

BÖLÜM 11

ÖZEL GÖRELİLİK

A. Einstein (1905)

- { KM' in Newton yasaları
- { EMT. in Maxwell denl.
- { QM. in Schrödinger denl.

11.1. 1900 den önceki durum

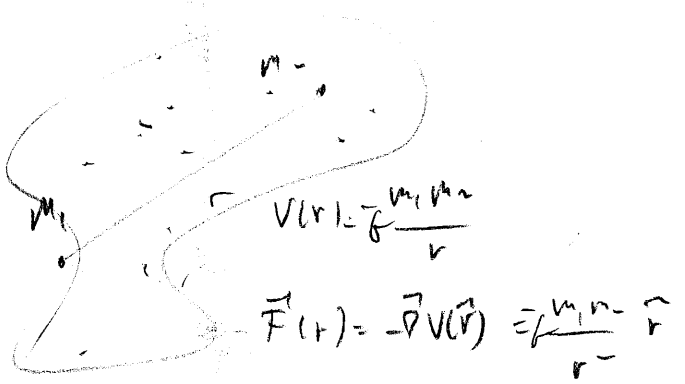
- 1.) Eter varlığı
- 2.) Fizik Galile dönüş. altında invariant

$$\left. \begin{aligned} \vec{x}' &= \vec{x} - \vec{v}t \\ t' &= t \end{aligned} \right\}$$

● merkezi pot. ler aracılığıyla etkileşen bir parçacıkla
ant. i ele dâhil

$$m_i \frac{d\vec{v}_i'}{dt'} = +\vec{F}_i' = -\vec{\nabla}_i' \sum_j V_{ij}(\vec{x}_i' - \vec{x}_j')$$

K / de



$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_i' &= \vec{v}_i - \vec{v} \\ \vec{\nabla}_i' &= \vec{\nabla}_i \\ \vec{x}_i' - \vec{x}_j' &= \vec{x}_i - \vec{x}_j \end{aligned} \right\} \quad \frac{d\vec{v}_i'}{dt'} = \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

$$K = m_i \frac{d\vec{v}_i'}{dt'} = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\vec{\nabla}_i \sum_j V_{ij} (\vec{x}_i - \vec{x}_j)$$

Formunu kullanabiliriz.

Dalga fenomeni

DD.:

$$\left(\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) \psi(\vec{x}', t') = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x_i'} = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_i'} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x_i'} \\ \frac{\partial \psi}{\partial t'} = \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t'} \end{cases}$$

$$x_i = x_i' + vt$$

$$DD': \left[\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \right] \psi = 0$$

Formunu kullanabiliriz.

invariant değil, üstelik hiçbir koordinatla da. bir eşi kalmıyor.
Schwinger Eq. invariant.)

Einstein bu konuda köklü bir değişim yapıldığında şu daire-
likler önüne düşüyor.

- 1) Maxwell Denk: yanlış! EMT'ni doğru ve uygun düşün. bir Galile dönüşümü altında invariant olarak bulunmuyor. (ether'in doğru olduğu)
- 2) Galile Denk. sadece belirli maddeler için uygulanabilir. EMT'ni belirli bir ref. sist.ine seçip almak.
- 3) Hem EM ve hem de EMT'ni bir rel. prensip almak.

Einstein'in relativite teorisi iki postülaya dayanır.

- 1) Verilen bir Ref. sisteminde yapılan deneylerin sonuçları ve doğanın yasaları öteleme hareketi ile bağımsızdır (o ref. sist. ile hızından bağımsız) **RELATİVİTE POSTÜLASI**
- 2) Işığın hızının sabitliği. **POSTÜLASI**

11.2. Deneyler

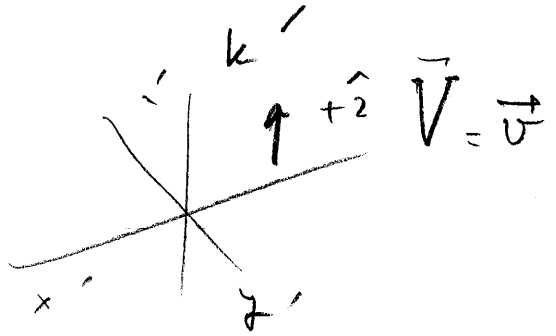
- a) Ether sürüklenme deneyleri (Ether yok!)
 - b) Işığın hızı c
- $\neq$ rel. tüm etkilere göre aynı gezer (büyük skala için pratik olarak aynıdır?)

11.3. Lorentz Dön. i ve Özel Göreliliğin temel kinematik sonuçları

a) Aynı Lorentz koord. Dön. i

K
 (t, x, y, z)

K'
 (t', x', y', z')



$t = t'$ de ($= 0$ da) çalışıyor olabilir

K da durgun bir ışık kaynağı olduğunu. 2. portülara göre her iki gözlemcide dünyaya durgun oldukları aynı küresel kabuğu görecektir. (C hızı ile)

Dalga cephesi K da t anında (x, y, z) noktasına ulaşır

$$ct = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

$$c^2 t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0$$

$$c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = \underbrace{\lambda(v)}_{\text{skalar faktör}} [c^2 t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2)]$$

$$x_0' = \gamma (x_0 - \beta x_1)$$

$$x_0 = ct$$

$$\vec{\beta} = \vec{v}/c$$

$$x_1' = \gamma (x_1 - \beta x_0)$$

$$x_1 = z$$

$$|\vec{\beta}| = \beta$$

$$x_2' = x_2$$

$$x_2 = x$$

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$$

$$x_3' = x_3$$

$$x_3 = y$$

Ters Dönüşüm

$$x_0 = \gamma (x_0' + \beta x_1')$$

$$x_1 = \gamma (x_1' + \beta x_0')$$

$$x_2 = x_2'$$

$$x_3 = x_3'$$

K' ve K 'nin eksenleri paralel, ama K' 'nin K 'ya göre hızı herfi bir doğrultuda seçilirse,

$$x_0' = \gamma (x_0 - \vec{\beta} \cdot \vec{x})$$

$$\vec{x}' = \vec{x} + \frac{\gamma-1}{\beta^2} (\vec{\beta} \cdot \vec{x}) \vec{\beta} - \gamma \vec{\beta} x_0$$

● Alternatif parametrisasyon

$$0 \leq \beta \leq 1 \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \quad 1 \leq \gamma \leq \infty$$

boost parametresi
rapidity

reel bir ξ için ruh $\beta = \tanh \xi \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \xi}} = \cosh \xi$

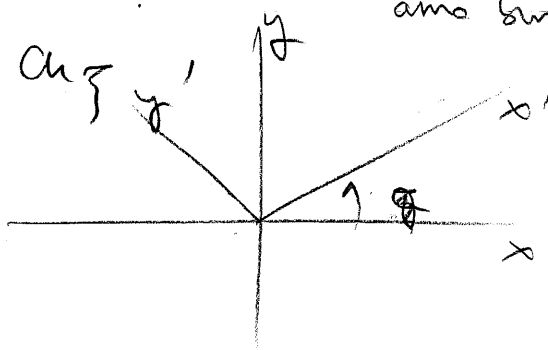
$$\gamma \beta = \sinh \xi$$

● zaman

$$x_0' = x_0 \cosh \xi - x_1 \sinh \xi$$

$$x_1' = -x_0 \sinh \xi + x_1 \cosh \xi$$

$\mathbb{R}^3$ delin dönmeye benzer
ama burada $\cos \rightarrow \cosh$.



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & +\sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \xi & -\sinh \xi \\ -\sinh \xi & \cosh \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

(b) 4'lü vektör

$\mathbb{R}^3$ deki vektörler $\vec{x}, \vec{p}, \vec{v}, \dots$ rank 1 olan tensörler
 $\mathbb{R}$ " skalarlar $f(\vec{x})$ " 0 " "

* Uzay-zamanda 4'lü vektörler $(x_0, \vec{x})$

konum (yada koordinat) 4'lü vektörü (x_0, x_1, x_2, x_3)

• keyfi bir " " $(A_0, \vec{A})$

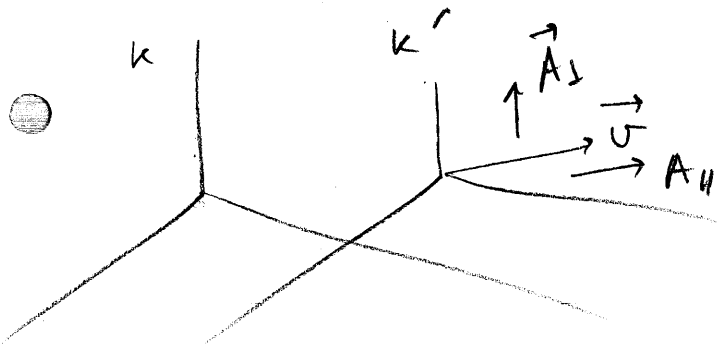
$$\left. \begin{array}{l} x_0' \\ x_i' \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} A_0' = \gamma (A_0 - \vec{\beta} \cdot \vec{A}) \\ A_{\parallel} = \gamma (A_{\parallel} - \beta A_0) \end{array}$$

$$A_{\perp}' = A_{\perp}$$

$$x_0'^2 - |\vec{x}'|^2 = c^2 \gamma^2 (x_0^2 - (\vec{x}_1^2 + \vec{x}_2^2 + \vec{x}_3^2))$$

invariant

$$= c^2 \gamma^2 (x_0^2 - (x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2))$$



$$A_0^2 - |\vec{A}|^2 = A_0'^2 - |\vec{A}'|^2 \text{ almalı}$$

$$[\gamma(A_0 - \vec{\beta} \cdot \vec{A})]^2 - [\quad]^2 = A_0^2 - |\vec{A}|^2$$

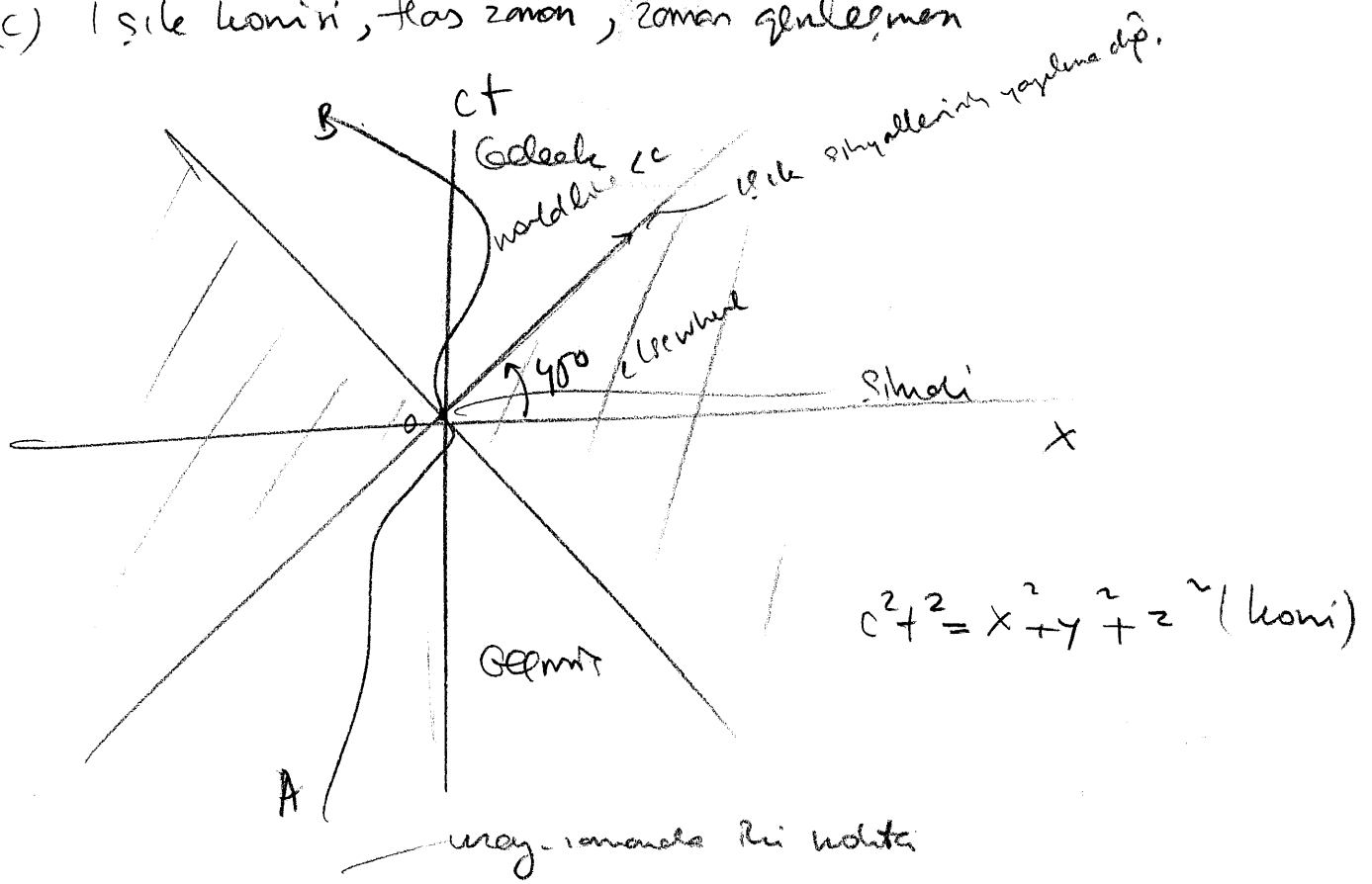
LT altında invariant skalar seçimin de tahminlayabiliriz

$$A = (A_0, \vec{A})$$

$$B = (B_0, \vec{B})$$

$$A \cdot B = A_0 B_0 - \vec{A} \cdot \vec{B} = A_0 B_0 - (\vec{A}' \cdot \vec{B}') = A'_0 B'_0$$

(c) 1 şile konisi, klas zaman, zaman genleşmesi



$$\left. \begin{array}{l} P_1 : (ct_1, \vec{x}_1) \\ P_2 : (ct_2, \vec{x}_2) \end{array} \right\} \text{invariant} \leftarrow P_1, P_2 \text{ arasındaki ayırım}$$

$$S_{12}^2 = c^2 (t_1 - t_2)^2 - |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2$$

Üç olasılık var. 1) $S_{12}^2 > 0$ 2) $S_{12}^2 < 0$ 3) $S_{12}^2 = 0$

1) $S_{12}^2 > 0$ zaman tipi (time like) $\rightarrow$ zamanal.

$$\vec{x}'_{(1)} = \vec{x}'_{(2)}$$

Olacak şekilde her zaman bir LT $\tilde{t}$ bulunur. Zaman $S_{12}^2 = c^2 (t_1 - t_2)^2 > 0$

$$\left. \begin{array}{l} P_1: x'_{(1)} = \gamma (x_{(1)} - \beta c t_{(1)}) \\ P_2: x'_{(2)} = \gamma (x_{(2)} - \beta c t_{(2)}) \end{array} \right\} x'_{(1)} - x'_{(2)} = \gamma [(x_{(1)} - x_{(2)}) - \beta c (t_{(1)} - t_{(2)})]$$

$$\beta = \frac{x_{(1)} - x_{(2)}}{c (t_{(1)} - t_{(2)})} \Rightarrow x'_{(1)} = x'_{(2)}$$

yani, aynı noktada iki olay. Bu durumda

$$S_{12}^2 = S_{12}'^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 > 0$$

b) $S_{12}^2 < 0$ space-like. Bu durumda,

$$t_{(1)}' = t_{(2)}''$$

olacak şekilde (e: zamanlı iki olay) bir Lorentz çerçevesi (k'')

bulmak mümkün.

$$S_{12}^2 = - (X_{(1)}'' - X_{(2)}'')^2 < 0$$

c) $S_{12}^2 = 0$ lightlike aynı.
lightlike aynı.

Sonuç: İki olayın aynı Lorentz invariant.

Asıl zaman:

K da $\vec{u}(t)$ aynı hızla bir parçacık aldım. dt zaman aralığında, konumu $d\vec{x}$ kadar değişir.

$$d\vec{x} = \vec{u} dt$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - |d\vec{x}|^2 = c^2 dt^2 - |\vec{u}|^2 dt^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{|\vec{u}|^2}{c^2}\right) \\ &= c^2 dt^2 (1 - \beta^2) \end{aligned}$$

(K') koordinat çerçevesinde (parçacık anlık olarak duruyor)

$$d\vec{x}' = \vec{0} dt$$

$dt' = d\tau$ (Hass zaman) $\leftarrow$ parçacıkla hareket ediyor

$$ds'^2 = c^2 dt'^2 - |d\vec{x}'|^2 = c^2 d\tau^2 = ds^2 \\ = c^2 (1 - \beta^2) dt^2$$

$$d\tau = \sqrt{1 - \beta^2} dt = \frac{1}{\gamma} dt \quad \boxed{dt = \gamma d\tau}$$

zaman genişlemesi

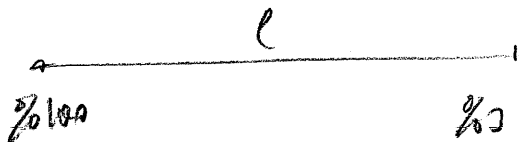
$$t_2 - t_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \beta^2(\tau)}} = \int \gamma(\tau) d\tau \quad \leftarrow \text{'da genişleten den}$$

genel de svt.

* yüksek hızda $\tau_0 = 2.56 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ $\leftarrow$ K'
FMA da 200 GeV

$v \approx c$ $l = 30 \mu\text{m}$ sadece %3 kayıp

* Saatin duruyor olduğu çerçevede eşit zaman aralıkları
için γ da genişleyen zaman aralığı $\gamma > 1$ sorunun keder büyüklüğü



Galilei yaklaşımı da $l = c\tau_0 \approx 6 \cdot 10^7 \text{ cm} = 7 \text{ m}$. $\leftarrow$ zaman genişlemesi
(sadece $e^{-200/7} \approx 10^{-17}$ fark var.)
 $t = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1400 \tau$ $l = ct = 1400 c\tau = 10^6 \text{ cm} = 10^7 \text{ m}$
10 km.

d) Relativistik Dopler Kayması

10

Bir dalga'nın fazı invariant bir nicelik, çünkü bir dalga trenindeki dalga tepelerinin saf sayımı ile belirlenir, (ki bu da tüm eylemsiz sistem çerçevelerinde aynı olman gereken bir operasyon).

$$\vec{U}_{//} \begin{cases} \underline{k} : \omega, \vec{k} \\ \underline{k}' : \omega', \vec{k}' \end{cases} \quad \phi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} = \omega' t' - \vec{k}' \cdot \vec{x}'$$

$$\omega = ck_0 \quad \omega' = ck_0'$$

$$ck_0 t - \vec{k} \cdot \vec{x} = ck_0' t' - \vec{k}' \cdot \vec{x}'$$

$$= ck_0' \gamma (t - \beta \cdot \vec{x}) - (\vec{k}'_{//} + \vec{k}'_{\perp}) \cdot (\vec{x}'_{//} + \vec{x}'_{\perp})$$

$$= ck_0' \gamma (t - \beta x_{//}) - \vec{k}'_{//} \cdot \vec{x}'_{//} - \vec{k}'_{\perp} \cdot \vec{x}'_{\perp}$$

$$= ck_0' \gamma (t - \beta x_{//}) - \vec{k}'_{//} \cdot (\dots)$$

t ve $\vec{x}'$ in katsayılarını eşitle

$$k_0' = \gamma (k_0 - \beta \cdot \vec{k})$$

$$k_{\perp}' = k_{\perp}$$

$$k_{//}' = \gamma (k_{//} - \beta k_0)$$

$$\begin{cases} x'_{//} = \gamma (x_{//} - \beta x_0) \\ x'_{\perp} = x_{\perp} \\ x_0' = \gamma (x_0 - \beta \cdot \vec{x}) \end{cases}$$

$(k_0, \vec{k})$ 4 lü vektör oluyorum.

brade kullon

ışık dalgaları için $|\vec{k}| = \frac{\omega}{c} = k_0$

$$|\vec{k}'| = \frac{\omega'}{c} = k_0'$$

$$k_0' = \gamma (k_0 - \beta k_0 \cos \theta)$$

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma k_0 (1 - \beta \cos \theta) = \gamma \frac{\omega}{c} (1 - \beta \cos \theta)$$

$$\omega' = \gamma \omega (1 - \beta \cos \theta)$$

$$\theta = 0 \Rightarrow \omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1-\beta^2}} (1-\beta) = \omega \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad \text{boyuna Dopler kayman}$$

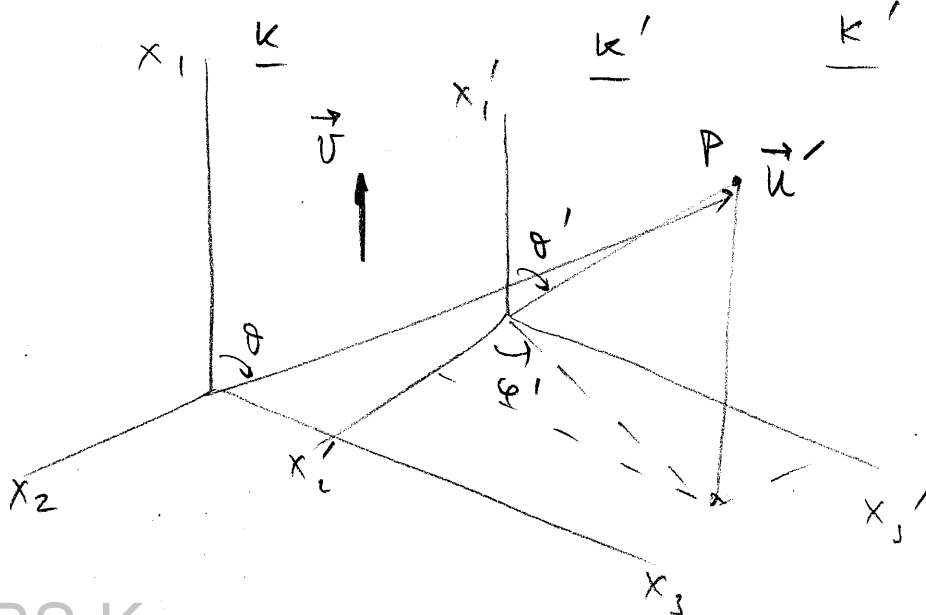
$$\theta = \pi/2 \Rightarrow \omega' = \gamma \omega \quad \text{enine Dopler kayman}$$

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma (\cos \theta - \beta)}$$

θ ve θ' $\vec{v}$ 'nin doğrultusuna relatif $\vec{k}$ ve $\vec{k}'$ 'nin açılar.

$$k_0 = \gamma (k_0' + \beta \vec{k}' \cdot \vec{k})$$

11.4. Hızların Toplanması



$\underline{K'}$ $\underline{K}$ 'ye göre $\vec{v}$ hızı ile hareket ediyor.

$\underline{K'}$ 'de hızı $\vec{u}'$ olan P noktasının küresel koordinatlarında (u', θ', φ') .

Lorentz dönüşümlerinden,

$$dx_0 = \gamma_v (dx_0' + \beta dx_1')$$

$$dx_1 = \gamma_v (dx_1' + \beta dx_0')$$

$$dx_2 = dx_2'$$

$$dx_3 = dx_3'$$

$$\begin{cases} \gamma_v = (1 - \beta^2)^{-1/2} \\ x_0 = ct \quad x_0' = ct' \end{cases}$$

● K'

$$u_i' = c \frac{dx_i'}{dx_0'}$$

K

$$u_i = c \frac{dx_i}{dx_0}$$

$$c \frac{dx_1}{dx_0} = u_1 = c \frac{\cancel{\gamma_v} (dx_1' + \beta dx_0')}{\cancel{\gamma_v} (dx_0' + \beta dx_1')} = c \frac{\frac{dx_1'}{dx_0'} + \beta}{1 + \beta \frac{dx_1'}{dx_0'}}$$

$$= \frac{c \frac{dx_1'}{dx_0'} + v}{1 + \frac{v}{c} \frac{dx_1'}{dx_0'}} = \frac{u_1' + v}{1 + \frac{vu_1'}{c^2}}$$

$$u_2 = c \frac{dx_2}{dx_0} = c \frac{dx_2'}{\gamma_v (dx_0' + \beta dx_1')} = c \frac{dx_2'/dx_0'}{\gamma_v (1 + \beta \frac{dx_1'}{dx_0'})} = \cancel{c} \frac{\frac{1}{c} u_2'}{\gamma_v (1 + \frac{vu_1'}{c^2})}$$

$$u_3 = \frac{u_3'}{\gamma_v (1 + \frac{vu_1'}{c^2})} \Rightarrow \begin{cases} u_{||} = \frac{u_{||}' + v}{1 + \frac{v \cdot u_{||}'}{c^2}} \\ \vec{u}_{\perp} = \frac{\vec{u}_{\perp}'}{\gamma_v (1 + \frac{v \cdot \vec{u}_{||}'}{c^2})} \end{cases}$$

$$\frac{u_z}{u_z'} = \frac{u_3}{u_2} \text{ - olduğundan her iki çerçevede de azimutal açıları eşit}$$

$$\frac{u_3'}{u_z'} = \frac{u_3}{u_2} = \tan \varphi' = \tan \varphi \Rightarrow \varphi = \varphi'$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}' &= (u', \theta', \varphi') \\ \vec{u} &= (u, \theta, \varphi) \end{aligned} \right\} \tan \theta = \frac{\sqrt{u_2^2 + u_3^2}}{u_1} = \frac{u' \sin \theta'}{\gamma_v (u' \cos \theta' + v)}$$

$$\text{ve } u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \frac{\sqrt{u'^2 + v^2 + 2u'v \cos \theta' - (u'v \sin \theta'/c)^2}}{1 + \frac{u'v}{c^2} \cos \theta'}$$

$$u' = c \Rightarrow u = \frac{\sqrt{c^2 + v^2 + 2vc \cos \theta' - v^2 \sin^2 \theta'}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta'} = c$$

Hızların dönüşümleri LD altında φ 'li vektör gibi değil. Hız bir Lorentz vektörü değil. O zaman, bir φ 'li hız vektörü kuralıyız.

$$\begin{aligned} \gamma_u &= \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} \stackrel{?}{=} \gamma_v \gamma_{u'} \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2}\right) \\ &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{vu' \cos \theta}{c^2}\right) \\ &= \frac{[u'^2 + v^2 + 2u'v \cos \theta - (\frac{u'v \sin \theta}{c})^2]^{1/2}}{u} \end{aligned}$$

$$\left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2} \right) = \frac{\gamma_u}{\gamma_v \gamma_{u'}}$$

$$u_{||} = \frac{u_{||}' + v}{1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2}} = \frac{\gamma_v \gamma_{u'}}{\gamma_u} (u_{||}' + v)$$

$$\gamma_u u_{||} = \gamma_v (\gamma_{u'} u_{||}' + v)$$

$$u_{\perp} = \frac{u_{\perp}'}{\gamma_v \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2} \right)} = \frac{\gamma_{u'}}{\gamma_u} u_{\perp}'$$

$$\Rightarrow \gamma_u u_{\perp} = \gamma_{u'} u_{\perp}'$$

Örnek: $(\gamma_u c, \gamma_u \vec{u})$ $(x_0, \vec{x})$ gibi dönüşür.

$$\begin{cases} x_0 = \gamma (x_0' + \beta \cdot \vec{x}') \\ x_{||} = \gamma (x_{||}' + \beta x_0') \\ x_{\perp} = x_{\perp}' \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A_0 = \gamma (A_0' + \beta \cdot \vec{A}') \\ A_{||} = \gamma (A_{||}' + \beta A_0') \\ A_{\perp} = A_{\perp}' \end{cases}$$

$$\gamma_u c = \gamma_v (\gamma_{u'} c + \vec{\beta} \cdot \gamma_{u'} \vec{u}')$$

$$= \gamma_v (\gamma_{u'} c + \gamma_{u'} \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c})$$

$$\gamma_u c = \gamma_v \gamma_{u'} c \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2} \right)$$

$$\gamma_u = \gamma_v \gamma_{u'} \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2} \right) \quad \checkmark$$

$$\gamma_u \vec{u}_\perp = \gamma_{u'} \vec{u}_\perp$$

$$\gamma_u u_\parallel = \gamma_v (\gamma_{u'} u'_\parallel + \beta \gamma_{u'} c)$$

$$= \gamma_v \gamma_{u'} (u'_\parallel + v)$$

$$\left(\gamma_u c, \gamma_u \vec{u} \right) \quad \gamma' \text{ lü hız olarak adlandırılır } (u_0, \vec{u})$$

γ' lü hız vektörünü elde etmek için alternatif bir yaklaşım da

τ has zamanının LD altında invariyantlığını kullanmaktır:

$$u_0 = \frac{dx_0}{d\tau} = \frac{dx_0}{dt} \frac{dt}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} = c \gamma_u$$

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma_u \vec{u}$$

11.5. Bir paracığın relativistik enerji ve momentumu

c 'yi kıyasla düşük hızlar için (Non-rel.-NR)

$$\vec{p} = m \vec{v} \quad E = E(0) + \frac{1}{2} m v^2$$

paracığın durgun enerjisi

olduğunu biliyoruz.

- NR durum için $F(0)$ enerji balans denklemlerinin her iki yanında da aynı şekilde hesaba katıldığından dolayı önem-
sizdir. Şimdi, biz dönüşüm yasaları ile uyumlu NR durumunda
küçük hızlara indirgenen bir genelleme kurmak istiyoruz.

Bu relativite'le test partiklen ile uyumlu,

$$\vec{p} = M(u) \vec{u} \quad u = |\vec{u}|$$

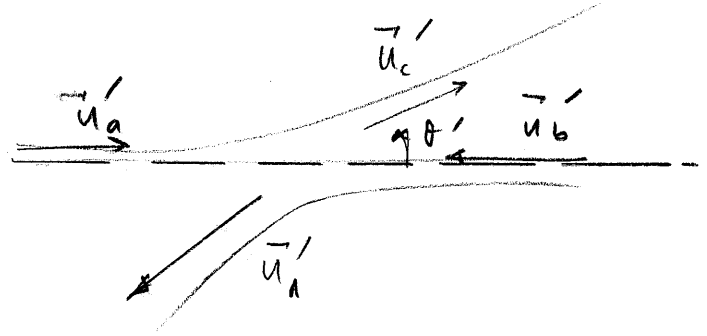
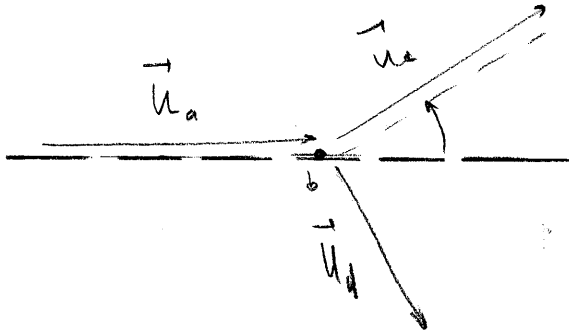
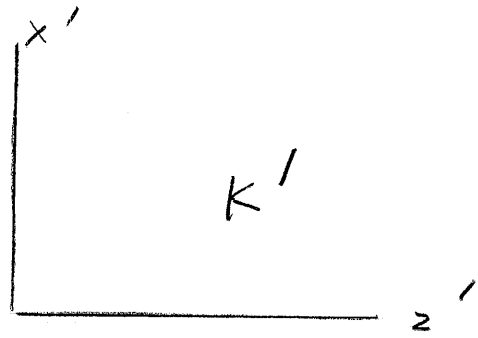
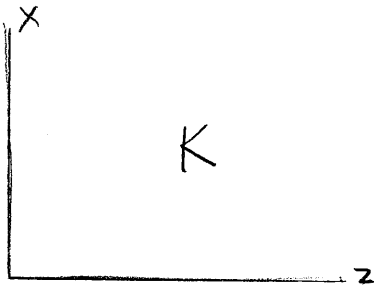
$$E = \mathcal{E}(u)$$

seçimlik olduğunu söyler.

$$M(0) = M \quad \left. \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u^2} \right|_0 = \frac{1}{2} m$$

Şimdi $M(u)$, $\mathcal{E}(u) = ?$

Bunların formunu belirlemek için iki ödeş paracığın
elastik çarpışmasını inceler ve eşdeğer eylemleri
çerçevelerde momentum ve enerjinin korunumunu isteriz.



KM

$$\vec{u}_a' = \vec{v} \quad \vec{u}_b' = -\vec{v}$$

$$\vec{u}_c' = \vec{v}' \quad \vec{u}_d' = \vec{v}''$$

Mom kor.

$$\vec{p}_a' + \vec{p}_b' = \vec{p}_c' + \vec{p}_d'$$

$$M(v)\vec{v} - M(v)\vec{v} = M(v')\vec{v}' + M(v'')\vec{v}''$$

Σn kor

$$F_a' + F_b' = F_c' + F_d'$$

$$\Sigma(v) + \Sigma(v) = \Sigma(v') + \Sigma(v'')$$

parçacıkların ötek. $\Sigma(v') = \Sigma(v'') \Rightarrow v' = v''$

en. kor. $\rightarrow v' = v'' = v$

mom. kor. $\rightarrow \vec{v}'' = -\vec{v}'$

Şimdi aynı çarpışmayı K eylemiz gözlem çerçevesinde inceleyelim. ($-\vec{v}$ ile $+\hat{z}$ doğrultusunda hareket ediyor.) K de
 (b) durgun, ama (a) $+\hat{z}$ doğrultusunda hızla sahip.

$$\vec{u}_a = \frac{2\vec{v}}{1+v^2/c^2} = 2c\beta / (1+\beta^2)$$

Simlara de salibiz,

$$(\vec{u}_c)_x = \frac{c\beta \sin\theta'}{\gamma(1+\beta^2 \cos\theta')}$$

$$(\vec{u}_c)_z = \frac{c\beta(1+\cos\theta')}{1+\beta^2 \cos\theta'}$$

$$(\vec{u}_d)_x = -\frac{c\beta \sin\theta'}{\gamma(1-\beta^2 \cos\theta')}$$

$$(\vec{u}_d)_z = \frac{c\beta(1-\cos\theta')}{1-\beta^2 \cos\theta'}$$

Eyleminiz qrecvede, (K)

$$M(u_a)\vec{u}_a + M(u_b)\vec{u}_b = M(u_c)\vec{u}_c + M(u_d)\vec{u}_d$$

$$\Sigma(u_a) + \Sigma(u_b) = \Sigma(u_c) + \Sigma(u_d)$$

b) durğun, tüm digər üç lüz fərqli. lüzöl θ' için, $\vec{u}_d$ NR olur.

$$\vec{u}_c \approx \vec{u}_a \text{ (oh az fərhləder. (lüzöl } \theta' \text{ için))}$$

Mom. kor. x-siləveni:

$$M(u_a)(\vec{u}_a)_x = M(u_c) \frac{c\beta \sin\theta'}{\gamma(1+\beta^2 \cos\theta')} - M(u_d) \frac{c\beta \sin\theta'}{\gamma(1-\beta^2 \cos\theta')}$$

$$M(u_c) = \frac{1+\beta^2 \cos\theta'}{1-\beta^2 \cos\theta'} M(u_d) \quad (\text{lüzöl } \theta')$$

$$\theta' = 0 \Rightarrow \vec{u}_c = \vec{u}_a \quad \vec{u}_d = 0$$

$$\text{Digər bir deyile, } \vec{u}_a = \frac{2\vec{v}}{1+\beta^2} = \frac{2c\beta}{1+\beta^2} = \frac{1+\beta^2}{(1-\beta^2)^2} = \gamma_a^{-2}$$

$$\vec{u}_a^2 = \frac{4c^2\beta^2}{(1+\beta^2)^2} \Rightarrow \frac{u_a^2}{c^2} = \frac{4\beta^2}{(1+\beta^2)^2} = 1 - \frac{u_a^2}{c^2} = 1 - \frac{4\beta^2}{(1+\beta^2)^2} = \gamma_a^{-2}$$

$$= \frac{(1-\beta^2)^{-1/2}}{(1+\beta^2)^{-1/2}} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

$$M(0) = m \text{ ile}$$

$$M(u_a) = \gamma_a m$$

$$\vec{p} = M(u_a) \vec{u}_a = \frac{m \vec{u}_a}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Simdi de $\mathcal{E}(v)$ ni hesap edelim?

$$\begin{aligned} u_c^2 &= (u_c)_x^2 + (u_c)_z^2 = \frac{c^2 \beta^2 \sin^2 \theta'}{\gamma^2 (1 + \beta \cos \theta')^2} + \frac{c^2 \beta^2 (1 + \cos \theta')^2}{(1 + \beta \cos \theta')^2} \\ &= \frac{c^2 \beta^2 \sin^2 \theta' + \gamma^2 \beta^2 c^2 (1 + \cos \theta')^2}{\gamma^2 (1 + \beta \cos \theta')^2} = \frac{4c^2 \beta^2}{(1 + \beta^2)^2} - \frac{c^2 \beta^2 \theta'^2}{\gamma_a^2 (1 - \beta^2)} + \gamma^2 \end{aligned}$$

$$\gamma \approx \frac{c^2 \beta^2 \theta'^2}{1 - \beta^2} \quad (\text{küçük } \theta') \quad = u_a^2 - \frac{\gamma}{\gamma_a^3} + \mathcal{O}(\gamma^2)$$

$$u_d^2 = \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2)$$

$$\mathcal{E}(u_a) + \mathcal{E}(u_c) = \mathcal{E}(u_c) + \mathcal{E}(u_d)$$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{E}(u_d) + \gamma \left(\frac{d\mathcal{E}(u_c)}{du_c} \frac{du_c}{d\gamma} \right)_{\gamma=0} + \dots \quad \text{Taylor serisi} \\ &+ \mathcal{E}(0) + \gamma \left(\frac{d\mathcal{E}(u_d)}{du_d} \frac{du_d}{d\gamma} \right)_{\gamma=0} \end{aligned}$$

γ da 1. merteye.

$$0 = \left(\frac{d\mathcal{E}(u_c)}{du_c} \frac{du_c}{d\gamma} \right)_{\gamma=0} + \left(\frac{d\mathcal{E}(u_d)}{du_d} \frac{du_d}{d\gamma} \right)_{\gamma=0}$$

$$0 = -\frac{1}{\gamma_a^3} \left(\frac{d\xi(u_a)}{du_a} \right) + 1 \cdot \left(\frac{d\xi(u_d)}{du_d} \right)$$

$\xi=0, u_c=u_a$ $\xi=0, u_d=0$

$$\frac{1}{\gamma_a^3} \frac{d\xi(u_a)}{du_a} = \frac{m}{2}$$

$$\gamma_a^3 \frac{m}{2} = \frac{d\xi(u_a)}{du_a} = \frac{m}{2(1-u_a^2/c^2)^{3/2}}$$

$$\xi(u_a) = \frac{mc^2}{(1-u_a^2/c^2)^{1/2}} + \underbrace{(\xi(0) - mc^2)}_{mc^2}$$

$$\xi(u) = \frac{mc^2}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

kin. Energi. $K(u) = E(u) - Mc^2$

4. Wz. $u = (u_0, \vec{u}) = (\gamma_u c, \gamma_u \vec{v})$

$$\vec{p} = \gamma_u m \vec{u} \quad \vec{u} = \frac{\vec{p}}{m \gamma_u} = \frac{c^2 \vec{p}}{E}$$

$$E = \gamma_u mc^2$$

$$m \vec{u}$$

$$m(\gamma_u c, \gamma_u \vec{u}) = (m \gamma_u c, m \gamma_u \vec{u}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = \frac{E'^2}{c^2} - \vec{p}'^2 = m^2 c^2$$

$$E = (\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2}$$

En. Mom. 4'li nehtor

11.6. Özel Göreliliğin Uzak-zamanının Matematiksel Özellikleri

(ÖR)

Özel relativite teorisinde, 4'lü $(x_0, \vec{x})$ koord. larının

Lorentz dönüşümleri (LD)

$$S^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

den bulunur. Özel rel.'nin kinematikini S^2 yi invariant bırakarak grup dönüşümleri olarak yeniden yorumlanabilir. Bu grup homojen Lorentz grubu olarak adlandırılır.

HALG $\equiv$ Sıradan dönmeler + Lorentz dönüşümleri içerir.

$$S^2(\vec{x}, \vec{y}) = (x_0 - y_0)^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 - (x_3 - y_3)^2$$
 'yi

invariant bırakan dönüşümlerin grubuna inhomojen Lorentz grubu ya da Poincaré grubu adı verilir. (zaman, uzay ötelemeleri ve yansımalar içerir.)

ÖR' nin 1. postülanı doğanın yasalarının LD altında kovariant olmaları gerektirir. (yani Lorentz D altında formda invariant)

non-Euclidian uzayda tenör analizi:

$$\mathbb{R}^n: \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

$$\text{Minkowski} \quad \|x\| = \sqrt{x_0^2 - |\vec{x}|^2}$$

$\alpha = 0, 1, 2, 3$ olmak üzere,

$$x'^{\alpha} = x'^{\alpha}(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

şeklinde iyi tanımlı bir dönüşüm olduğunu varsayalım.

* rank 1, 0, olan tensörler: skalerler (dönüşümler altında değişmeyen mükempler)

* rank 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 849, 850, 851, 852, 853, 854, 855, 856, 857, 858, 859, 860, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 886, 887, 888, 889, 890, 891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926, 927, 928, 929, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 936, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 943, 944, 945, 946, 947, 948, 949, 950, 951, 952, 953, 954, 955, 956, 957, 958, 959, 960, 961, 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 969, 970, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 978, 979, 980, 981, 982, 983, 984, 985, 986, 987, 988, 989, 990, 991, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, 999, 1000

→ kontravaryant vekt. ler $A^{\alpha} (A^0, A^1, A^2, A^3)$

$$A'^{\alpha} = \left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \right) A^{\beta} \equiv A'^{\alpha}_{\beta} A^{\beta}$$

kuralına göre dönüşürler.

$$A'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^0} A^0 + \dots + \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^3} A^3$$

→ kovaryant vekt. ler B_{α}

$$B'_{\alpha} = \left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} \right) B_{\beta}$$

ile tanımlanır.

* rank 2, olan kontravaryant tensörler $F^{\alpha\beta}$

$$F'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}} F^{\gamma\delta}$$

$$G'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\beta}} G_{\gamma\delta}$$

kovaryant tensörler rank 2

* Rank 2, karışık tensörler H_{β}^{α}

$$H_{\beta}^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\beta}} H_{\gamma}^{\gamma}$$

İki vektörün skaler (ya da iç) çarpımı

$$\bar{B} \cdot \bar{A} = B_{\alpha} A^{\alpha} = A_{\alpha} B^{\alpha}$$

$$\bar{B}' \cdot \bar{A}' = B'_{\alpha} A'^{\alpha}$$

$$= \left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} B_{\beta} \right) \left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} A^{\gamma} \right) = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\gamma}} B_{\beta} A^{\gamma}$$

$$= \delta_{\gamma}^{\beta} B_{\beta} A^{\gamma} = B_{\gamma} A^{\gamma} = B \cdot A$$

Kontraksiyon:

$$B^{\alpha\beta\gamma} \delta_{\beta} \dots \delta_{\gamma} = A^{\alpha\gamma} \delta_{\gamma}$$

Uzayımızın normunu tanımlayan sönmez küre ile

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx_1)^2 - (dx_2)^2 - (dx_3)^2$$

bu form uzayı tanımlar ya da uzayın metrik yapısını verir.
diferansiyel uzunluk elemanı için genel ifade,

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$$

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} \text{ metrik bileşenleri}$$

ÖR 'nin düz uzay-zamanı için, metrik

$$g_{00} = +1 \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$$

elemanları ile köşegen'dir

$$[g]_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

● $g^{\alpha\beta}$: $g_{\alpha\beta}$ 'nin kontravariant metrik tensor. $g^{\alpha\beta}$ 'nin normalize minör determinantı. olarak tanımlanır.

düz uzay-zaman için $g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$ 'dir.

$$g_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} = g_{\alpha 0} g^{0\beta} + \dots + g_{\alpha 3} g^{3\beta} = 0 \quad \alpha \neq \beta \text{ ise}$$

$$= \delta_{\alpha}^{\beta}$$

$$\beta, \alpha = 0, 1, 2, 3$$

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = dx_{\alpha} dx^{\beta} = dx_{\beta} dx^{\alpha}$$

$$= g^{\alpha\beta} (dx)_{\alpha} (dx)_{\beta}$$

kontravariant

$$g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} = dx_{\beta}$$

$$g_{\alpha\beta} x^{\alpha} = x_{\beta}$$

bu ve

$$g^{\alpha\beta} dx_{\beta} = dx^{\alpha}$$

deri

$$x^{\alpha} = g^{\alpha\beta} x_{\beta}$$

Daha genel durum,

$$F \dots \alpha \dots = g^{\alpha\beta} F \dots \beta \dots \quad G \dots \alpha \dots = g_{\alpha\beta} G \dots \beta \dots$$

kontravariant →

Şayet

$$A^\alpha \equiv (A^0, A^1, A^2, A^3) \equiv (A_0, \vec{A})$$

$$A_\alpha \equiv (A_0, -A^1, -A^2, -A^3) \equiv (A_0, -\vec{A}) \text{ kovaryant partneri}$$

A ve B gibi iki dörtli vektörün skaler çarpımı,

$$A^\alpha \equiv (A^0, \vec{A}) , B^\alpha \equiv (B^0, \vec{B})$$

$$A \cdot B = A_\alpha B^\alpha$$

$$= A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B} = A^0 B^0 + A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3$$

Şimdi x^α ve x_β 'ye göre kısmi türev alalım.

$$\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \quad \text{İmn } B'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} B_\beta \text{ ile}$$

kaydırılarak

Bu şunu gösterir: koordinat vektörlerinin kontravariant bileşenleri ^{ne göre diferansiyel} bir 4'lü vektör bir kovaryant bileşenlik bileşeni gibi dönüşür.

Notasyon:

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = (\partial_0, \partial_i) \quad i=1,2,3$$

$$= (\partial_0, \vec{\nabla})$$

Benzer olarak,

$$\partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = (\partial^0, -\vec{\nabla})$$

bir 4'lü vektörün 4-divergansı invarianttır.

$$\partial^\alpha A_\alpha = \partial_\alpha A^\alpha \equiv \frac{\partial A^\alpha}{\partial x_\alpha} \equiv \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\alpha}$$

$$= \frac{\partial A^0}{\partial x_0} + \frac{\partial A^i}{\partial x_i} + \dots = \partial_0 A^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

11.7. Lorentz Dönüşümlerinin Matris Temsilleri

4 vektör : $X = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$

2 dōrtlü vektörün matris skaler çarpımı

$(a, b) = \begin{pmatrix} a^0 & a^1 & a^2 & a^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^0 \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}$ ^{transpon.}

$$= (a^0 \ a^1 \ a^2 \ a^3) \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$$

Not.

$$g = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & 0 \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \quad g^2 = I \quad (4 \times 4)$$

$$gX = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & 0 \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix}$$

• Bu dördli vektörün skaler çarpım

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a, gb) = (ga, b) = a^T gb \\ &= a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 \end{aligned}$$

LD altında invariant

$$\begin{array}{ccc} \underline{\underline{K}} & \xrightarrow{A} & \underline{\underline{K'}} \\ x & & x' \end{array}$$

$x' = Ax \longrightarrow$ koordinatlar üzerine mükemmel lineer dön. lerin grusunu arıyoruz.

LD altında norm invariant

$$(x', gx') = (x, gx)$$

$$(Ax)^T g Ax = x^T A^T g Ax = x^T g x$$

bunu sağlanmalı.

$$\begin{aligned} &= g \quad \det(A^T g A) = \det g \quad (\det A)^2 = 1 \\ &\quad \det A^T \det g \det A = \det g \quad \det A = \pm 1 \end{aligned}$$

LD'nin iki sınıfı $\rightarrow$ has LD $\det A = +1$ (olmadı)
birim(I)'le sürekli ilişkili

$\rightarrow$ has olmayan LD $\det A = -1$

(gerekli değil fakat yeterli)

örn $A = g$ ^{may inversion} $\det A = -1$

$A = -I$ $\det A = +1$

ama has değil

veya ne zaman dönüşür.

● $[A]_{4 \times 4} = 16$ parametre. A ve g 4×4 'lük matrisler.

Transpozisyon altındaki simetriden dolayı tamamı bağımsız değil.

$ds^2 = ds'^2$
 $A^T g A = g$) 10 bağımsız bağıntı.

$\Downarrow$
 $16 - (1 + 7 + 3) = 10$ lineer
bağıntı dedikler.

$(\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}) (\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}) (\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}) = g$ 4×4 sym. $\Rightarrow$ 10 bağıntı

Öyle $\Rightarrow$ ^{bu 10 anlama gelir} LD 6 bağımsız parametre ile karakterize edilir.
(Lorentz grubu 6 parametrelidir.)

6 $\rightarrow$ 3 hareketin doğrultusunun sht. lemeleliği (α, β, γ)
(koordinat eksenlerindeki relatif yönelimlerini belirlemek için)

$\rightarrow$ 3 (v_1, v_2, v_3) ($\vec{\beta}$ 'nin bileşenlerini belirlemek için)

Aşağıdaki Ansatz'ı yapalım. $A = e^L$ $L: 4 \times 4$ matris

$$\det A = \det e^L = e^{\text{tr} L}$$

L reel ve izsiz $\Rightarrow$ oranın $\det A = e^0 = 1$

has LD için

$\det A = -1$ dışlanacak

* $\tilde{A} g A = g^{idi} = g \tilde{A} g A = g^2 = I \Rightarrow \boxed{g \tilde{A} g = A^{-1}}$ 28

* $A = e^L, \tilde{A} = e^{\tilde{L}} \quad A^{-1} = e^{-L} \quad A A^{-1} = e^L e^{-L} = I$

$\Rightarrow g \tilde{A} g = e^{-L} \stackrel{?}{=} e^{g \tilde{L} g}$
 LHS RHS

$e^{g \tilde{L} g} = g \left[I + \tilde{L} + \frac{1}{2} \tilde{L}^2 + \dots \right] g$

$= I + g \tilde{L} g + \frac{1}{2!} g \tilde{L}^2 g + \dots = \underline{\underline{LHS}}$

RHS $= e^{g \tilde{L} g} = I + g \tilde{L} g + \frac{1}{2!} (g \tilde{L} g)^2 + \dots$

$= I + g \tilde{L} g + \frac{1}{2!} g \tilde{L} \overset{I}{g g \tilde{L} g} + \dots$

$= I + g \tilde{L} g + \frac{1}{2!} g \tilde{L}^2 g + \dots$

• $\Rightarrow RHS = LHS \quad \therefore g e^{\tilde{L}} g = e^{g \tilde{L} g}$

$g \tilde{L} g = -L$

$g g \tilde{L} g = -gL \quad \text{ya da} \quad \boxed{\tilde{L} g = -g L}$

$\Rightarrow \tilde{L} g = -gL$
 simetrik

$\neq (gL) = -gL$ antisimetrik olmasi
 ↑ antisimetrik metrik.

$x' = Ax$ linear dön. denk. grubu üzeri idk

$A, (x, gx)$ i invariant broken
 4×4 li L matrisi di

$\tilde{x}' g x' = \tilde{x} g \tilde{x}$

$\tilde{x} A g A x = \tilde{x} g x$

$\tilde{A} g A = g$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{01} & 0 & L_{12} & L_{13} \\ L_{02} & -L_{12} & 0 & L_{23} \\ L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

boosts

dönmeler.

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

S_i : 3-boyutlu
dönmeleri

K_i : boosts.

$$S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

karşılıklı de ver!
tamamı karşılıklı

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & \\ 1 & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & \\ 0 & & 0 & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

alternatif olarak L

$$L = -\vec{w} \cdot \vec{S} - \vec{v} \cdot \vec{K} \quad \text{seçimlere de yazılabilir.}$$

Sabit vektörler (3 boyutlu)

S_i : dönmeleri üretirler.

K_i : boost'ları üretirler.

* bu altı matris'in karelerini, tamam köşegen'dir.

* reel üç-vektörler $\vec{E}, \vec{E}'$ için

3 boyutlu vektörler.

$$(\vec{E} \cdot \vec{S})^2 = -(\vec{E} \cdot \vec{S}) \quad \vec{E} \cdot \vec{E} = 1$$

$$(\vec{E}' \cdot \vec{K})^2 = +(\vec{E}' \cdot \vec{S}) \quad \vec{E}' \cdot \vec{E}' = 1$$

$$\vec{E} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$A = e^{L} = e^{-\vec{\omega} \cdot \vec{S} - \vec{\gamma} \cdot \vec{K}}$$

Özel durum: $\vec{\omega} = \vec{0} \quad \vec{\gamma} = \gamma \hat{e}_1$

$$A = e^{-\gamma \hat{e}_1 \cdot \vec{K}} = e^{-\gamma K_1} = 1 - \gamma K_1 + \frac{1}{2!} \gamma^2 K_1^2 - \frac{1}{3!} \gamma^3 K_1^3 + \dots$$

$$= 1 - \gamma K_1 + \frac{1}{2!} \gamma K_1^2 - \frac{1}{3!} \gamma^3 K_1^3 + \dots$$

$$= 1 - K_1 \left(\gamma + \frac{1}{3!} \gamma^3 + \dots \right) + K_1^2 \left(1 + \frac{1}{2!} \gamma^2 + \dots \right)$$

$$- K_1^2$$

$$= 1 - K_1^2 - K_1 \sinh \gamma + K_1^2 \cosh \gamma$$

○ zaman

$$A = \begin{pmatrix} \cosh \gamma & -\sinh \gamma & 0 & 0 \\ -\sinh \gamma & \cosh \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \tanh \gamma = \frac{v}{c}$$

Sayet $\vec{\gamma} = \vec{0}$ $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_3$ ise,

$$A = e^{-\omega \hat{e}_3 S_3} = e^{-\omega S_3} = 1 - \omega S_3 + \frac{1}{2!} \omega^2 S_3^2 - \frac{1}{3!} \omega^3 S_3^3 + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. eksen etrafında dönme

Genel bir boost için,

$$\vec{\gamma} = \hat{\beta} \tanh^{-1} \beta$$

0 zaman saf bir boost

$$A_{\text{boost}}(\vec{\beta}) = e^{\hat{\beta} \cdot \vec{K} \tanh^{-1} \beta}$$

$$\tanh^{-1} \beta = x$$

$$\beta = \sinh x$$

$$\sinh x = \beta / \sqrt{1 - \beta^2}$$

$$\cosh x = 1 / \sqrt{1 - \beta^2}$$

$$= I - \hat{\beta} \cdot \vec{K} x + \frac{1}{2!} (\hat{\beta} \cdot \vec{K})^2 x^2 - \frac{1}{3!} (\hat{\beta} \cdot \vec{K})^3 x^3 + \dots$$

$$= I - (\hat{\beta} \cdot \vec{K}) \left[x + \frac{x^3}{3!} + \dots \right] - (\hat{\beta} \cdot \vec{K})^2$$

$$+ (\hat{\beta} \cdot \vec{K})^2 \left[1 + \frac{x^2}{2!} + \dots \right]$$

$\sinh x$

$\cosh x$

$$= I - \hat{\beta} \cdot \vec{K} \sinh x + (\hat{\beta} \cdot \vec{K})^2 (\cosh x - 1) = I - (\hat{\beta} \cdot \vec{K}) \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} - (\hat{\beta} \cdot \vec{K})^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right)$$

$$A = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_1^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_2 & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_2^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_3 & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_3^2}{\beta^2} \end{pmatrix}$$

● Lorentz grubunun Lie yapısı :

$$[S_i, S_j] = \epsilon_{ijk} S_k$$

$$[S_i, K_j] = \epsilon_{ijk} K_k$$

$$[K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk} S_k$$

$$SL(2, \mathbb{C}) \text{ ya da } O(3, 1)$$

11.8. Thomas Precesyonu:

1926 da Uhlenbeck ve Goldsmith elektron spinini farkettiler ve elektron $g=2$ çarpanına sahiptir, normal Zeeman olayının doğru bir şekilde açıklanabileceğini ama her yerde bazı güçlükler olduğu görüldü.

$$\vec{S} : \vec{\mu} = \frac{g\hbar}{2me} \vec{S}, \quad g=2$$

Doğru teori, Dirac tarafından 1927 de verildi. Dirac bu fakun non-relativistik orijinini gösterdi.

$\vec{E}$ ve $\vec{B}$ alanlarında $\vec{v}$ hız ile hareket eden bir elektron düşünün. Durgun olduğu çerçevede spin açısal mom. 'u izlen hareket denklemini,

$$\left(\frac{d\vec{S}}{dt} \right)_{\text{durgun}} = \vec{\mu} \times \vec{B}' \quad \text{durgun çerçevede görüldüğü mag. alan.}$$

$$\vec{B}' \cong \vec{B} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E} \quad \left(\frac{v^2}{c^2} \text{ terimlerine kadar} \right) \text{ kadar.}$$

$$\left(\frac{d\vec{S}}{dt} \right)_{\text{durgun}} = \vec{\mu} \times \left(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E} \right)$$

bu denklem elektron spinin etkilene enerjiye eşdeğerdir

$$U' = -\vec{\mu} \cdot \left(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E} \right)$$

bir atomda (tek elektronlu) $e\vec{E}$ elektrikal kuvveti

$$e\vec{E} = -\frac{\vec{r}}{r} \frac{dV}{dr}$$

küresel sim. $V(r)$ pot. en. nın negatif gradienti.

0 zaman spin-enerjisi enerji

$$U' = -\frac{ge}{2me} \vec{S} \cdot \left(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c} \times \left(\frac{-\vec{r}}{r} \frac{dV}{dr} \right) \right)$$

$$= -\frac{ge}{2me} \vec{S} \cdot \vec{B} + \frac{g}{2mc^2} (\vec{S} \cdot \vec{L}) \frac{dV}{dr}$$

$g=2$ için bu $1/2$ kadar ~~değişir~~

Bu etki. enerjisi normal Zeeman etkisi 2 çarpımına kadar

doğru gelir. Hatta, spin için hareket denli. inden kaynak-

$$\left(\frac{d\vec{S}}{dt} \right)_{\text{spin}} = \vec{r} \times \vec{B}$$

lanır. Durgun çerçevede elektron döner, 0 zaman çerçevesinde.

$$\left(\frac{d\vec{S}}{dt} \right)_{\text{non-rot}} = \left(\frac{d\vec{S}}{dt} \right)_{\text{durgun}} + \vec{\omega}_T \times \vec{S} \quad \text{Goldstein.}$$

ağırlık (Thomas)

$$\left(\frac{d\vec{S}}{dt} \right)_{\text{n-r}} = \frac{ge}{2me} \vec{S} \times \vec{B}' + \vec{\omega}_T \times \vec{S}$$

$$= \vec{S} \times \left(\frac{ge}{2me} \vec{B}' - \vec{\omega}_T \right)$$

karşı gelen etki. enerji evrenin ifade

$$U = U' + \vec{S} \cdot \vec{\omega}_T$$

elektron herhangi bir zamanda

$$\vec{v}(t) = c \vec{\beta}$$

$$\vec{v}(t+\delta t) = c (\vec{\beta} + \delta \vec{\beta}) \quad t+\delta t \text{ de}$$

$$t: A_{\text{best}}(\vec{\beta})$$

$$t+\delta t: A_{\text{best}}(\vec{\beta} + \delta \vec{\beta})$$



Leb. a göre $\vec{v}$ line ile
göz önüne al

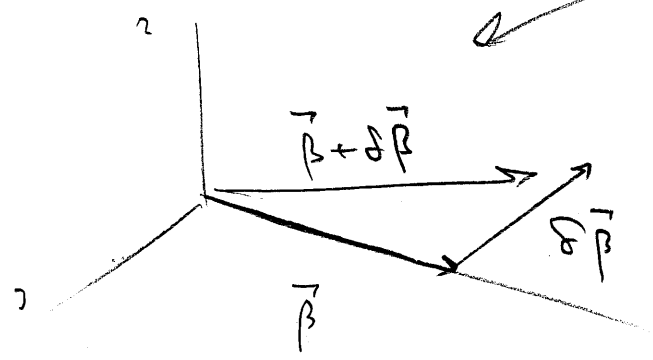
auf Lorentz boost (Lm).

$$\left. \begin{aligned} t: \quad x' &= A_{\text{boost}}(\vec{\beta}) x \\ t+\delta t: \quad x'' &= A_{\text{boost}}(\vec{\beta} + \delta\vec{\beta}) x \end{aligned} \right\} x'' = A_T x'$$

→ Lorentz boost composition

$$\begin{aligned} x'' &= A_{\text{boost}}(\vec{\beta} + \delta\vec{\beta}) x = A_{\text{boost}}(\vec{\beta} + \delta\vec{\beta}) A_{\text{boost}}^{-1}(\vec{\beta}) x' \\ &= A_T x' \end{aligned}$$

$A_T = A_b(\vec{\beta} + \delta\vec{\beta}) A_b(-\vec{\beta})$ → in Komponenten mit Satz über Ableiten.

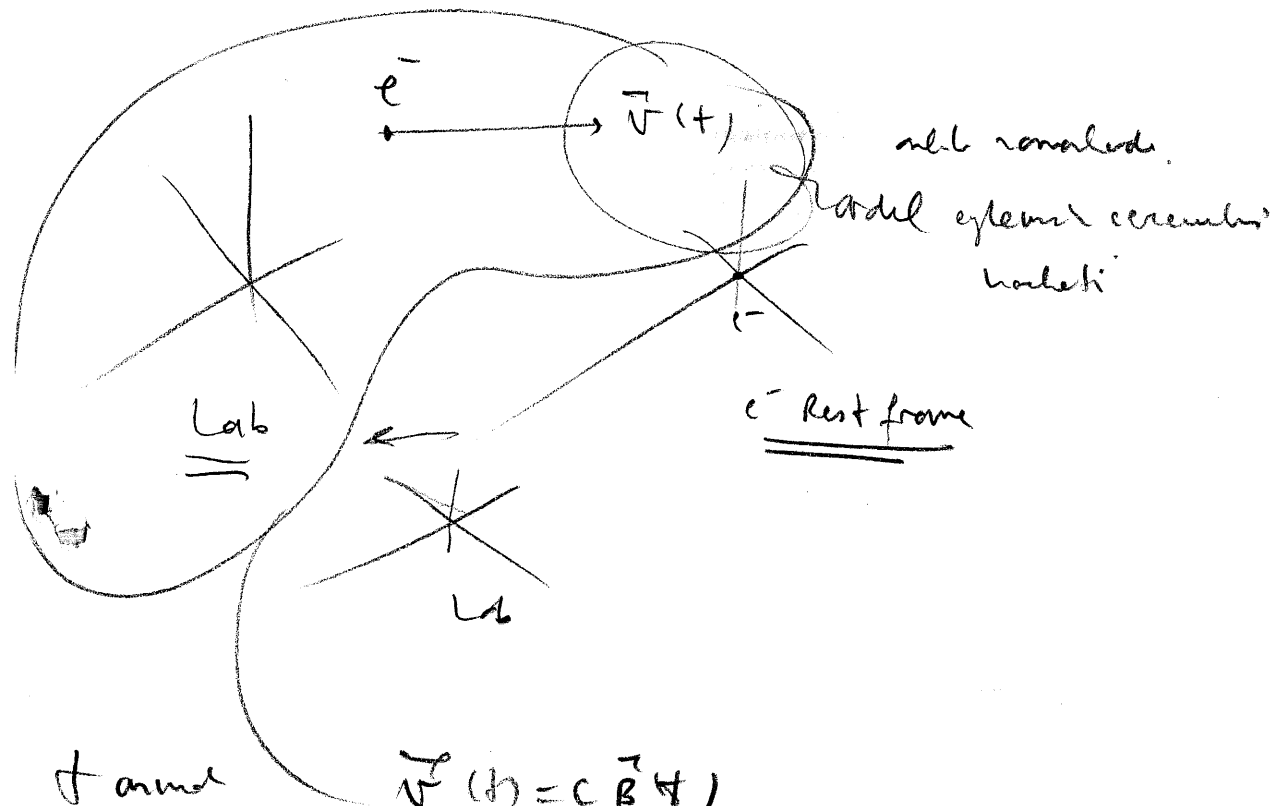


$$\vec{\beta} \rightarrow \vec{\beta} + \delta\vec{\beta} = (\beta_1 + \delta\beta_1)\hat{e}_1 + \delta\beta_2\hat{e}_2$$

$$A_b(-\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_b(\vec{\beta} + \delta\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma + \gamma^3\delta\beta_1 & -(\gamma\beta + \gamma^3\delta\beta_1) & -\gamma\delta\beta_2 & 0 \\ -(\gamma\beta + \gamma^3\delta\beta_1) & \gamma + \gamma^3\delta\beta_1 & \frac{\gamma-1}{\beta}\delta\beta_2 & 0 \\ -\gamma\delta\beta_2 & \frac{\gamma-1}{\beta}\delta\beta_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ω_T Thomas precession frequency kanyar elektron dairesi kareli
hareket eder then kanyar ifi medir.



t anula

$$\vec{v}(t) = c \vec{\beta}(t)$$

$t + \delta t$

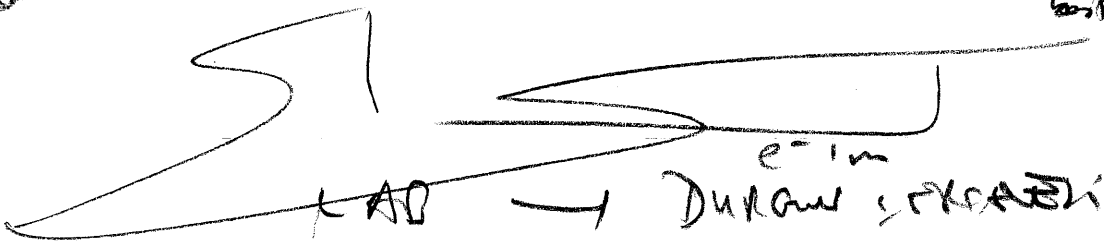
$$\vec{v}(t + \delta t) = c \vec{\beta}(t + \delta t)$$

t anula

$$X' = A_{\text{best}}(\beta) X$$

$t + \delta t$ anula

$$X'' = A_{\text{best}}(\vec{\beta} + \delta \vec{\beta}) X$$



say laate
best for simpl.

model electron.

$$X'' = A_T X'$$

$$A_T = A_{\text{best}}(\vec{\beta} + \delta \vec{\beta}) A_{\text{best}}^{-1}(\vec{\beta}) = A_{\text{best}}(T(\vec{\beta} + \delta \vec{\beta}) A_{\text{best}}^{-1}(\vec{\beta}))$$

Sadece $\delta \vec{\beta}$ da 1. merteye terimleri karşılıklı sıradan matris çarpımı ile,

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma^2 \delta \beta_1 & -\gamma \delta \beta_2 & 0 \\ -\gamma \delta \beta_1 & 1 & (\frac{\gamma-1}{\beta}) \delta \beta_2 & 0 \\ \gamma \delta \beta_2 & -(\frac{\gamma-1}{\beta}) \delta \beta_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sorum 12. Lorentz den.

$$= 1 - (\frac{\gamma-1}{\beta}) (\vec{\beta} \times \delta \vec{\beta}) \cdot \vec{S} - (\gamma^2 \delta \beta_{||} + \gamma \delta \beta_{\perp}) \cdot \vec{K}$$

$$\left(\frac{dG}{dt} \right) \Big|_K = \frac{dG}{dt} \Big|_{K'} + \vec{\omega} \times \vec{G}$$

$\vec{\beta}$ da hareketleniyor

$$A_T = R(\Delta \vec{\Omega}) A_{boost}(\Delta \vec{\beta}) \begin{cases} \Delta \vec{\Omega} = (\frac{\gamma-1}{\beta}) (\vec{\beta} \times \delta \vec{\beta}) = \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \vec{\beta} \times \delta \vec{\beta} \\ \Delta \vec{\beta} = \gamma^2 \delta \beta_{||} + \gamma \delta \beta_{\perp} \end{cases}$$

$1 - \Delta \vec{\Omega} \cdot \vec{S}$
 $1 - \Delta \vec{\beta} \cdot \vec{K}$

$$t + \delta t \text{ için } \delta \vec{\beta}, \Delta \vec{\Omega}$$

$$A_{boost}(\vec{\beta} + \delta \vec{\beta}) = R(\Delta \vec{\Omega}) A_{boost}(c \Delta \vec{\beta}) A_{boost}(t c \vec{\beta})$$

$$\vec{\omega}_T = - \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\Omega}}{\delta t} = \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{\vec{a} \times \vec{v}}{c} \quad \vec{a} = -\frac{1}{m} \frac{\vec{r}}{r} \frac{dV}{dr}$$

$$\vec{\omega}_T = -\frac{1}{2m\tilde{c}^2} \vec{L} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}$$

$$U = U' + \vec{S} \cdot \vec{\omega}_T$$

$$= -\frac{g\hbar}{2m\tilde{c}} \vec{S} \cdot \vec{B} + \frac{g-1}{2m\tilde{c}^2} \vec{S} \cdot \vec{L} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma + \frac{1}{\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (1 - \sqrt{1-\beta^2})$$

$$\approx \frac{1}{1-\beta^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$$

$$\approx \frac{1}{1-\beta^2} \left(1 - \frac{1}{2}\beta^2 - 1\right)$$

$$\approx \beta^2/2$$

Yavaş hareketli bir ektir.

11.9. Elektrik yükünün invarianslığı, ED 'in kovaryanslığı.

Öncelikle,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$$

Lorentz kuvvet denklemini inceleyelim. $\vec{p}$ 'nin 4 lü bir vektörün uzaysal parçaları olarak düşüldüğünü biliyoruz.

$$\mathcal{P}^\alpha = (p_0, \vec{p}) = m\mathcal{U}^\alpha = m(\mathcal{U}_0, \vec{\mathcal{U}})$$

$$\mathcal{U}^\alpha = (\mathcal{U}_0, \vec{\mathcal{U}}) = (\gamma c, \gamma \vec{v})$$

$$p_0 = E/c \quad d\tau = \sqrt{1-\beta^2} dt = \frac{dt}{\gamma}$$

t yerine τ has zamanı kullanır isek $\Rightarrow$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{\gamma d\tau} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$$

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{1}{c} \left(\gamma c \vec{E} + \gamma \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

$$= \frac{q}{c} \left(u_0 \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \right)$$

tüm sergencelerde invariant, bir q 'lü vektörün vaysal parçası

invariant τ 'ya göre bir q 'lü vektörün vaysal kısmının türetilmesi birim fiziksel anlamını değiştirir. O zaman, Rhes bir q lü vektörün vaysal kısmı olarak dönüşür.

karşı gelen zaman bileşeni denklemini parçacığın enerjisinin değişim oranıdır.

$$\frac{dp_0}{d\tau} = \frac{q}{c} \vec{U} \cdot \vec{E}$$

6. Bölüm 6.11.

bir q lü vektörün
zaman bileşeni

zaman bileşeni
gibi dönüşmeli

$$\frac{c}{c} \gamma \frac{dE}{d\tau} = q \vec{E} \cdot \vec{v} \gamma$$

$$\vec{U} \cdot \vec{E}$$

$\vec{E}$ 'nin bileşenleri rank 2 olan bir tensörün vaysal kısımları olmalı.

q lü vektörün vaysal
bileşeni

$$\vec{U} \cdot \vec{E} = F^0 \beta U_\beta$$

Şimdi, mikroskopik Maxwell denklemlerini ele alalım. Süreklilik denklemi,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad \text{bu } \rho \text{ ve } \vec{J} \text{ 'yi birlikte birleştirip } \rho \text{ ve } \vec{J} \text{ 'yi birleştirip } \rho \text{ ve } \vec{J} \text{ 'yi birleştirip } \rho \text{ ve } \vec{J} \text{ 'yi birleştirip}$$

postüladır.

$$J^\alpha = (\rho, \vec{J})$$

• zaman $\partial_\alpha J^\alpha = 0$ $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right)$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla} \right)$$

$$\partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\vec{\nabla} \right)$$

Tülin invariansliğinden,

• $\int_{\underline{k}} d^3 \vec{x} = \int_{\underline{k}'} d^3 x' \quad (Q = Q' \text{ invariant})$

$$d^4 x' = |J| d^4 x = \det A d^4 x = d^4 x$$

$$\Rightarrow dx_0 d^3 \vec{x} = dx_0' d^3 \vec{x}'$$

$$\int d^3 \vec{x} = \int d^3 \vec{x}'$$

ρ bir bütün zaman bileseni gibi değişmeli. ki böyle

Lorentz ayaında, $\vec{A}$ ve Φ için dalga denklemleri,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \Phi = 4\pi \rho$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (LG)$$

$$A^\alpha = (\Phi, \vec{A})$$

$$\square = \partial_\alpha \partial^\alpha = \partial^\alpha \partial_\alpha$$

$$= \partial_0 \partial^0 + \partial_i \partial^i$$

$$= \partial_0^2 + \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}) = \partial_0^2 - \vec{\nabla}^2$$

$$= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$$

$$\Rightarrow \square A^\alpha = \frac{4\pi}{c} J^\alpha, \quad \partial_\alpha A^\alpha = 0$$

$\vec{E}$ ve $\vec{B}$ potansiyeller aından şu şekilde yazılabilir.

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} E_x = E'_x &= -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ &= -(\partial^0 A'_1 - \partial^1 A'_0) \end{aligned} \quad \partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla} \right)$$

$$B_x = B'_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -(\partial^1 A^3 - \partial^3 A^2)$$

Bu denklemler elekt. ve magnetik alanların renk 2 simetrik bir alan tenörünün bileşenleri olduğunu söyler. $F^{\alpha\beta}$

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$$

$$F^{01} = -E^1 = -E_x \quad F^{23} = -B_x = -B^1$$

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma} F^{\gamma\delta} g_{\delta\beta} \quad \text{covariant}$$

$$F_{01} = g_{0\gamma} F^{\gamma\delta} g_{\delta 1} = g_{00} F^{01} g_{11} = -F^{01}$$

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Diğer yollarla bir şekilde dual alan kuvvet tensörü: $F^{\alpha\beta}$.

Özellikle rank 4 olan tamamen antisimetrik $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ ten-
sörünü tanımlayalım.

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & \text{çift} \\ -1 & \text{tek perm.} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ 0, 1, 2, 3 ın farklı perm.}$$

$$\epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = A^{\alpha'}_{\alpha} A^{\beta'}_{\beta} A^{\gamma'}_{\gamma} A^{\delta'}_{\delta} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

$$F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}$$

$$\Rightarrow F^{01} = \frac{1}{2} (\epsilon^{0123} F_{23} + \epsilon^{0132} F_{32})$$

$$= \frac{1}{2} (F_{23} + (-1) \underbrace{F_{32}}_{-F_{23}}) = F_{23}$$

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

Elektrodinamiğin kovaryant formunu bu inhomogen Maxwell denklemlerini açık eldiv kovariant formda yazılır.

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{1}{c} \vec{J} \end{aligned} \right\} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{1}{c} J^\beta$$

$$\partial_\alpha F^{\alpha 0} = \frac{4\pi}{c} J^0 \Rightarrow \partial_0 F^{00} + \partial_i F^{i0} = \frac{4\pi}{c} \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$$

Benzer şekilde homogen denklemler,

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 0$$

11.10. Elektromagnetik + Lorentz Dönüşümü

$$\begin{matrix} K \\ \hline F^{\alpha\beta} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} K' \\ \hline F'^{\alpha\beta} \end{matrix}$$

$$F'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}} F^{\gamma\delta}$$

$$F' = A F \tilde{A} \quad \tilde{A} = A^T$$

$$F'^{\alpha\beta} = A^{\alpha\gamma} F^{\gamma\delta} \tilde{A}^{\delta\beta}$$

$$= A^{\alpha\gamma} F^{\gamma\delta} A^{\beta\delta}$$

$$x'^{\alpha} = A^{\alpha\beta} x^{\beta}$$

$$= \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}} F^{\gamma\delta}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cosh \zeta & \sinh \zeta & 0 & 0 \\ -\sinh \zeta & \cosh \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

özel durum dahil.

x_1 - eksenine göre boost

$$F'^{\alpha\beta} = A F \tilde{A}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} E_1' &= E_1 \\ E_2' &= \gamma (E_2 - \beta E_3) \\ E_3' &= \gamma (E_3 + \beta E_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1' &= B_1 \\ B_2' &= \gamma (B_2 + \beta E_3) \\ B_3' &= \gamma (B_3 - \beta E_2) \end{aligned}$$

44

$F^{\alpha\beta}$ cinsinden, son dekle. 'i: $(\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 0)$ ($\#^{\alpha\beta}$ dan ziyade)

$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0$$

sehlilinde yamak muntah.

Sonuc. Elektromagnetizmanın Lorentz kovaryantlığı kurulmuş oldu.

11.10. Elektromagnetik Alanların Dönüşümleri.

$$\begin{array}{cc} K & K' \\ \equiv & \equiv \\ F^{\alpha\beta} & F'^{\alpha\beta} \end{array}$$

$$F'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta} F^{\gamma\delta}$$

$$F' = A F \tilde{A} \quad \tilde{A} = A^T$$

$$\begin{aligned} F'^{\alpha\beta} &= A^{\alpha\gamma} F^{\gamma\delta} \tilde{A}^{\delta\beta} = A^{\alpha\gamma} F^{\gamma\delta} A^{\beta\delta} & x'^\alpha &= A^{\alpha\beta} x^\beta \\ &= \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta} F^{\gamma\delta} \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cosh \zeta & \sinh \zeta & 0 & 0 \\ -\sinh \zeta & \cosh \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{sehlililebi rel LD 12.13} \\ \text{bu } x_1 \text{-ekseni boyunca boost} \end{array}$$

$$F'^{\alpha\beta} = A F \tilde{A}$$

$$E_1' = E_1$$

$$B_1' = B_1$$

$$E_2' = \gamma (E_2 - \beta B_3)$$

$$B_2' = \gamma (B_2 + \beta E_3)$$

$$E_3' = \gamma (E_3 + \beta B_2)$$

$$B_3' = \gamma (B_3 - \beta E_2)$$

K dan K' ya qamul etib LD niq

$$\vec{E}' = \gamma (\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}) - \frac{\gamma}{\gamma+1} \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{E})$$

$$\vec{B}' = \gamma (\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E}) - \frac{\gamma}{\gamma+1} \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{E})$$

III. Uniform, va yaras degirish de, alonlarde spin n.R. Relativistik
Korreksh Denk. i :

$$\frac{d\vec{S}}{dt'} = \frac{ge}{2mc} \vec{S} \times \vec{B}' \quad \text{Duzgyn qaraluvda}$$

$$S^{\alpha} : 4 \text{ ta spin vektor } (S^0, \vec{S}) \quad S_0 = \vec{\beta} \cdot \vec{S}$$

$$\vec{S} = \vec{S} + \frac{\gamma}{\gamma+1} \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{S})$$

$$\frac{dS^{\alpha}}{dt} = \frac{e}{m} \left[\frac{g}{2} F^{\alpha\beta} S_{\beta} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{g}{2} - 1 \right) u^{\alpha} (S_{\lambda} F^{\lambda\mu} u_{\mu}) \right]$$

Bargman - Michel - Telegadi Denk. i

$K \rightarrow K^{\text{alg}}$ geht zu Lokale über, d.h.,

$$\vec{E} \leftarrow \gamma (\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{E})$$

$$\vec{B}' = \gamma (\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E}) - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{E})$$