec{r})}_{\text{protoni liberi}}$$

$$\int_V \rho d^3\vec{x} = -q + q = 0 \quad (\text{nătr.})$$

Prs. 1.6.) (a)



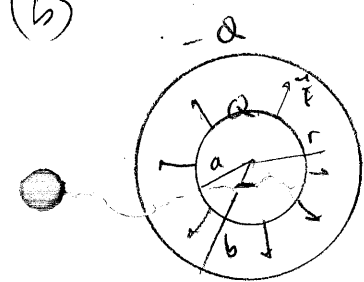
$$E = 4\pi\sigma$$

$$C_{12} = V = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E d = 4\pi\sigma d$$

$$C = Q/V = \frac{Q}{4\pi\sigma d} = \frac{A}{4\pi d}$$

$$Q = \sigma A = \sigma \frac{A}{4\pi d} = \frac{A}{4\pi d}$$

(b)



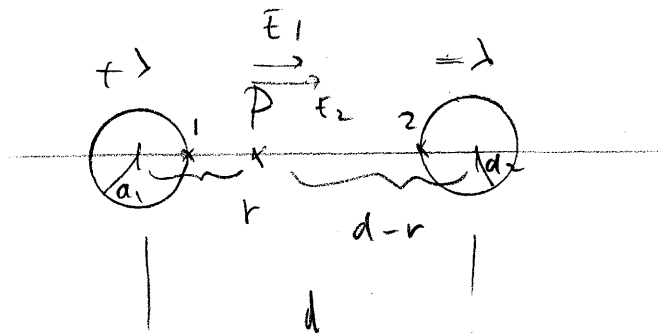
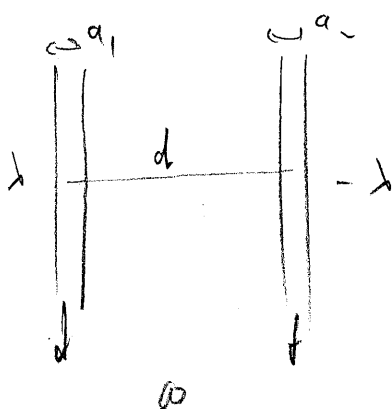
$$\vec{E} = \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

$$V = + \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = + \int_a^b \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot (\hat{r} dr)$$

$$= \frac{Q}{r} \Big|_a^b = Q \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

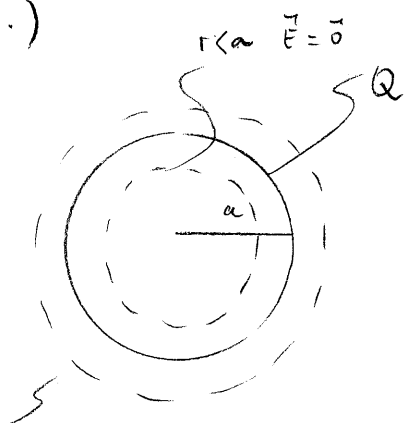
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{ab}{a-b}$$

Prs. 1.7.)



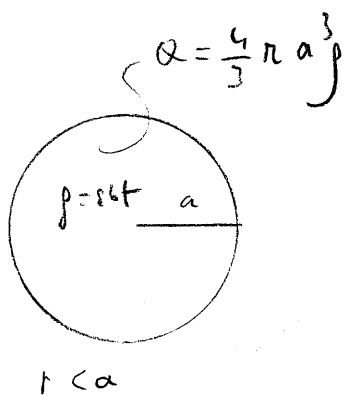
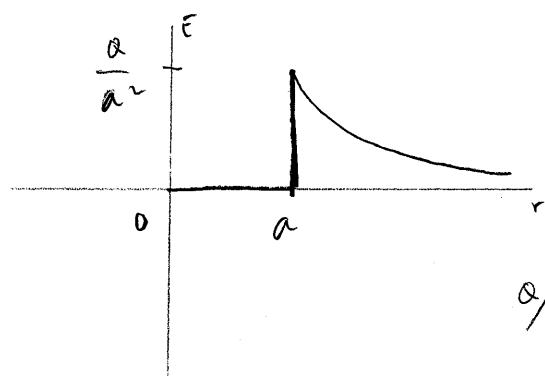
$$\vec{E}_P = \frac{2\lambda}{r} + \frac{2\lambda}{d-r}$$

1.4.)



$$r > a \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = 4\pi Q$$

$$E = \frac{Q}{r^2}$$

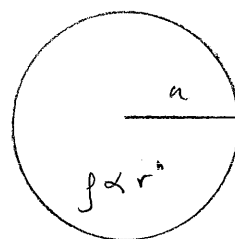
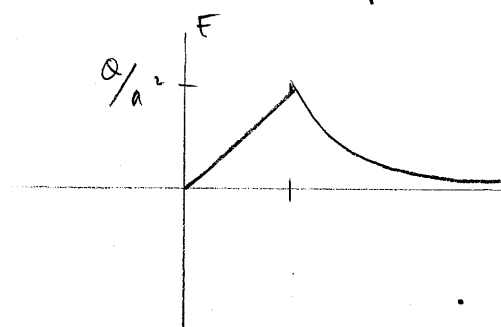


$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = 4\pi \int \rho d^3x$$

$$E 4\pi r^2 = 4\pi \int \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E = \frac{4\pi \rho}{3} r$$

$$r > a \quad E = \frac{Q}{r^2}$$



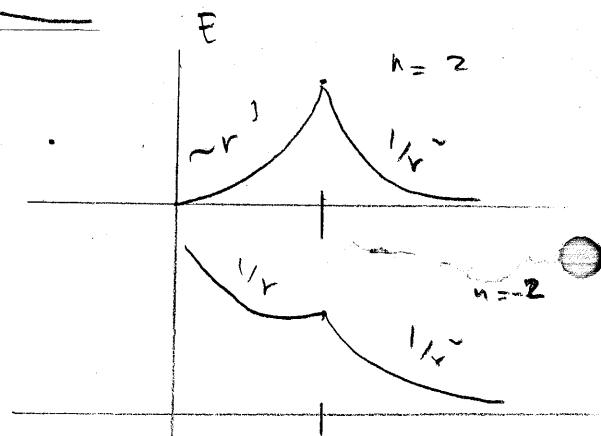
$$\rho = A r^n$$

$$A 4\pi \int_0^a r^{n+2} dr = Q$$

$$A = \frac{Q}{4\pi a^{n+3}} (n+3)$$

$$r < a \Rightarrow E = 4\pi A \frac{r^{n+1}}{n+1}$$

$$r > a \quad E = \frac{Q}{r^2}$$



1.5. $\vec{F}(r) = q \frac{e}{r} \left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right)$ bei pot. i. versch. $\int(r) = ?$

$$\vec{\nabla}^2 \Phi(r) = -4\pi \rho \left(= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) + \text{etc.} \right)$$

$$= \frac{q \alpha^2}{2} e^{-\alpha r}$$

$$\int(r) = - \frac{q \alpha^2}{8\pi} e^{-\alpha r} \quad r \neq 0$$

$r \rightarrow 0 \quad \Phi \rightarrow \infty$ yllin kommen yomnde

$$V_1 - V_2 = \int_{a_1}^{a-a_2} \left(\frac{2\lambda}{r} + \frac{2\lambda}{d-r} \right) dr$$

$$= 2\lambda \ln \frac{(d-a_1)(d-a_2)}{a_1 a_2} \approx 2\lambda \ln \frac{d^2}{a^2} \approx 4\lambda \ln \frac{d}{a}$$

$$C = \frac{\lambda}{V} = \frac{\lambda}{4\lambda \ln \frac{d}{a}}$$

1.11.) da gibi sonsuz küçülmeyle ilgili elemanı iç

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} da = 4\pi dq \quad |E| = \frac{4\pi dq}{R_1 R_2 d\theta_1 d\theta_2}$$

da'nn merkurnde (iki g'ulik berish) $\Rightarrow \hat{n} = \frac{\vec{r}_1}{r_1} + \frac{\vec{r}_2}{r_2}$

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial R_1} + \frac{\partial F}{\partial R_2} = -E \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

1.10) $\Phi(\vec{x}) = \int \frac{\rho(\vec{x}')}{R} d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n'} - \Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{R} \right) \right] da$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{n}'} = \nabla \mathcal{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}' = -\mathcal{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}'$$

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} da' = \underbrace{\int \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d^3x'}_{4\pi q(\vec{x}')} \quad (\text{Div. th.})$$

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{\int \Phi(\vec{x}') d\alpha'}{4\pi R^2}$$

$$= \text{ort. seq. (pot. lin)}$$
