0. Matematiksel Başlangıç Ön Hazırlık

0.1. Kümeler

Bir A kümesinin her a öğesi, bu kümenin bir elemanı olarak adlandırılır:

$$a \in A \quad , \text{ bunun olumsuzu } \quad a \notin A$$

$\{2,4,6,8\}$, $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$, $\{1, x, x^2, \dots\}$ $\{1, i, -1, -i\}$

$\{x \mid P(x)\} \Rightarrow$ bütün x'lerin kümesi, öyle ki $P(x)$ doğrudur.

$\{n \mid n$ çift ve $1 < n < 9\}$, $\{\pm n \mid n$ doğal bir sayı$\}$

veya $\{x^n \mid n \geq 0$ ve n tamsayı$\}$, $\{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 1\}$

Benzer şekilde; birim çember: $\{z \mid |z| = 1\}$

$[a, b]$ kapalı aralığı : $\{x \mid a \leq x \leq b\}$

(a, b) açık " : $\{x \mid a < x < b\}$

BS K

Örnek: (i) tüm tamsayılar kümesi

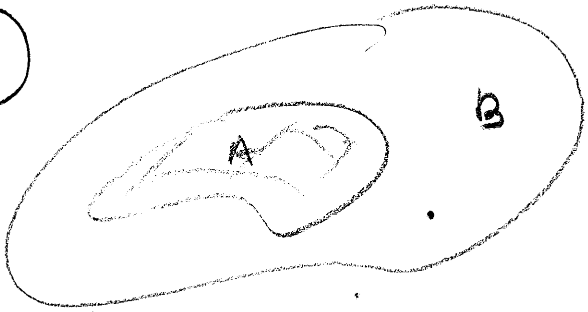
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, \dots\}$$

$$= \{x \mid x \in \mathbb{Z}\}$$ $0 \in \mathbb{Z}$ ama $1.3 \notin \mathbb{Z}$

(ii) $A = \{a\}$ singleton $a \in A$

$|A|$: kümenin mertebesi (elemanlarının sayısı.)

#



$A \subset B$

Venn Diyagramı

#

BS K

- x'in bütün negatif olmayan kuvvetlerinin kümesi : $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$
- tek elemanlı küme $\longrightarrow$ <u>singleton</u>
- Her zaman $a \in B$ olduğunda $a \in A \Rightarrow$ B'ye A'nın alt kümesi deriz, ve $B \subset A$ ya da $A \supset B$ yazarız.
- Eğer $A \subset B$ ve $B \subset A \Rightarrow$ $A = B$'dir.

  " $A \supset B$ ve $A \neq B \Rightarrow$ B, A'nın <u>has alt kümesidir</u>
- <u>Boş küme</u> ; $\phi = \{ \underbrace{a \mid a \neq a}_{\text{no elements}} \}$ hiç bir eleman yok!
- Bir A kümesinin tüm alt kümeleri (ϕ dahil) topluluğu 2^A ile gösterilir. Sebebi ; n eleman içeren bir kümenin altkümeleri sayısı 2^n dir.
- A ve B iki küme ise bunların <u>birleşimi</u> **$A \cup B$** ile gösterilir ve hem A ya da hem B ya da her ikisine ait olan bütün elemanları içeren kümedir.
- A ve B kümelerinin <u>arakesiti</u> **$A \cap B$** ile gösterilir ve her iki kümeye ait olan elemanları içeren kümedir.

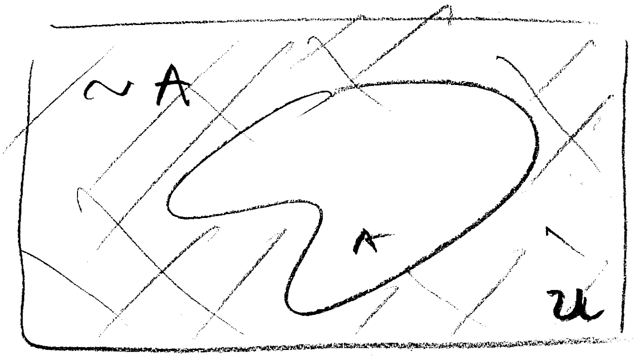
Eğer, $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ bir kümeler topluluğu ise

<u>birleşimleri</u> ; $\bigcup_\alpha B_\alpha$

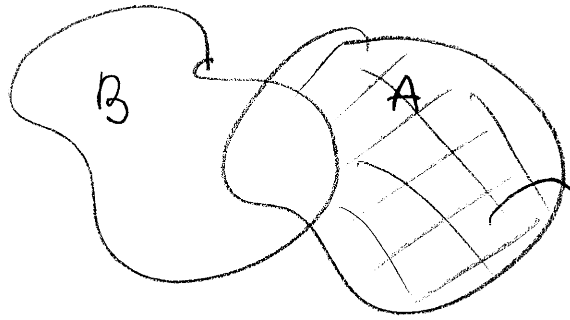
<u>arakesitleri</u> ; $\bigcap_\alpha B_\alpha$ ile gösterilir.

BS K

A keyfi bir küme, evrensel kümeye ait ancak A'ya ait olmayan elemanların oluşturduğu kümeye A nın <u>tümleyeni</u> diyoruz



- $\sim(\sim A) = A$
- $\sim \phi = U$
- $\sim U = \phi$
- $A \subset B \Rightarrow \sim B \subset \sim A$



$A \sim B$ fark kümesi

A'nın B ye göre B nin tümleyeni

$\sim A = U \sim A$

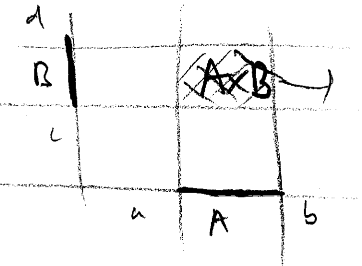
Örnek: (i) $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{a, b\}$

$A \times B = \{ (1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b) \}$

$B \times A = \{ (a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3) \}$

$A \times B \neq B \times A$

(ii)



(x, y)

$A = \{ x \mid a \leq x \leq b \}$ x_1

$B = \{ y \mid c \leq y \leq d \}$ x_2

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ koord. düzlemi.

BS K

Evrensel küme: Bir A kümesinin (komplemanı = tümleyeni)

$\sim A$:

$$\sim A \equiv \{ a \mid a \notin A \}$$

Fark : $A \sim B \equiv \{ a \mid a \in A \text{ ve } a \notin B \}$

Kartezyen çarpım: verilen iki A ve B kümesi için, $A \times B$ kartezyen çarpımı, $a \in A$ ve $b \in B$ olacak şekilde (a,b) "sıralı çiftleri" kümesidir.

$$A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A \text{ ve } b \in B \}$$

Genelleştirme: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümeleri ise, bunların kartezyen çarpımı, sıralı n-lilerin kümesidir.

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \}$$

Eğer, $A_1 = A_2 = \ldots A_n = A \Rightarrow$ o zaman $A \times A \times A \times \ldots \times A$ yerine A^n yazarız

$$A^n = \{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A \}.$$

Örnek: $A = \mathbb{R}$ olsun. $\mathbb{R}^2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ olacak şekilde, (x_1, x_2) çiftlerinin kümesidir; bu Euclid (Öklid) uzayındaki noktalardır

$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \}$ + gerçel n'lilerin kümesi

BS K

Örnek: (I) $\triangleright$: " $<$ " bağıntısını tanımlayalım.

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$\triangleright \subset A \times A$

$A \times A = \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$

$\triangleright = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$

bunu farklı iki küme için genelleyecek

$x \triangleright y = x < y \quad (x, y) \in \mathbb{R}$ şeklinde olacaktır.

$X \to Y$ 'ye bir bağıntı.

Örnek (II) $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesini ele alalım

" m n yi böler " bağıntısını ;

(i) yansımalıdır çünkü m m yi her zaman böler

(ii) geçişlidir. m n yi l de m yi böler $\Rightarrow m \triangleright l$.

$m \triangleright n \qquad n \triangleright l$

(iii) sim. değil.

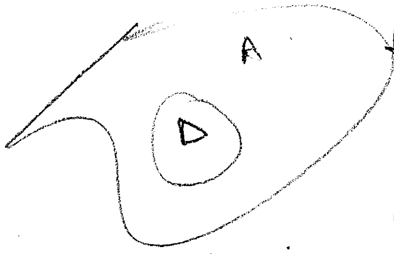
III. " $m < n$ " bağıntısını ele alalım yansımalı, sim. değil

BS K

0.1.1. Denklik bağıntıları:

Bir kümenin elemanlarını çeşitli şekillerde gruplamak faydalıdır.

0.1.1. Tanım: A, bir küme olsun. A üstündeki bir bağıntı, A'nın elemanlarının sıralı çiftleri arasındaki bir karşılaştırma testidir. Eğer, $(a,b) \in A \times A$ bu testi geçerse, aDb yazarız ve "a, b'ye bağıntılıdır" deriz. A üstündeki denklik bağıntısı aşağıdaki özelliklere sahip olan bir bağıntıdır:



$$\begin{cases} aDa \quad \forall a \in A & (\text{yansıma}) \\ aDb \Rightarrow bDa \quad a,b \in A & (\text{simetri}) \\ aDb,\ bDc \Rightarrow aDc,\ a,b,c \in A & (\text{geçiş}) \end{cases}$$

- aDb olduğunda "a, b'ye denktir" deriz.

a'ya denk olan tüm elemanların kümesi $[\![a]\!]$,

$$[\![a]\!] = \{ b \in A \mid bDa \}$$

a nın denklik sınıfı olarak adlandırılır.

0.1.2. Öneri: $a, b \in A$ ve D, A üzerinde bir denklik bağıntısı ise, ya

$$[\![a]\!] \cap [\![b]\!] = \emptyset$$

ya da $[\![a]\!] = [\![b]\!]$ olur.

bu nedenle, $a' \in [\![a]\!] \Rightarrow [\![a']\!] = [\![a]\!]$.

BS K

0.1.3. Örnek: (a) A insanların kümesi ve $a D b$ 'de "a b'den büyüktür" olarak yorumlanır olsun. Diğer bir deyişle, $a D b$'yi "a ve b aynı babaya ait dedeler" olarak yorumlamış olsa idik, o zaman D denklik bağıntısıydı ve a'nın denklik sınıfı a'nın babasına ait dedelerin tüm büyük çocukların kümesi olacaktı.

(b) V, vektör potansiyellerin kümesi olsun. Herhangi bir f fonksiyonu için $\vec{A} - \vec{A}' = \vec{\nabla} f \Rightarrow A D A'$ yazalım. D bir denklik bağıntısıdır ve $[\![A]\!]$ aynı manyetik alanı veren tüm vektör pot.'lerin kümesidir.

(c) $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \sim \{0\})$ kümesini alalım. Eğer $ad = bc$ $\Rightarrow$ "(a,b), (c,d) ye bağlıdır" diyelim. Bu bir denklik bağıntısıdır. Daha $[\![(a,b)]\!]$, a/b oranı olarak tanımlanabilir.

0.1.4. Tanım: A bir küme ve $\{B_\alpha\}$, A'nın altkümelerinin bir topluluğu olsun. Eğer B_α'lar ayrık yani ortak eleman yok ise ve $\cup_\alpha B_\alpha = A$ ise; $\{B_\alpha\}$, A'nın bir bölüşümüdür deriz.

A'nın tüm denklik sınıflarının $\{[\![a]\!] \mid a \in A\}$ topluluğunu ele alalım. Bu sınıflar ayrıktır, ve bileşimleri A'nın tümünü kapsar. Bu nedenle A'nın denklik sınıflarının topluluğu, A'nın bir bölüşümüdür. Bu topluluk $A/\bowtie$ ile gösterilir ve $\bowtie$ denklik bağıntısı altında A'nın kesir kümesi olarak adlandırılır.

BS K

0.1.5. Örnek : (a) $\mathbb{R}^3$ alalım. Bunun üzerinde denklik bağıntısı tanımlayalım. $P_1 \in \mathbb{R}^3$ ve $P_2 \in \mathbb{R}^3$ denktir, eğer bunlar orijinden geçen aynı çizgi üzerinde ise. O zaman $\mathbb{R}^3/\bowtie$, orijinden geçen uzaydaki tüm çizgilerin kümesidir. Verilen bir doğru boyunca pozitif 3. koordinatı olan birim vektör bu doğrunun bir temsilcisi olarak seçilir ise, $\mathbb{R}^3/\bowtie$ üst birim yarıküre olarak tanımlanabilir. $\mathbb{R}^3/\bowtie$, $\mathbb{R}^3$ e eşlik eden izdüşüm uzayı olarak çağrılır.

(b) $\mathbb{Z}$ üzerinde bir bağıntı tanımlayalım:

$m D n$, $m, n \in \mathbb{Z}$, eğer $m-n$, k ile bölünür ise (k, sbt bir tamsayı). O zaman, D sadece bir bağıntı değil, aynı zamanda bir denklik bağıntısıdır. Bu durumda,

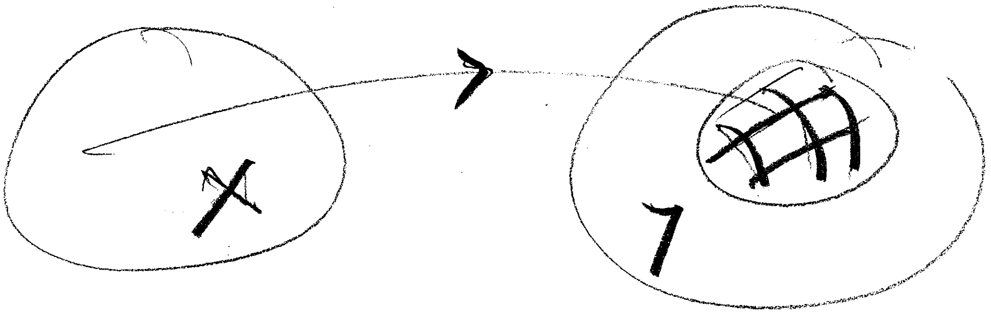
$$\mathbb{Z}/D = \{[\![0]\!], [\![1]\!], \ldots, [\![k-1]\!]\}$$

0.2. Maps (Gönderimler) Tasvir

X'den Y'ye bir f gönderimi

$$f : X \to Y \quad \text{ya da} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

X'in elemanları ile Y'nin kiler arasında bir karşılık gelmedir, öyleki X in tüm elemanları yer alır ve X in her elemanı sadece Y nin bir elemanına karşılık gelir.



BS K

Eğer $y \in Y$, $x \in X$ e karşılık gelen eleman ise,

$y = f(x)$ ya da $x \mapsto f(x)$ ya da $x \overset{f}{\mapsto}$,

yazarız ve $f(x)$ e x in f altında görüntüsü dür deriz.

$X \to$ bölge, $Y \to$ eşbölge ya da hedef uzay.

$f: X \to Y$ ve $g: X \to Y$ gönderimleri eşittir denir

eğer tüm $x \in X$ ler için $f(x) = g(x)$ ise.

0.2.1. Eş bölgesi (Y), gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi olan gönderime bir fonksiyon denir

A nın özdeşlik gönderimi

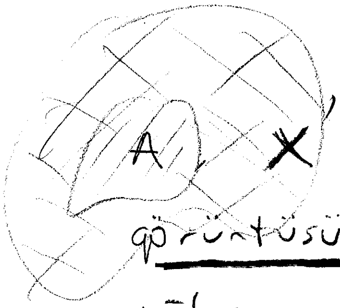
$$id_A : A \to A \quad id_A(a) = a \quad \forall a \in A$$

Grafik: bir $f: A \to B$ gönderiminin Γ_f grafiği $A \times B$'nin bir altkümesidir, ve

$$\Gamma_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \in A \times B \text{ ile tanımlanır.}$$

$A = B = \mathbb{R}$ olduğunda bu bilinen grafiktir ve $A \times B$ de xy-düzlemidir.

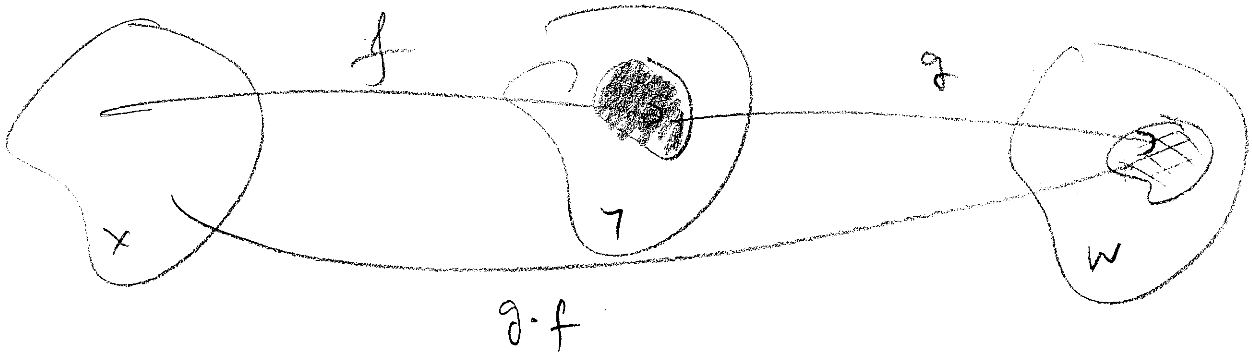
BS K



A, X in bir altkümesi ise, $f(A)=\{f(x) \mid x \in A\}$ ya A nın **görüntüsüdür** deriz. Benzer şekilde, $B \subset f(X)$ ise,

$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ ye **ters görüntüdür** ya da

B nin **öngörüntüsüdür** deriz. Eğer, B, tek bir b den ibaret ise, o zaman $f^{-1}(b)=\{x \in X \mid f(x)=b\}$ hepsi b ye giden X in bütün elemanlarından ibarettir. Olasıdır ki, X in birçok elemanı Y de aynı görüntüye sahip olsun. Bir f gönderiminin **eşbölgecinin** $f(X)$ altkümesine f'nin erişimi (range) denir (değer kümesi)



$f: X \to Y$ ve $g: Y \to W$ ise $h(x) = g(f(x))$ ile verilen $h: X \to W$ gönderimi f ve g nin **bileşimi** olarak adlandırılır ve $h = g \circ f$ ile gösterilir (sıraya dikkat!)

X in özdeşlik gönderimi $X \to X$

$$f \circ id_X = f = id_Y \circ f$$ olduğu kolayca görülür.

$\forall\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ ise, f ye **injektif** (birebir) denir ve (1-1 ile gösterilir)

$f(X) = Y$ $\exists$, gönderime **surjektif** (üstüne) denir.

Hem injektif ve hem de surjektif olan bir gönderime **bijektif** (birebir karşılık gelme) denir. Böyle iki kümenin aynı sayıda eleman vardır.

$f: X \to Y$, X den Y ye bijektif bir gönderim ise her $y \in Y$ için X de sadece bir x elemanı vardır ve bunun için

$f(x) = y$ 'dir.

$f^{-1}: Y \to X$ gönderimi $f^{-1}(y) = x$ ile verilir ve burada x, $f(x) = y$ olacak şekilde tek elemandır. Bu f'nin tersi olarak adlandırılır.

$$f \circ f^{-1} = id_Y \quad , \quad f^{-1} \circ f = id_X$$

$f: X \to Y$ verilsin. X de bir $\bowtie$ bağıntısı tanımlayalım:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 \bowtie x_2$$

bu bir denklik bağıntısıdır. Denklik sınıfları, X in altkümeleridir ve tüm elemanları Y de aynı noktaya gider. Gerçekten $[\![x]\!] = f^{-1}(f(x))$. f ye karşılık gelen

$\tilde{f}([\![x]\!]) = f(x)$ ile verilen bir $\tilde{f}: X/\bowtie \to Y$

gönderimi vardır. Bu gönderim injektiftir, çünkü

$$\tilde{f}([\![x_1]\!]) = \tilde{f}([\![x_2]\!]) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2), \text{ böylece}$$

x_1 ve x_2 aynı eşdeğerlik sınıfına dahildir; bu nedenle

$[\![x_1]\!] = [\![x_2]\!]$.

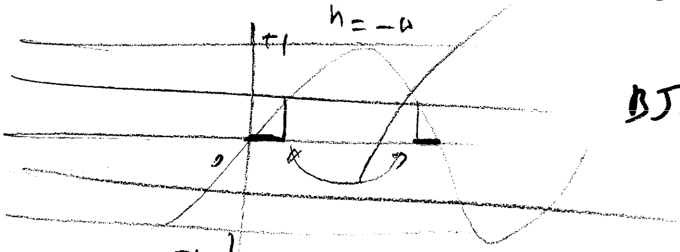
<u>Sonuç</u>: $\tilde{f}: X/\bowtie \to f(x)$, bijektif'tir.

Eğer f ve g, tersleri f^{-1} ve g^{-1} olan bijektif gönderim iseler $g \circ f$ nin de tersi vardır ve $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

0.2.2 Örnek: Bir kümenin öngörüntüsüne örnek.

IJK ∋ 1-1
$f(x)=7$ ∋ SKJ
$\sin^{-1}[0,\frac{1}{2}]$

$$\sin^{-1}0 = \{n\pi\}_{n=-\infty}^{+\infty}, \quad \cos^{-1}0 = \left\{\frac{\pi}{2}+n\pi\right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$$



BJK.

$f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ile alalım.

$f: \mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad f(x)=x^3$ } bijektif
$g: \mathbb{R}\to(-1,+1) \quad g(x)=\tanh x$

$f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^+, \quad f(x)=x^2$ surjektif (injektif değil)

$g: \mathbb{R}^+\to\mathbb{R} \quad g(x)=x^2$ injektif (surjektif ")

$h: \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+ \quad h(x)=x^2$ bijektif

$U: \mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad U(x)=x^2$ ne injektif ne surjektif

$M^{n\times n} \to n\times n$ gerçel matrisler olsun.

$\det: M^{n\times n}\to\mathbb{R} \quad \det(A)=\det A \to$ A nın determinantı
bu fonksiyon surjektif'tir ancak injektif değildir.

$f: \mathbb{C}\to\mathbb{R} \quad f(z)=|z|$ ne injektif ne surjektif

$f^{-1}(1)$: birim çember

Bir gönderimin bölgesi, bir kümenin kartezyen çarpımı olabilir:

$$f: X\times X\to Y$$

(i) $Y=\mathbb{R}$ olsun. X uzaydaki vektörler kümesi ise,

$$f(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b}$$

BS K

(ii) $Y = X$ olsun. O zaman f, X üzerinde ikili işlem olarak adlandırılır; X deki bir eleman X de iki elemana eşlik eder. Örneğin, $X = \mathbb{Z}$ olsun

$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\quad f(m,n) = mn$ tamsayılar çarpımı-mn ikili işlemi

0.3. Metrik Uzaylar :

0.3.1. Tanım: Bir metrik uzay, bir X kümesi ile birlikte gerçel değerli bir $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonudur, öyleki

(a) $d(x,y) \geq 0$ $\quad \forall x,y$ ve $\quad d(x,y) = 0$ eğer $x = y$

(b) $d(x,y) = d(y,x)$ $\quad$ simetri

(c) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ $\quad$ üçgen eşitsizliği

d : mesafe kavramının soyutlanması

Örnekler: 1) $X = \mathbb{Q}$ $\quad d(x,y) = |x-y|$

Q rasyonel sayılar kümesi

(2) $X = \mathbb{R}$ $\quad d(x,y) = |x-y|$

(3) X bir kürenin yüzeyindeki noktalar

$d_1(P,Q)$: küre yüzeyi üzerinde P'yi Q'ya birleştiren en kısa eğri

$d_2(P,Q)$: en uzun eğri

BS K

(4) $C^{\circ}[a,b]$: $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli gerçek değerli fonk.'lar. $f, g \in C^{\circ}(a,b)$ için

$$d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

(5) $C_B(a,b)$: $[a,b]$ kapalı aralığında sınırlı sürekli gerçel değerli fonk.lar kümesi $f, g \in C(a,b)$ için

$$d(f,g) = \max_{x \in [a,b]} \{|f(x) - g(x)|\}$$

Bir dizi, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinden X metrik uzayına

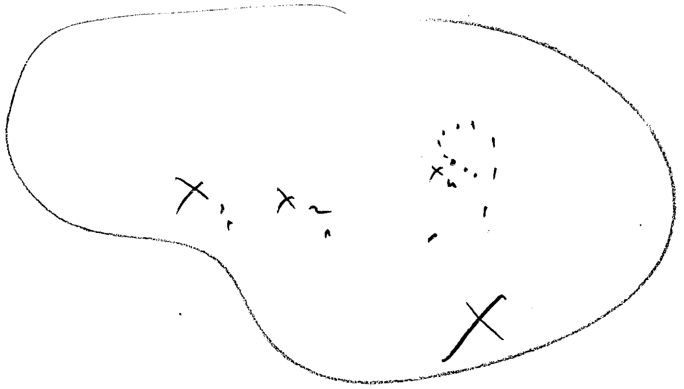
$$s : \mathbb{N} \to X$$

gönderimidir. Bu gönderimde n pozitif tam sayısına X metrik uzayında bir $s(n)$ noktası eşlik eder. $s(n)$ yerine s_n yazmak adettendir. n'nin büyük değerleri için dizinin varacağı sonu bulmak önemlidir.

0.3.2. Bazı x ler için ve herhangi bir ϵ pozitif gerçel sayısı için $n > N$ olduğunda $d(x_n, x) < \epsilon$ olacak şekilde bir doğal N sayısı olsun. O zaman, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin x'e yakınsadığını söyleriz ve $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ ya da $d(x_n, x) \to 0$ ya da basitçe $x_n \to x$ yazarız.

BS K

Cauchy Dizisi: $\lim_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n)=0$ olan dizidir.



Bir dizinin CD olup olmadığını doğrudan test edebiliriz. Ancak, bir dizinin CD olması olgusu onun yakınsamasını garantilemez.

Örnek: Metrik Uzay, $\mathbb{Q}$, $d(x,y)=|x-y|$
(Ras. say. kümesi)

$\{x_n\}_1^\infty$ dizisini alalım. Burada $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ olsun.

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$$

Herhangi bir n için x_n rasyonel bir sayıdır ve hemen $|x_m-x_n|\to 0$ olduğu görülebilir. Böylece bu dizi Cauchy'dir. Ancak

$\lim_{n\to\infty} x_n=\ln 2$'dir ve rasyonel değildir.

İçinde her Cauchy serisi yakınsayan bir metrik uzay **tam bir metrik uzay** olarak adlandırılır.

$\mathbb{Q}$ tam bir metrik uzay değildir. Ancak, tüm CD'lerin limit noktaları $\mathbb{Q}$'ya eklenirse elde edilen uzay tam olur $\to$ o da $\mathbb{R}$ uzayıdır.

BS K