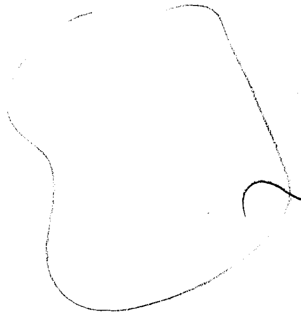
BÖLÜM 4

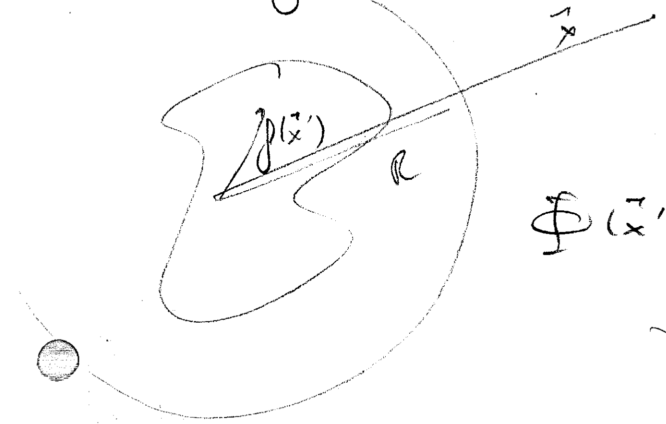
ÇOK KUTUPLAR, MAKROSKOPİK ORTAMLARDA ELEKTROSTATİK



lokalize yük dağılımlarının küresel harmonikler cinsinden çok kutup açılımı anlatılacak. Arkasından elektrostatiğin makroskopik denk.'i türetilecek.

4.1. Çok kutup açılımı:

lokalize yük dağılımı R yarıçaplı küre içerisinde başlangıç civarında sıfırdan farklı $\rho(\vec{x}')$ yük dağılımı ile verilir.



$$\max |\vec{x}'| \leq R$$

$$\Phi(\vec{x}') = \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3\vec{x}'$$

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum_l \sum_m \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y^*_{lm}(\theta',\varphi) Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

daima $|\vec{x}| > |\vec{x}'|$
$\quad\quad = r \quad\quad = r'$

$$= 4\pi \sum_l \sum_m \frac{1}{2l+1} \underbrace{\int \rho(\vec{x}') r'^l Y^*_{lm}(\theta',\varphi) d^3\vec{x}'}_{q_{lm}} \frac{Y_{lm}(\theta,\varphi)}{r^{l+1}}$$

$$= 4\pi \sum_l \sum_m \frac{1}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta,\varphi)}{r^{l+1}}$$

$$q_{lm} = \int \rho(\vec{x}')\, r'^{l}\, Y^{*}_{lm}(\theta', \varphi')\, d^3\vec{x}'$$ çok kutup momentleri

$l=0$ tek kutup momenti $\to q_{00}$

$$q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \rho(\vec{x}')\, d^3\vec{x}' = \frac{q}{\sqrt{4\pi}}$$ monopol (toplam yük)

$l=1$'e çift kutup momenti (dipol)

$l=2$'e dört " " (kuadrupol)

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_l \sum_m \underbrace{\frac{4\pi}{2l+1}\, q_{lm}\, \frac{Y_{lm}(\theta,\varphi)}{r^{l+1}}}_{\Phi_{lm}}$$

$l=1$ $$q_{11} = \int \rho(\vec{x}')\, r'\, \underbrace{Y^{*}_{11}(\theta', \varphi')}_{-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\varphi}}\, d^3\vec{x}'$$

$$= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int \rho(\vec{x}')\, r' \sin\theta' \left(\cos\varphi' - i\sin\varphi'\right) d^3\vec{x}'$$

$$= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int \rho(\vec{x}')\, (x' - iy')\, d^3x'$$

$$\begin{cases} x' = r'\sin\theta'\cos\varphi' \\ y' = r'\sin\theta'\sin\varphi' \\ z' = r'\cos\theta' \end{cases}$$

$$= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left(p_x - ip_y\right)$$

BS K

$$q_{10} = \int \rho(\vec{x}')\, r'\, \underbrace{Y^*_{10}(\theta',\varphi')}_{\sqrt{3/4\pi}\,\cos\theta'}\, d^3\vec{x}' = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, p_z$$

$\vec{p} = \int \rho(\vec{x}')\, \vec{x}'\, d^3\vec{x}$ $\rho(\vec{x}')$ yük dağılımı çift kutup mom.'i.

$$q_{\ell,-m} = (-1)^m q^*_{\ell m}$$

$$q_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,(p_x + i p_y)$$

$$\ell=2 \quad q_{22} = \int \rho(\vec{x}')\, r'^2\, \underbrace{Y^*_{22}(\theta',\varphi')}_{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta'\, e^{-2i\varphi'}\,\left(e^{-i\varphi'}\right)^2}\, d^3\vec{x}'$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \int \rho(\vec{x}')\, r'^2 \sin^2\theta' \left(\cos\varphi' - i\sin\varphi'\right)^2 d^3\vec{x}'$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \int \rho(\vec{x}') \left[x'^2 - y'^2 - 2i x' y'\right] d^3x'$$

$$= \frac{1}{12}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \left(Q_{11} - Q_{22} - 2i\, Q_{12}\right)$$ Int.'in 3 katına dedik.

$$q_{21} = \int \rho(\vec{x}')\, r'^2\, Y^*_{21}(\theta',\varphi')\, d^3\vec{x}'$$

$$= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int d^3\vec{x}'\, \rho(\vec{x}')\, r'^2 \sin\theta' \cos\theta'\, e^{-i\varphi'} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int \rho(\vec{x}')\, z'(x' - iy')\, d^3\vec{x}'$$

$$= -\left(\tfrac{1}{3}\right)\sqrt{15/8\pi}\,\left(Q_{13} - i\, Q_{23}\right)$$

$$q_{20} = \int \rho(\vec{x}')\, r'^2\, Y^*_{20}(\theta',\varphi')\, d^3\vec{x}'$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int \rho(\vec{x}')\,(3\cos^2\theta' - 1)\, d^3\vec{x}'$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int \rho(\vec{x}')\,(3z'^2 - r'^2)\, d^3\vec{x}' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{16}{5\pi}}\; Q_3$$

$$Q_{ij} = \int \rho(\vec{x}')\, d^3\vec{x}' \left(3x_i' x_j' - r'^2 \delta_{ij}\right) \quad \text{kuadropol momenti}$$

Çok kutup açılımını dik koordinatlarda açılımı yapabiliriz.

$$\Phi(\vec{x}) = \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\, d^3\vec{x}'$$

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}|} + \sum_i x_i' \left(\frac{\partial}{\partial x_i'}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\Bigg|_{\vec{x}'=0} + \frac{1}{2!}\sum_i\sum_j x_i' x_j' \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i'\partial x_j'}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\Bigg|_{\vec{x}'=0}$$

$$\partial x_i' \left[(x_1-x_1')^2 + (x_2-x_2')^2 + (x_3-x_3')^2\right]^{-1/2}$$

$$= (-\tfrac{1}{\cancel{2}})\,[\quad]^{-3/2}\,\cancel{2}\,(x_i - x_i')(-1) \leftarrow \partial x_j' \;\# = -\tfrac{3}{\cancel{2}}(\quad)^{-5/2}\cancel{2}(x_j-x_j') \times (-1)(x_i - x_i') + (\quad)^{-3/2}(-\delta_{ij})$$

$$= \frac{1}{|\vec{x}|} + \sum_i \frac{x_i' x_i}{|\vec{x}|^3} + \frac{1}{2!}\sum\sum x_i' x_j' \left[\frac{x_i x_j}{|\vec{x}|^5} - \delta_{ij}\frac{1}{|\vec{x}|^3}\right]$$

$$\Phi(\vec{x}) = \int \rho(\vec{x}') \left\{ \frac{1}{|\vec{x}|} + \sum \frac{x_i' x_i}{|\vec{x}|^3} + \frac{1}{2!} \sum_i \sum_j x_i' x_j' \left(\frac{3 x_i x_j}{|\vec{x}|^5} - \delta_{ij} \frac{x_i x_j}{|\vec{x}|^5} \right) + \dots \right\} d^3\vec{x}'$$

$$= \frac{1}{|\vec{x}|} \underbrace{\int \rho(\vec{x}')\, d^3\vec{x}'}_{q} + \sum_i \frac{x_i}{|\vec{x}|^3} \underbrace{\int \rho(\vec{x}')\, x_i'\, d^3x'}_{p_i}$$

$$+ \frac{1}{2!} \sum \sum \frac{x_i x_j}{|\vec{x}|^5} \underbrace{\int \rho(\vec{x}') \left(3 x_i' x_j' - \delta_{ij} r'^2 \right) d^3\vec{x}'}_{Q_{ij}}$$

$$= \frac{q}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^3} + \frac{1}{2!} \sum_i \sum_j Q_{ij} \frac{x_i x_j}{|\vec{x}|^5} + \dots$$

<u>Bir çok-kutup'un alan bileşenleri</u>

$$\boxed{\Phi_{lm} = \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}}{r^{l+1}}}$$

$$\vec{E}_{lm} = -\vec{\nabla} \Phi_{lm} = -\left\{ \vec{e}_r \partial_r + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\varphi \right\} \Phi_{lm}$$

$$\left(E_{lm} \right)_r = -\partial_r \Phi_{lm} = (l+1) \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}}{r^{2+l}}$$

$$\left(E_{lm} \right)_\theta = -\frac{1}{r} \partial_\theta \Phi_{lm} = -\frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{1}{r^{l+2}} \partial_\theta Y_{lm}$$

$$\left(E(r)\right)_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\,\partial_\varphi \Phi_{lm} = -\frac{4\pi}{2l+1}\, q_{lm}\,\frac{1}{r^{l+1}}\,\frac{1}{\sin\theta}\, im\, Y_{lm}$$

ve $\partial_\theta Y_{lm}$

Y_{lm} 'lerin lineer kombinasyonları olarak yazılabilirler.

z-ekseni boyunca yönelmiş dipol moment'i gözönüne alalım.

$\vec p = p\hat z$ $\quad l=1 \quad q_{11}=0 \quad q_{1-1}=0 \quad q_{10}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,p_z$

$$E_r = \frac{2p\cos\theta}{r^3}, \qquad E_\theta = \frac{p\sin\theta}{r^3} \qquad \vec E = \frac{p}{r^3}\left(2\cos\theta\,\hat e_r + \sin\theta\,\hat e_\theta\right)$$

$E_\varphi = 0 \sim m=0$

$\hat e_\theta$: $\hat x\cos\theta\cos\varphi + \hat y\sin\theta\sin\varphi + \hat z\cos\theta$

$\hat e_r$: $\hat x\sin\theta\cos\varphi + \hat y\sin\theta\sin\varphi + \hat z\cos\theta$

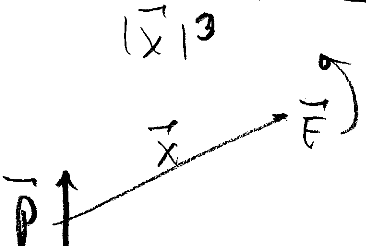
$$= \frac{3\hat x\,(\vec p\cdot\hat x) - \vec p}{|\vec x|^3}$$

bir $\vec p$ çift kutupunun $\vec x$ noktasında oluşturduğu alan.

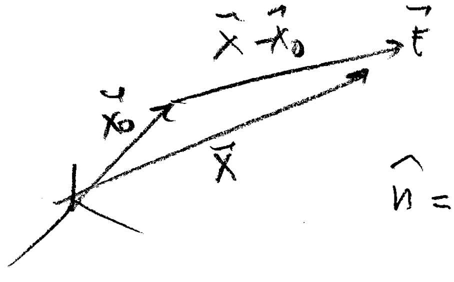
$$\vec E = -\vec\nabla\left(\frac{\vec p\cdot\vec x}{|\vec x|^3}\right) = -\vec\nabla_{|\vec x|}\left(\frac{\sum_i p_i x_i}{|\vec x|^3}\right)$$

$$= -\sum_i p_i\,\vec\nabla\,\frac{x_i}{|\vec x|^3} = -\sum p_i\,\frac{\overbrace{\vec\nabla x_i}^{\hat e_i}}{|\vec x|^3} - \underbrace{\sum p_i x_i}_{\vec p\cdot\vec x}\,\vec\nabla\frac{1}{|\vec x|^3}$$

$$= -\frac{\vec p}{|\vec x|^3} + \frac{3\vec x(\vec p\cdot\vec x)}{|\vec x|^5}$$



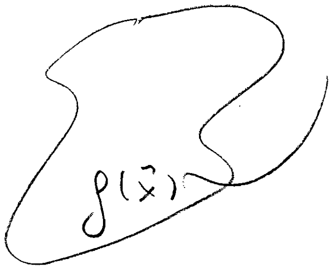
başlangıç noktasında değil



$$\vec E = \frac{3\hat n\,(\vec p\cdot\hat n) - \vec p}{|\vec x - \vec x_0|^3}$$

$$\hat n = \frac{\vec x - \vec x_0}{|\vec x - \vec x_0|}$$

4.2. Dış alan içinde bulunan bir yük dağılımının enerjisinin çok-kutup açılımı:



ile betimlenen bir yük dağılımı $\Phi_{Dış}(\vec{x})$ pot.'i içine konulduğunda, sist.'in elektrostatik enerjisi,

$$W = \int \rho(\vec{x})\, \Phi_{dış}(\vec{x})\, d^3\vec{x}$$

Taylor açılımı Φ belirli bir bölgede yavaş değişiyor ise,

$$\Phi_{dış}(\vec{x}) = \Phi(0) - \vec{x}\cdot\vec{E}(0) - \frac{1}{2}\sum_i\sum_j x_i x_j \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) + \dots$$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ (Dış alan için) $\quad \frac{1}{6} r^2\, \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(0)$'i son terimden çıkartalım

$$\Phi_{Dış} = \Phi(0) - \vec{x}\cdot\vec{E}(0) - \frac{1}{6}\sum_i\sum_j \left(3x_i x_j - r^2\delta_{ij}\right)\frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) + \dots$$

$$W = \int \rho(\vec{x})\underbrace{\Phi(0)}_{\text{sbt}}\, d^3\vec{x} - \int \vec{x}\cdot\rho(\vec{x})\underbrace{\vec{E}(0)}_{\text{sbt}}\, d^3x - \frac{1}{6}\int\sum\sum\left(\ \right)\frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0)\, d^3\vec{x} + \dots$$

$$= \underbrace{q\,\Phi(0)}_{\text{yük-pot}} - \underbrace{\vec{p}\cdot\vec{E}(0)}_{\text{çift kut. elekt. alanı}} - \underbrace{\frac{1}{6}\sum\sum Q_{ij}\frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0)}_{\text{dört-kutup-alan gradiyenti}} + \dots$$

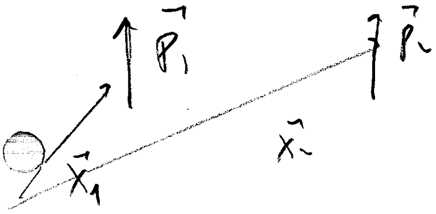
ve sair.

Atom çekirdekleri 4-kutup elektriksel mom.'e sahip olabilir. Bunların büyüklükleri ve işaretleri çekirdeklerin biçimlerini proton ve nötronlar arası etkileşmelerin niteliğini yansıtır.
Çekirdeğin toplam açısal mom. (J), z-bileşeni izdüşümü (M) ve diğer kuantum sayıları (α) olsun.

$$Q_{JM\alpha} = \frac{1}{e}\int (3z^2 - r^2)\,\rho_{JM\alpha}(\vec{x})\,d^3\vec{x} \leftarrow Q_{33}$$

$$= \frac{1}{e}\,Q_{33}$$

ρ 'nun z-ekseni etrafında silindirik sim. olduğundan, sıfırdan farklı 4-kutup q_{20} (Q_{33})'dür. Gerçekte $Q_{11} = Q_{22} = -\frac{1}{2}Q_{33}$



$$\vec{E}_2(\vec{x}_1) = \frac{3\hat{n}\,(\vec{p}_2\cdot\hat{n}) - \vec{p}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}$$

$$W_{12} = \frac{\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2 - 3\,(\hat{n}\cdot\vec{p}_1)(\hat{n}\cdot\vec{p}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}$$

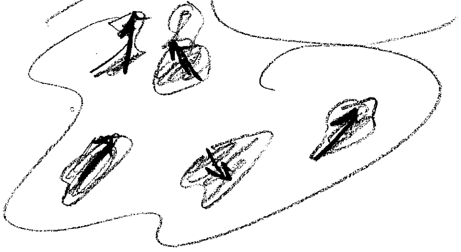
4.3.- Maddesel Ortamlarda Elektrostatik

Elektrostatik pot.'i ve alanları şimdiye değin yükler ve iletkenlerin varlığı halinde ve maddesel ortam yok iken yazdık. Mikroskopik ve makroskopik alanlar arasında ayrım yapmamıştık.

Makroskopik olaylar için Maxwell denklemlerini elde etmek için, makroskopik olarak küçük, fakat mikroskopik olarak büyük bölgeler üzerinden ort. alma gerekliliği vardır.

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}_{mikro} = \vec{0} \;\rightarrow\; \text{ort. (makroskopik) alındığında} \;\; \vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0}$$

bu da elektrostatikte $\vec{E}$ alanın aynı Φ pot.'inden türetileceğini gösterir. $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ $\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$



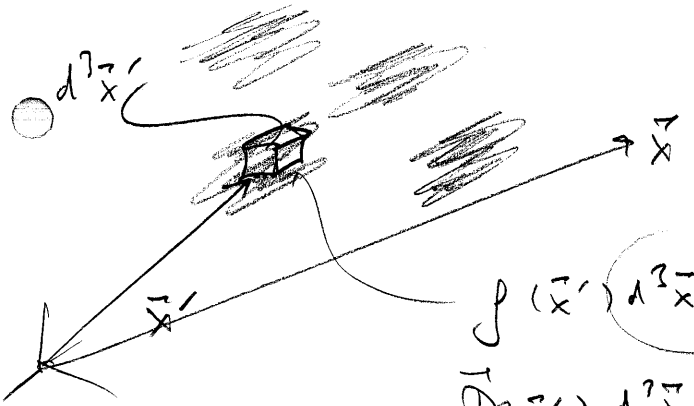
atom ya da mol.'lerden oluşan grupta dış alan yok iken çoğu çok kutup ort.'sı sıfırdır. Alan varlığında ise en baskın olanı çift-kutuptur.

$$\vec{P}(\vec{x}) = \sum_i N_i \langle \vec{p}_i \rangle$$

$$\rho(\vec{x}) = \sum N_i \langle e_i \rangle + \rho_{serbest}$$ makroskopik dünyaya geçiyoruz.

genellikle sıfırdır.

Maddesel ortama makroskopik açıdan bakalım.



$\rho(\vec{x}')\, d^3\vec{x}'$ içindeki yük miktarı

$\vec{P}(\vec{x}')\, d^3\vec{x}'$ dipol var.

$$d\Phi(\vec{x}) = \frac{\rho_s(\vec{x}')\, d^3\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \frac{(\vec{x}-\vec{x}')\cdot\vec{P}(\vec{x}')\, d^3\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

$$\Phi(\vec{x}) = \int_{\text{tüm uzay}} \frac{\rho_s(\vec{x}')\, d^3\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \int \frac{(\vec{x}-\vec{x}')\cdot\vec{P}(\vec{x}')\, d^3\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

$$= \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

$$= \int_{TU} \frac{\rho_s(\vec{x}')\, d^3\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \int \vec{P}(\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\, d^3\vec{x}'$$

$$\vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) = \underbrace{\vec{P}(\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)}_{\text{yerine koy}} + \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}(\vec{x}')$$

BS K

$$\Phi(\vec{x}) = \int_{TU} \frac{\rho_s(\vec{x}')\,d^3\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \int_{TU} \underbrace{\vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) d^3\vec{x}'}_{\text{Div. teo. uygula.}}$$

$$- \int_{TU} \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3\vec{x}'$$

$$= \int \frac{\rho_s(\vec{x}')\,d^3\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \cancel{\oint_{\substack{\text{sonsuzdan geçen}\\ \text{küre yüzeyi}}} \frac{\vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \cdot \hat{n}\, dS} - \int \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3\vec{x}'$$

$$= \int d^3\vec{x}' \frac{\overbrace{[\rho_s(\vec{x}') - \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{x}')]}^{I}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

\# Φ pot.-ini oluşturan efektif yük I'dır. Öyleyse maddesel ortamlarda şu denk.'i yazabiliriz.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \big(\rho_s - \overbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}^{\rho_p \text{ polarizasyon yükü}} \big)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \underbrace{(\vec{E} + 4\pi \vec{P})} = 4\pi \rho_s$$

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} \quad \text{yerdeğiştirme vekt.}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \rho}$$

Maddesel ort. lineer olsun; olması polarizasyon vektörünün elektrik alanın bileşenleri ile orantılı olması demektir.

$$D_i = \sum_j \underbrace{\chi_{ij}}_{\text{alınganlık tensörü}} E_j \qquad i,j = 1,2,3$$

Ortam izotropik olsun

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E}$$

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\chi_e\vec{E} = \underbrace{(1+4\pi\chi_e)}_{\epsilon}\vec{E}$$

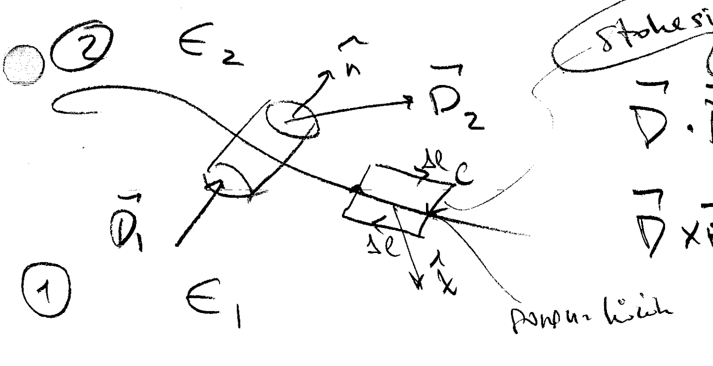
ε ort.ın dielektrik katsayısı.

$$\vec{\nabla}\cdot(\epsilon\vec{E}) = 4\pi\rho_s$$

ortam; lineer, izotropik ve ayrıca düzgün olsun (ε sbt olsun yerden yere bağlı olmaz) o zaman,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\frac{\rho_s}{\epsilon}$$ böylece ortamdaki tüm problemler daha evvel gördüğünüz problemlere indirgendi.

Elektrik alanların bulunduğu ortamları tümü bu düzgün ortam ile dolu değilde, yüzyüze değişik ortamlar sözkonusu ise, arakesitlerde $\vec{D}$ ve $\vec{E}$ arasında sınır koşulları prob.ini ele almamız gerekir.



$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 4\pi\rho \Rightarrow \oint_S \vec{D}\cdot\hat{n}\,da = 4\pi\int \rho_s\,d^3x$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \Rightarrow \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

$$\vec{D}_2\cdot\hat{n} - \vec{D}_1\cdot\hat{n} = 4\pi\sigma_s$$ arakesit yüzeyi üzerinde serbest yük yoğ.

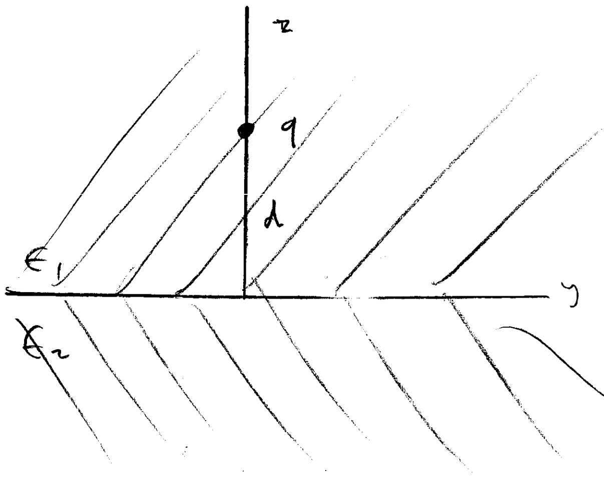
$$\vec{E}_2\times\hat{n} - \vec{E}_1\times\hat{n} = \vec{0}$$

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\cdot\hat{n}\cancel{\Delta a} = 4\pi\sigma\cancel{\Delta a}$$

$$= (\vec{t}\times\hat{n})\cdot(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\Delta l = 0$$

tangential

4.4. Dielektrikli sınır-değer problemleri



$$\epsilon_1 \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \qquad z>0$$

$$\epsilon_2 \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \qquad z<0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \qquad z \lessgtr 0$$

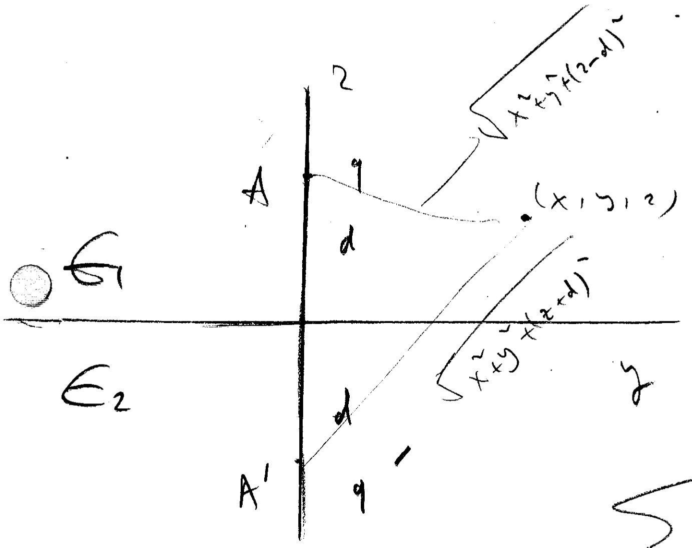
z=0 düzlemi

$$\lim_{z\to 0^+}\{\epsilon_1 E_z\} = \lim_{z\to 0^-}\{\epsilon_2 E_z\} \qquad \mathrm{I}$$

$$\lim_{z\to 0^+}\{E_x\} = \lim_{z\to 0^-}\{E_x\} \qquad \mathrm{II}$$

$$\lim_{z\to 0^+}\{E_y\} = \lim_{z\to 0^-}\{E_y\} \qquad \mathrm{III}$$

yukarıdaki çöz. bulmak için aşağıya bir yük, aşağıda bulmak için yukarıya bir yük yerleştireceğiz.



$$\epsilon_1 \Phi_{ü}(x,y,z) = \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(d-z)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}} \qquad z>0$$

benzer şekilde,
bu sefer yukarıya q'' koyalım. Alt bölgede çözüm arıyoruz. q'nün yerine

$$\epsilon_2 \Phi_A(x,y,z) = \frac{q''}{\sqrt{x^2+y^2+(d-z)^2}} \qquad z<0$$

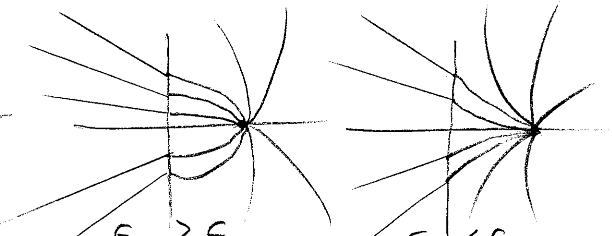
Laplace denk.nin çözümü. A'ya yerleştirildiği düşünülen q'' yükünün pot.i

$$\mathrm{I} \qquad \epsilon_1 \left.\frac{\partial \Phi_{ü}}{\partial z}\right|_{z=0} = \epsilon_2 \left.\frac{\partial \Phi_A}{\partial z}\right|_{z=0} \qquad (1)$$

II $$\left.\frac{\partial \Phi_{ü}}{\partial x}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial \Phi_A}{\partial x}\right|_{z=0} \qquad (2)$$

III de pot. y'ye göre sim. olacağından bunun aynısı verir.

$$(1) \rightarrow \quad \frac{(q-q')\,d}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{q''\,d}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$



$\epsilon_2 > \epsilon_1$ $\qquad$ $\epsilon_2 < \epsilon_1$

$$\left.\begin{array}{l} q - q' = q'' \\ (2) \rightarrow \quad \dfrac{1}{\epsilon_1}(q+q') = \dfrac{1}{\epsilon_2} q'' \end{array}\right\} \qquad q' = -\frac{\epsilon_2-\epsilon_1}{\epsilon_2+\epsilon_1}\, q \qquad q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2+\epsilon_1}\, q$$

q'' ve q''yü q, ϵ_1, ϵ_2 cinsinden bul! 4.45.

polarizasyon yük yoğunluğu,

$$\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\chi_e \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \quad q \text{ yükü dışında.}$$

$z=0$ düzlemi üzerinde yüzeysel polarizasyon yük dağ. var. der.

$$\sigma_{kutup} = (\vec{P}_1 - \vec{P}_2)\cdot\hat{k}$$

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$$

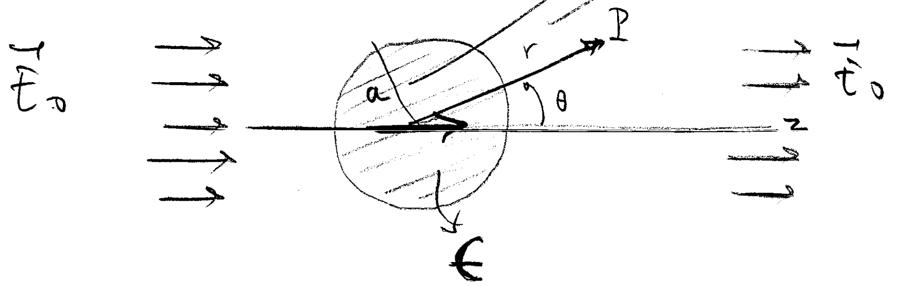
$$\left.\begin{array}{l} \epsilon_1 \vec{E} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}_1 \\ \epsilon_2 \vec{E} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}_2 \end{array}\right\} \qquad \vec{P}_1 = \frac{\epsilon_1 - 1}{4\pi}\vec{E} \qquad \vec{P}_2 = \frac{\epsilon_2-1}{4\pi}\vec{E}$$

büyüdükçe σ_p küçülüyor.
$\epsilon_2 >> \epsilon_1$ olursa ort. 2
iletkene yaklaşır.
$\epsilon_2 \to \infty \Rightarrow \Phi_A = 0$

$$\sigma_p = \frac{\epsilon_1-1}{4\pi}\left.\frac{\partial \Phi_{ü}}{\partial z}\right|_{z=0} + \frac{\epsilon_2-1}{4\pi}\left.\frac{\partial \Phi_A}{\partial z}\right|_{z=0} = -\frac{q}{2\pi}\,\frac{\epsilon_2-\epsilon_1}{\epsilon_1(\epsilon_1+\epsilon_2)}\,\frac{d}{(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}$$

2. Örnek.

İçeride ve dışarıda serbest yük yok! → Laplace denk.'i, r=a daki sınır koşulları ile.



hacimsel polarizasyon yükü olmayacak. küre homojen olduğu için φ'ye bağımlılık yok.

$$\Phi_{iç}(r,\theta) = \sum_{\ell=0} A_\ell r^\ell P_\ell(\cos\theta)$$

$$\Phi_{Dış}(r,\theta) = \sum_\ell \left[B_\ell r^\ell + C_\ell r^{-(\ell+1)} \right] P_\ell(\cos\theta)$$

sonsuzdaki sınır koşulundan ($\Phi \to -E_0 z = -E_0 r\cos\theta$) sıfırdan farklı tek $B_\ell \to B_1 = -E_0$ 'dır.

$$= \underbrace{-E_0 r\cos\theta}_{z} + \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell r^{-(\ell+1)} P_\ell(\cos\theta)$$

r = a'daki sınır koşulları;

teğetsel $\vec{E}$: $$-\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_{iç}}{\partial\theta}\bigg|_{r=a} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_{Dış}}{\partial\theta}\bigg|_{r=a}$$

Dik $\vec{D}$: $$-\epsilon\frac{\partial \Phi_{iç}}{\partial r}\bigg|_{r=a} = -\frac{\partial \Phi_{Dış}}{\partial r}\bigg|_{r=a}$$

dur.

$$\epsilon \sum_{l=0} l A_l a^{l-1} P_l = -E_0 \underbrace{\cos\theta}_{P_1} - \sum_{l=0} (l+1) C_l a^{-(l+2)} P_l$$

$$\sum_l A_l a^l \frac{dP_l}{d\theta} = -E_0 a \frac{dP_1}{d\theta} + \sum C_l a^{-(l+1)} \frac{dP_l}{d\theta}$$

$$\epsilon A_1 = -E_0 - 2 C_1 a^{-3}$$

$$\epsilon l a^{l-1} A_l = -(l+1) C_l a^{-(l+2)} \qquad l \neq 1$$

$$-\epsilon \frac{l}{l+1} a^{2l+1} A_l = C_l \quad \text{dur.} \quad l \neq 1$$

$$A_1 a = -E_0 a + C_1 a^{-2}$$

$$A_l a^l = C_l a^{-(l+1)} \Rightarrow A_l a^{2l+1} = C_l \qquad l \neq 1$$

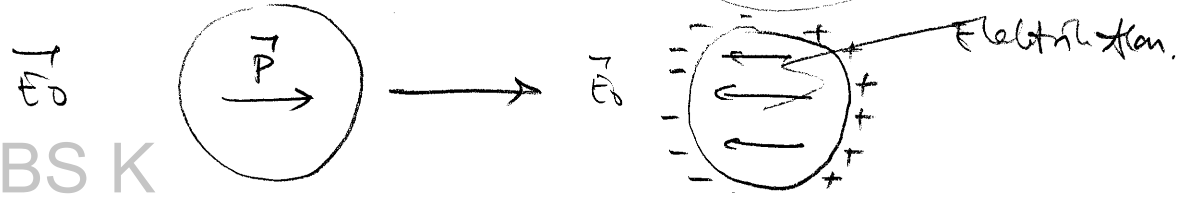
$$A_1 = -\left(\frac{3}{2+\epsilon}\right) E_0$$

$$C_1 = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} E_0 a^3$$

$$\Phi_{iç}(r,\theta) = -\frac{3}{2+\epsilon} E_0 r \cos\theta \qquad (1)$$

polarizasyon yüklerinin oluşturacağı dipol

$$\Phi_{dış}(r,\theta) = -E_0 r \cos\theta + \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} a^3 E_0 \frac{\cos\theta}{r^2}$$



yük dağılımınıda bulmak mümkün

$$\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{r} = \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\, a^3 E_0 \underbrace{\hat{k}\cdot\hat{r}}_{\cos\theta}$$

$$\vec{P} = \cancel{\chi\vec{E}} = \frac{\epsilon-1}{4\pi}\vec{E}$$

(1) den $\vec{E}_{iç} = \frac{3}{2+\epsilon} E_0 \hat{k}$

(2) " $\vec{P} = \frac{3}{4\pi}\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} E_0 \hat{k}$ pol. yük yoğ. u her yerde düzgün.

içerideki pol. yük yoğ. $\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = 0$

(2) 'yi $\frac{4}{3}\pi a^3$ le çarpıp toplam dip. dağılımı bulunur.

$$\sigma_p = \frac{3}{4\pi}\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} E_0 \cos\theta$$ yüzey üzerindeki

4.7. Dielektrik ortamlarda Elektrostatik enerji

boşlukta şöyle idi;

$$W = \frac{1}{2}\int_{TU} \rho(\vec{x})\, \varphi(\vec{x})\, d^3\vec{x}$$

Maddesel ort. lineerse) yine geçerli

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 4\pi\rho$$

$$W = \frac{1}{8\pi}\int (\vec{\nabla}\cdot\vec{D})\, \varphi\, d^3\vec{x}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{D}) = \vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{D} + \varphi\,\vec{\nabla}\cdot\vec{D}$$

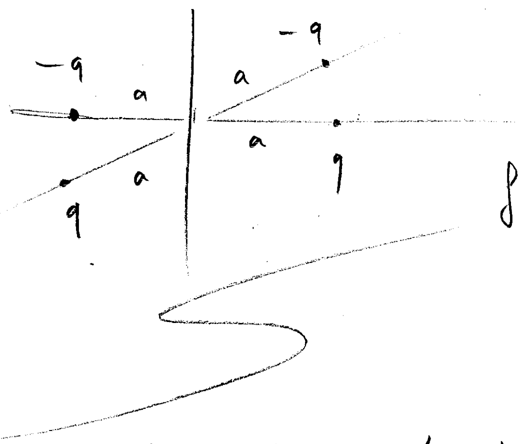
$$W = \frac{1}{8\pi}\int_{\text{tüm}} \vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{D})\,d^3\vec{x} - \frac{1}{8\pi}\int_{\text{tüm}} \vec{D}\cdot\vec{\nabla}\varphi\,d^3\vec{x}$$

$$= \cancel{\frac{1}{8\pi}\oint \underbrace{\varphi}_{1/r}\,\underbrace{\vec{D}}_{1/r^2}\cdot\hat{n}\,da} - \frac{1}{8\pi}\int_{\text{tüm}} \vec{D}\cdot\vec{\nabla}\varphi\,d^3\vec{x}$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int_{\text{tüm}} \underbrace{\vec{E}}_{\text{dielektrik ort. içindeki } \vec{E}}\cdot\vec{D}\,d^3x$$

düzgün ort., izotropik, $W = \frac{\varepsilon}{8\pi}\int |\vec{E}|^2 d^3\vec{x}$

Prb.4.1.) Şekilde görülen yük dağılımlarının $q_{\ell m}$ çok-kutup momentlerini hesaplayınız. Tüm ℓ değerleri için geçerli olan sıfırdan farklı momentlerin ifadelerini elde etmeye çalışınız; fakat her dağılım için sıfırdan farklı ilk iki momenti bulunuz.



$$q_{\ell m} = \int Y_{\ell m}^{*}(\theta', \varphi')\, r'^{\ell} \rho(\vec{x}')\, d^3x'$$

$$\rho(\vec{x}') = \frac{q}{r'^2}\Big[\delta(\varphi'-0) + \delta(\varphi'-\tfrac{\pi}{2}) - \delta(\varphi'-\pi) - \delta(\varphi'-\tfrac{3\pi}{2})\Big]\delta(\theta'-\tfrac{\pi}{2})\,\delta(r'-a)$$

bunu $r'^2 \sin\theta' d\theta' dr' d\varphi'$ hacim elemanı ile çarptığımızda toplam yük sıfır olacak.

$$q_{\ell m} = q \int Y_{\ell m}^{*}(\theta', \varphi')\, r'^{\ell} \frac{1}{r'^2}\, r'^2 dr' \sin\theta' d\theta' d\varphi'$$

$$\times\Big[\delta(\varphi'-0) + \delta(\varphi'-\tfrac{\pi}{2}) - \delta(\varphi'-\pi) - \delta(\varphi'-\tfrac{3\pi}{2})\Big]\delta(\theta'-\tfrac{\pi}{2})\,\delta(r'-a)$$

$$= q a^{\ell}\Big[Y_{\ell m}^{*}(\tfrac{\pi}{2}, 0) + Y_{\ell m}^{*}(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) - Y_{\ell m}^{*}(\tfrac{\pi}{2}, \pi) - Y_{\ell m}^{*}(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2})\Big]$$

$$= q a^{\ell} P_{\ell}^{m}(0)\left[\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^{1/2}\Big[1 + e^{-im\frac{\pi}{2}} - e^{-im\pi} - e^{-im\frac{3\pi}{2}}\Big]$$

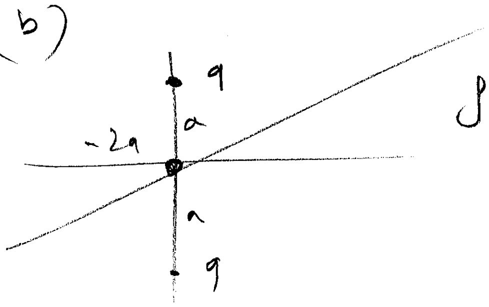
$$= \begin{cases} 0 & m \text{ çift} \\ 2qa^{\ell}\left[\dfrac{2\ell+1}{4\pi}\dfrac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^{1/2}(1-i^{m}) & m \text{ tek} \end{cases}$$

$q_{00} = 0 \qquad q_{1-1} = -2qa\sqrt{\frac{2}{8\pi}}\,(1+i)$

$q_{10} = 0 \qquad q_{20} = q_{21} = q_{22} = q_{33} = q_{32} = 0$

$q_{11} = 2qa\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,(1-i) \qquad q_{33} = -2qa^2\sqrt{\frac{35}{64\pi}}\,(1+i)$

(b)



$$\rho(\vec{x}') = -2q\frac{\delta(r')}{4\pi r'^2} + q\frac{\delta(r'-a)\,\delta(\cos\theta-1)}{2\pi r'^2} + q\frac{\delta(r'-a)\,\delta(\cos\theta+1)}{2\pi r'^2}$$

$$Y^*_{lm}(\theta',\varphi') = P_l^m(\cos\theta')\sqrt{\quad}\,e^{-im\varphi'}$$

φ'ye bağımlılık yok!

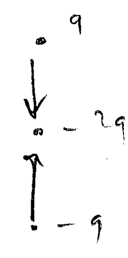
$m \neq 0 \Rightarrow q_{lm} = 0$ İntegralde 0'dan 2π'ye integrali sıfır.

$m = 0 \Rightarrow q_{lm} \neq 0$

$$q_{l0} = q\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\left[-2\delta_{l0} + a^l P_l(1) + a^l P_l(-1)\right]$$

$$= q\sqrt{\quad}\left[-2\delta_{l0} + a^l + (-1)^l a^l\right]$$

$$= \begin{cases} 0 & l \text{ tek} \\ 2q\sqrt{\quad}\,(a^l - \delta_{l0}) & l \text{ çift} \end{cases}$$



zıt yönlerde dipol oluşuyor.

$q_{00} = 0$ toplam yük "0"

$q_{20} = 2\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\,qa^2 \qquad q_{2n,0} = 4qa^{2n}\sqrt{\frac{4n+1}{4\pi}} \quad n = 1, 2, \ldots$

$q_{10} = 0$

$q_{40} = 2\sqrt{\frac{9}{4\pi}}\,qa^4$

(c) (b) deki yük dağılımınca oluşturulan pot.in çok kutup açılımını yazınız.

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_l \sum_m \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y^*_{lm}(\theta,\varphi)}{r^{l+1}}$$

$$= \sum_l \frac{4\pi}{\cancel{2l+1}} 2q \sqrt{\frac{\cancel{2l+1}}{\cancel{4\pi}}} (a^l - \delta_{l0}) \sqrt{\frac{\cancel{2l+1}}{\cancel{4\pi}}} \frac{P_l(\cos\theta)}{r^{l+1}}$$

$$= 2q \sum_{l=0}^{\infty} (a^l - \delta_{l0}) P_l(\cos\theta) \frac{1}{r^{l+1}} \qquad l \text{ çift.}$$

$$= 2q \left[\frac{a^2}{r^3} P_2(\cos\theta) + \frac{a^4}{r^5} P_4(\cos\theta) + \dots \right]$$

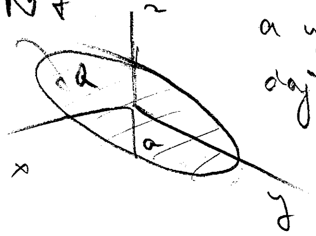
$$\simeq \frac{2qa^2}{r^3} \frac{1}{2} (3\cos^2\theta - 1) \simeq -\frac{qa^2}{r^3} \qquad xy\text{-düzleminde } \theta = \pi/2$$

(d) (b) dağılımının xy-düzlemindeki tam pot.ini doğrudan Coulomb yasasından hesaplayınız.

$$\Phi(xy\text{-düz}) = -\frac{2q}{r} + \frac{2q}{\sqrt{r^2+a^2}} = -\frac{2q}{r} + \frac{2q}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$\simeq -\frac{qa^2}{r^3}$$

Not



a yarıçaplı Q yükü dağılımı dışında q_{lm}

φ'den bağımsız. $\rho(\vec{x}) = \frac{3Q}{2\pi a^3} \delta(\theta - \frac{\pi}{2}) \Theta(R-r)$

$$q_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{3Q}{2\pi a^3} 2\pi \frac{a^{l+3}}{l+3} P_l(0)$$

$$q_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} Q \qquad q_{10} = \sqrt{\frac{2\pi}{64\pi}} Qa$$

prb. 4.2.) $\vec{p}$ momentli bir noktasal çift-kutup $\vec{X}_0$ noktasında bulunmaktadır. Dirac-δ fonk.'unun türevinin özelliklerinden faydalanarak, dış alan içinde bu çift-kutbun Φ pot.'ini ya da enerjisinin hesaplanmasında çift kutbun $\rho_{etk}(\vec{x}) = -\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)$ şeklinde bir etkin yük yoğ. ile temsil edilebildiğini gösterin.

$$\int f(x')\,\delta'(x'-a)\,dx' = -f'(a)$$

$$\Phi(\vec{x}) = -\int \frac{\vec{p}\cdot\vec{\nabla}'\delta(\vec{x}'-\vec{x}_0)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,d^3\vec{x}' = -\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|}$$

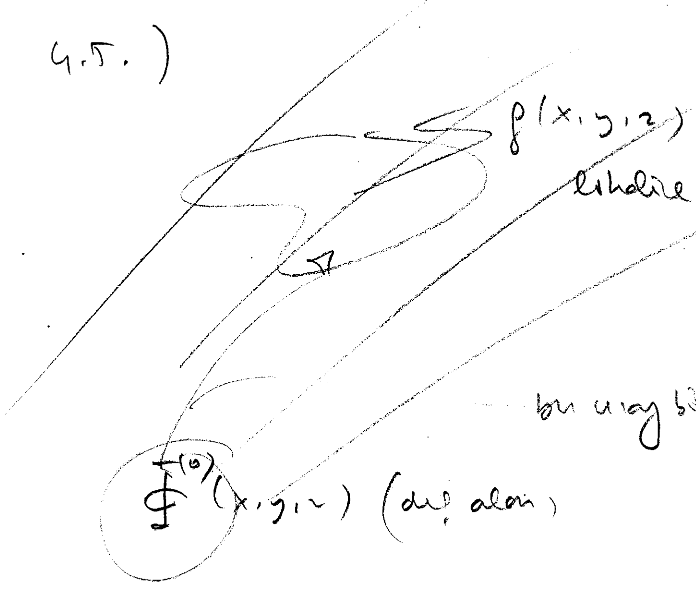
noktasındaki $\vec{p}$'nin $\vec{x}$ de oluşturduğu pot.

$$\vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{p}\,\delta(\vec{x}'-\vec{x}_0)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{\nabla}'\delta(\vec{x}'-\vec{x}_0)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \delta(\vec{x}'-\vec{x}_0)\,\vec{p}\cdot\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

$$I = -\int d^3\vec{x}'\,\vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{p}\,\delta(\vec{x}'-\vec{x}_0)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) + \int d^3\vec{x}'\,\delta(\vec{x}'-\vec{x}_0)\,\vec{p}\cdot\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

$$= -\oint_S \cancelto{0}{\left(\vec{p}\,\frac{\delta(\vec{x}'-\vec{x}_0)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)} + \vec{p}\cdot\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|}$$

4.5.)



(a)

$$\vec E^{(0)}(\vec x) = -\vec\nabla \Phi^{(0)}(\vec x)$$

$$\vec F = \int d^3\vec x\, \rho(\vec x)\, \vec E^{(0)}(\vec x)$$

bu uzay bölgesinde yavaş ... den dolayı

$\vec X_0$ civarında Taylor seri.

$$F_i = \int d^3x\, \rho(\vec x)\, E_i^{(0)}(\vec x)$$

$$= \int d^3\vec x\, \rho(\vec x) \left\{ E_i^{(0)}(0) + \sum_j x_j \left.\frac{\partial E_i^{(0)}}{\partial x_j}\right|_{x=0} + \frac{1}{2!}\sum_j\sum_k x_j x_k \left.\left(\frac{\partial^2 E_i}{\partial x_j \partial x_k}\right)\right|_{x=0} + \dots \right.$$

$$= Q E_i^{(0)}(0) + \sum_j \int d^3x\, \rho(\vec x)\, x_j \left.\left(\frac{\partial E_i^{(0)}}{\partial x_j}\right)\right|_0$$

$$+ \frac{1}{2!}\sum_j\sum_k \int d^3\vec x\, \rho(\vec x)\, x_j x_k \left.\left(\frac{\partial^2 E_i^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k}\right)\right|_0 + \dots$$

$$\vec\nabla \times \vec E = \vec 0 = \frac{\partial E_i}{\partial x_j} - \frac{\partial E_j}{\partial x_i} = 0$$ maddesel ortamlarda doğru.

$$= Q E_i^{(0)}(0) + \sum_j \underbrace{\int d^3x\, \rho(\vec x)\, x_j}_{p_j} \left.\left(\frac{\partial E_j^{(0)}}{\partial x_i}\right)\right|_0 +$$

$$+ \sum_j p_j \left.\left(\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right)\right|_0 +$$

son

$$= Q E_i^{(0)}(0) + \left.\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(\vec p \cdot \vec E)\right]\right|_0 + \frac{1}{6}\sum\sum \int d^3\vec x\, 3 x_j x_k \left.\frac{\partial^2 E_j^{(0)}}{\partial x_i \partial x_k}\right|_0$$

BS K

$\vec\nabla\cdot\vec E=\vec 0$'dan

$$-\frac{r^2}{6}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j\sum_k \frac{\partial E_j}{\partial x_k}\delta_{jk}\right)$$ ~ son terimden çıkartalım

$$= -\frac{r^2}{6}\sum_j\sum_k \delta_{jk}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial E_j}{\partial x_i}$$ — $\partial E_i/\partial x_j$ ($\vec\nabla\times\vec E=\vec 0$'dan)

$$= -(r^2/6)\sum_j\sum_k \delta_{jk}\frac{\partial^2 E_i}{\partial x_k\,\partial x_j}$$

$$F_{Qi}=\frac{1}{6}\sum_j\sum_k\int d^3x\,\rho(\vec x)\,(3x_jx_k-r^2\delta_{jk})\frac{\partial^2 E_i^{(0)}}{\partial x_k\,\partial x_j}\bigg|_0$$

$$=\frac{1}{6}\sum_j\sum_k Q_{jk}\frac{\partial^2 E_i^{(0)}}{\partial x_k\,\partial x_j}$$ — $\partial E_k^{(0)}/\partial x_i$

$$=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j\sum_k\frac{1}{6}Q_{jk}\frac{\partial E_j}{\partial x_k}\bigg|_0\right)$$

$$\vec F= Q\vec E^{(0)}(0)+[\vec\nabla(\vec p\cdot\vec E)]_0+\vec\nabla\left(\sum_j\sum_k\frac{1}{6}Q_{jk}\frac{\partial E_j^{(0)}}{\partial x_k}\right)\bigg|_0$$

$$=\vec\nabla[Q\,\Phi^{(0)}(0)]+\dots$$

(b) toplam kuvvet momenti için. yukarıdaki hesabı yineleyelim.

$$\vec N=\int\vec x\times\rho(\vec x)\,\vec E^{(0)}(\vec x)\,d^3x$$

$$N_1=\int[\vec x\times\vec E^{(0)}(\vec x)]_1\,\rho(\vec x)\,d^3x$$

$$=\int[x_2E_3(0)-x_3E_2(0)]\,\rho(\vec x)\,d^3x = p_2E_3(0)-p_3E_2(0)$$

$$=(\vec p\times\vec E(0))_1$$

4.7.) $\rho(\vec{x}) = \frac{1}{64\pi} r^2 e^{-r} \sin^2\theta$ lokalize yük dağılımı verilmiş.

(a) bunun oluşturduğu pot.'in çok-kutup açılımı

$$q_{lm} = \int Y^*_{lm}(\theta',\varphi')\, \rho(r',\theta',\varphi')\, r'^2 dr'\, d(\cos\theta')\, d\varphi'$$

yük dağılımı φ'den bağımsız $q_{lm} = 0$ $m \neq 0$ ile

$$q_{l0} = \frac{1}{64\pi}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\, 2\pi \int P_l(\cos\theta)\, r'^{l+4} e^{-r'} d(\cos\theta')\, dr'$$

$\sin^2\theta = 2\,(1 - P_2(\cos\theta))/3$

$= \frac{2}{3}\left(Y_{00} - \frac{1}{\sqrt{5}} Y_{20}\right)$

$$\int_0^\infty dr'\, e^{-r'} r'^{l+4} = (l+4)!$$

$\rho(0) = 0$

$$\rightarrow q_{l0} = \frac{2\pi\,(l+4)!}{64\pi}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$$

$$q_{00} = \frac{24\times 2}{64\pi}\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\, 2\pi \qquad q_{10} = 0 \qquad q_{20} = -3\sqrt{\frac{5}{4\pi}} \qquad q_{l0} = 0 \quad \underline{l \geq 3}$$

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{l=0} \frac{4\pi}{2l+1}\, q_{l0}\, \frac{Y_{l0}(0,\varphi)}{r^{l+1}}$$

$$= \frac{1}{r} - \frac{6}{r^3} P_2(\cos\theta) \quad \begin{cases} l=0 \\ \uparrow \\ l=2 \end{cases}$$

(b) pot.'i uzayın herhangi bir noktasında hesaplayınız.

$$\Phi(\vec{x}) = \int \frac{\rho(\vec{x}')\, d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \int 2\pi\rho(r',\theta') \sin\theta'\, d\theta'\, r'^2 dr' \sum \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\theta')$$

$$\cong \sum_{l=0}^{\infty} r^l \int_0^\infty\!\!\int_0^{\pi} 2\pi\, r'^{-l+1} dr'\, \sin\theta'\, P_l(\cos\theta')\, \rho(r',\theta')\, d\theta'$$

$r_< = r$

$r_> = r'$

$\ell = 0 \Rightarrow \text{Int.} = 1/4$

$\ell = 2 \Rightarrow \quad = -1/120$

$$\Phi(\vec{x}) \simeq \frac{1}{4} - \frac{r^2}{120} P_2(\cos\theta) \simeq \frac{1}{4} - \frac{r^2}{120} \cdot \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$$

$$\simeq \frac{1}{4} - \frac{r^2}{120}\left(\frac{3z^2}{r^2} - 1\right) \simeq \frac{1}{4} - \frac{3z^2 - r^2}{120} \simeq \frac{1}{4} - \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{120}$$

$$E_x = -\partial\Phi/\partial x = -\frac{x}{120} \qquad \partial E_x/\partial x = -1/120$$

$$E_y = -\partial\Phi/\partial y = -\frac{y}{120} \qquad \partial E_y/\partial x = -1/120$$

$$E_z = -\partial\Phi/\partial z = \frac{z}{60} \qquad \partial E_z/\partial z = 1/60$$

$$Q = 10^{-24}\ \text{cm}^2$$

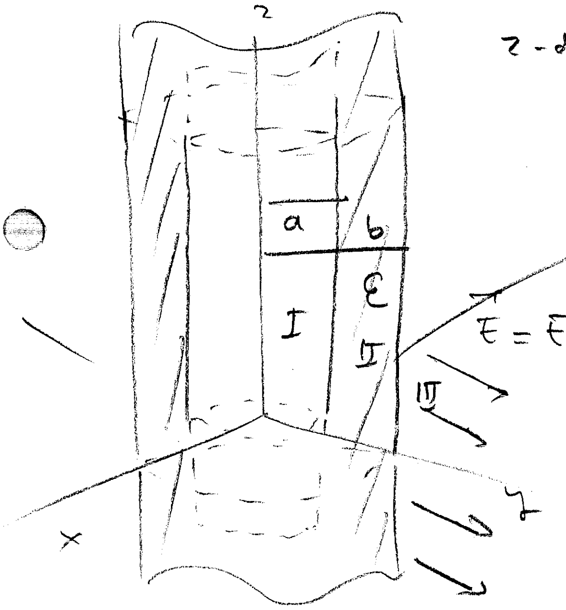
$$W = -\frac{1}{6} Q_{ij} \frac{\partial E_i}{\partial x_j}$$

$$Q = \frac{1}{e} Q_{33} \qquad Q_{11} = Q_{22} = \frac{Q_{33}}{2}$$

$$W = \left[Q_{11} \frac{\partial E_x}{\partial x} + Q_{22} \frac{\partial E_y}{\partial y} + Q_{33} \frac{\partial E_z}{\partial z} \right] = -\frac{e^2 Q}{720}$$

BS K

4.8. İç ve dış yarıçapları sırasıyla a ve b olan ε dielektrik sabitli çok uzun bir dairesel kesitli silindirik kabuk, ekseni alana dik olacak şekilde, başlangıçta $\vec{E}$ elektrik alanı içerisine konulmuştur. Silindirin içindeki ve dışındaki ortam birim dielektrik sabitlidir. (a) Uç etkileri önemsemeksizin üç bölgede de pot. ve elekt. alanı hesaplayınız. (b) b=2a tipik hali için kuvvet çizgilerini çiziniz. (c) Düzgün bir alan içinde içi dolu bir silindir haline uygun şekilde çözümün etkilerini tartışınız.



z-den bağımsız.

$$\Phi_{III}(\rho\to\infty,\varphi) = -E_0\rho\sin\varphi \quad \text{sınır koşulu.}$$

$$\vec{E}=E\hat{y} \qquad \Phi_I(\rho,\varphi) = \sum_m A_m\rho^m \sin m\varphi \qquad \rho\le a$$

$$\Phi_{II}(\rho,\varphi) = \sum_m \left(B_m\rho^m + C_m\rho^{-m}\right)\sin m\varphi$$

$$\Phi_{III}(\rho,\varphi) = -E_0\rho\sin\varphi + \sum_m E_m\rho^{-m}\sin m\varphi$$

sınırlardaki Φ ve $\epsilon\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}$'nın süreklilik şartı.

$$A_m a^{m-1} = \epsilon\left(B_m a^{m-1} - C_m a^{-m-1}\right)$$

$$A_m a^m = B_m a^m + C_m a^{-m}$$

$$-E_0 + E_1 b^{-2} = \epsilon\left(B_1 - C_1 b^{-2}\right)$$

$$-E_m b^{-m-1} = \left(B_m b^{m-1} - C_m b^{-1-m}\right)\epsilon \qquad m>1$$

$$E_0 b + E_1 b^{-1} = B_1 b + C_1 b^{-1}$$

$$E_m b^{-m} = B_m b^m + C_m b^{-m} \qquad m>1$$

BS K

$m \neq 1$ için 4 homojen denk., $m \neq 1$ li katsayıların tamamının sıfır olduğunu söyler.

$$\Phi_1(\rho,\varphi) = \frac{-4E_0 b^2 \epsilon \rho \sin\varphi}{b^2(\epsilon+1)^2 - a^2(\epsilon-1)^2}$$

$$\Phi_2(\rho,\varphi) = \frac{(-2E_0)\left[b^2(\epsilon+1)\rho + a^2 b^2(\epsilon-1)\rho^{-1}\right]}{b^2(\epsilon+1)^2 - a^2(\epsilon-1)^2}\sin\varphi$$

$$\Phi_3(\rho,\varphi) = -E_0\rho\sin\varphi - E_0 b^2\frac{(a^2-b^2)(\epsilon+1)(\epsilon-1)}{b^2(\epsilon+1)^2 - a^2(\epsilon-1)^2}\rho^{-1}\sin\varphi$$

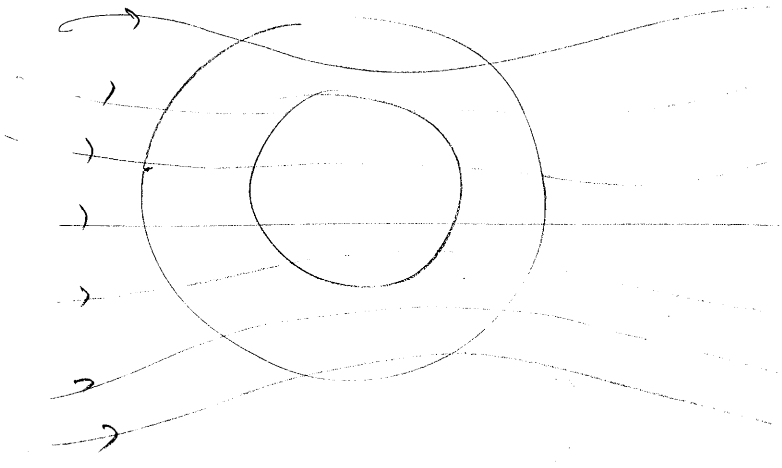
$$\vec{E} = -\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\hat{e}_\rho - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\hat{e}_\varphi$$

$$\vec{E}_1 = \frac{4b^2\epsilon E_0}{b^2(\epsilon+1)^2 - a^2(\epsilon-1)^2}\left[\sin\varphi\,\hat{e}_\rho + \cos\varphi\,\hat{e}_\varphi\right]$$

$$\vec{E}_2 = \frac{2b^2 E_0}{b^2(\epsilon+1)^2 - a^2(\epsilon-1)^2}\Big\{\Big[(\epsilon+1) + \frac{a^2}{\rho^2}(\epsilon-1)\Big]\sin\varphi\,\hat{e}_\rho + \Big[(\epsilon+1) - \frac{a^2}{\rho^2}(\epsilon-1)\Big]\cos\varphi\,\hat{e}_\varphi\Big\}$$

$$\vec{E}_3 = E_0\left[\sin\varphi\,\hat{e}_\rho - \cos\varphi\,\hat{e}_\varphi\right] - \frac{(a^2-b^2)(\epsilon^2-1)}{b^2(\epsilon+1)^2 - a^2(\epsilon-1)^2}\frac{E_0 b}{\rho^2}\left(\sin\varphi\,\hat{e}_\rho + \cos\varphi\,\hat{e}_\varphi\right)$$

b



(c) (i)

$a = 0 \qquad \Phi_1 = 0$

$$\Phi_2(\rho,\varphi) = \frac{2E_0 \rho \sin\varphi}{(\epsilon+1)}$$

$$\Phi_3(\rho,\varphi) = -E_0 \rho \sin\varphi + \frac{E_0 b^2}{\rho} \frac{\epsilon-1}{\epsilon+1} \sin\varphi$$

(ii) $b \gg a$

$$\Phi_1(\rho,\varphi) = \frac{-4\epsilon E_0 \rho}{\epsilon+1} \sin\varphi$$

$$\Phi_2(\rho,\varphi) = (-2E_0 \sin\varphi) \frac{\epsilon+1 - a^2(\epsilon-1)\rho^{-1}}{(\epsilon+1)^2} \approx \frac{-2E_0 \rho \sin\varphi}{\epsilon+1}$$

$$\Phi_3(\rho,\varphi) = -E_0 \sin\varphi + E_0 \frac{b^2}{\rho} \frac{\epsilon-1}{\epsilon+1} \sin\varphi$$

4.9. devam : $\epsilon \to \infty \quad r < a$ sadece $l = 0 \quad \Phi = q/d$ var

$r > a \quad \Phi$'deki $l = 0$ terimleri sıfır olur.

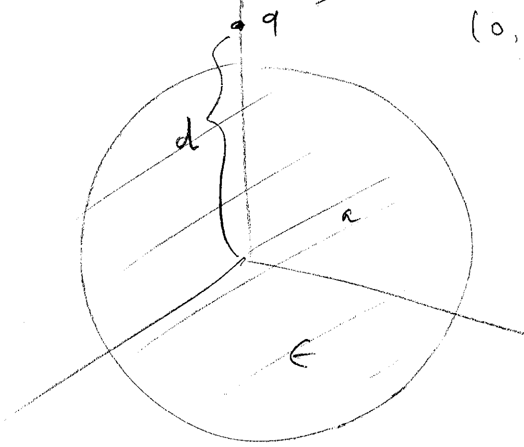
$$\Phi = q \sum_{l=0} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l - q \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a^{2l+1}}{(dr)^{l+1}} P_l$$

$$= q \sum_{l=0} \Big[\qquad \Big] + \frac{q}{d}\left(\frac{a}{r}\right)$$

noktasal yük varlığında yüksüz iletken küresel potansiyeli.

4.9.)

buraya koyalım (0,0,d)



yakınlığında

ε dielektrikli kürenin varlığında

$$\Phi = q\sum \frac{r_<^{l}}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\theta) + \Phi'$$

$$r_<, r_> : \begin{cases} (r & d) \\ (d & r) \end{cases}$$

$r<a \quad \Phi' = \sum_l A_l \frac{r^l}{d^{l+1}} P_l(\cos\theta)$

$r>a \quad \Phi' = \sum_l B_l \frac{a^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)$

→ sonlu ($r \to 0, \infty$ da)

normal D ve teğetsel E $r=a$ da uygunsa. burada $d>a$, $r=r$

normal D: $\epsilon l A_l + (l+1) B_l = l q (\epsilon - 1) \left(\frac{a}{d}\right)^{l+1}$

teğetsel E $\quad A_l \left(\frac{a^l}{a^{l+1}}\right) + q\frac{a^l}{d^{l+1}} = B_l \left(\frac{a^l}{a^{l+1}}\right) + q\frac{a^l}{d^{l+1}}$

$$\therefore \quad A_l = B_l = \frac{l(\epsilon-1)}{(\epsilon+1)(l+1)} \left(\frac{a}{d}\right)^{l+1} q$$

(a) $r<a \qquad \Phi = \frac{q}{d}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{(\epsilon+1)l+1} \left(\frac{r}{d}\right)^l P_l$

$r>a \qquad = q\sum_l \left[\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} - \frac{l(\epsilon-1)}{(\epsilon+1)l+1} \frac{a^{2l+1}}{(dr)^{l+1}} \right] P_l$

(b) orijin civarında $E_{x,y,z}$

$$\Phi \simeq \frac{q}{d}\left[1 + \frac{3}{\epsilon+2}\frac{r}{d}\cos\theta + \frac{5}{2\epsilon+3}\frac{r^2}{d^2}P_2 + \dots\right]$$

$$\simeq \frac{q}{d}\left[1 + \frac{3}{\epsilon+2}\frac{z}{d} + \frac{5}{2\epsilon+3}\frac{1}{d^2}\left(z^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right) + \dots\right.$$

→ devamı arkada