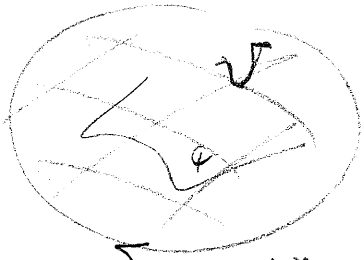
1.

VEKTÖRLER ve DÖNÜŞÜMLER



1.1. Vektör Uzayları

1.1.1. Tanım : $\mathbb{C}$ üzerinde bir V vektör uzayı, $|a\rangle$, $|b\rangle$, $|x\rangle \ldots$ ile gösterilen ve vektör diye adlandırılan ve aşağıdaki özellikleri olan nesneler kümesidir.

1. V de her $|a\rangle$ ve $|b\rangle$ vektör çiftine, yine V de bir $|a\rangle + |b\rangle$ vektörü ($|a\rangle$ ve $|b\rangle$ nin toplamı) karşılık gelir öyleki

   (a) $|a\rangle + |b\rangle = |b\rangle + |a\rangle$

   (b) $|a\rangle + (|b\rangle + |c\rangle) = (|a\rangle + |b\rangle) + |c\rangle$

   (c) sıfır vekt. denilen tek bir $|0\rangle \in V$ vardır öyleki her $|a\rangle$ için $|a\rangle + |0\rangle = |a\rangle$ dır

   (d) her $|a\rangle \in V$ vekt. ne tek bir $-|a\rangle$ karşılık gelir, öyleki $|a\rangle + (-|a\rangle) = |0\rangle$

2. Her α kompleks sayısına (skaler) ve her $|a\rangle$ vektörüne V de bir $\alpha|a\rangle$ karşılık gelir öyle ki

   (a) $\alpha(\beta|a\rangle) = (\alpha\beta)|a\rangle$

   (b) $1\,|a\rangle = |a\rangle$

3. Vektör ve skalerleri içeren çarpım dağılmalıdır

   (a) $\alpha(|a\rangle + |b\rangle) = \alpha|a\rangle + \alpha|b\rangle$

   (b) $(\alpha + \beta)|a\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|a\rangle$

Kompleks bir vektör uzayı tanımlar. $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ alınır $\Rightarrow$ gerçel vektör uzayı

1.1.2. Örnekler:

1. $\mathbb{R}$, reel sayılar cismi üzerinde bir VU.'dır.
2. $\mathbb{C}$ " " " " " "
3. $\mathbb{C}$ kompleks " " " " "
4. $V = \mathbb{R}$, skaler sayılar cismi $\mathbb{C} \Rightarrow$ VU değil
5. Düzlemdeki oklar kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir VU oluşturur.
6. $P^c[t]$: t değişkenine göre kompleks katsayılı tüm polinomların kümesi olsun. Polinomların toplamı ve bir kompleks sayı ile çarpımına göre bir VU.

1.1.3. Tanım $|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots, |a_n\rangle$ vektörleri lineer bağımsızdır denir, eğer $\alpha_i \in \mathbb{C}$ için

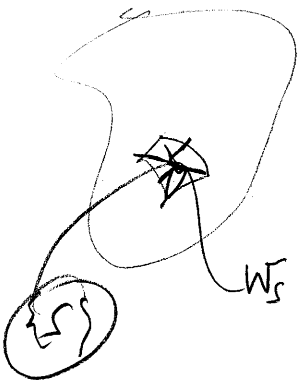
$$\sum_i \alpha_i |a_i\rangle = 0$$

bağıntısı tüm i ler için $\alpha_i = 0$ ise.

toplamına $\{|a_i\rangle\}_{i=1}^{n}$ 'lerin lineer bileşimi denir.

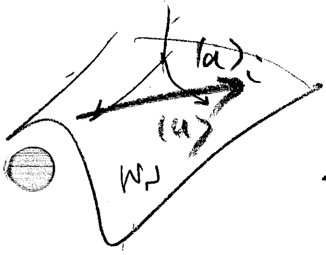
1.1.4. Tanım : Bir vektör uzayının (V), W alt uzayı V'nın boş olmayan alt kümesidir ve şu özelliğe sahiptir: eğer $|a\rangle, |b\rangle \in W$, o zaman tüm $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$'ler için $\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$ de W'ye aittir.

İki alt uzayın kesişimi de bir alt uzaydır.



1.1.5. Teorem: Eğer S, bir V vektör uzayındaki vektörlerin herhangi bir boş olmayan kümesi ise, o zaman S deki vektörlerin tüm lineer birleşimlerinin W_S kümesi, V'nin bir alt uzayıdır. S, W_S'yi gerer, ya da W_S tarafından gerilir deriz, Span{S} ile gösterilir.

1.1.6 Tanım: Bir V vektör uzayının bir bazı, V'nin tümünü geren lineer bağımsız vektörlerin bir B kümesidir. Sonlu bir baza sahip olan bir vektör uzayına sonlu boyutlu, aksi halde ise sonsuz boyutlu denir.



1.1.7. Teorem: Verilen sonlu boyutlu bir vektör uzayının bütün bazları aynı sayıda lineer bağımsız vektörlere sahiptir. Bu sayıya vektör uzayının boyutu denir. N-boyutlu bir vektör uzayı, bazen V_N ile gösterilir. $|a\rangle \in V_N$ ve $B = \{|a_i\rangle\}_{i=1}^N$ bu uzayın bazı ise, tek bir $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\} = \{\alpha_i\}_{i=1}^N$ kümesi vardır, öyleki $|a\rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i |a_i\rangle$. $\{\alpha_i\}_{i=1}^N$ kümesi B bazına göre $|a\rangle$'nın bileşenleri olarak adlandırılır.

1.1.8. Örnek: (•) $\mathbb{R}$, gerçel sayılar üzerinde $\mathbb{C}$'nin alt uzayıdır.

(•) $\mathbb{R}$, kompleks sayılar üzerinde $\mathbb{C}$'nin alt uzayı değildir!

(•) $\mathcal{P}_n^c[t]$, $\mathcal{P}^c[t]$'nin alt uzayıdır. (t ye göre tüm kompleks katsayılı pol.un kümesi)

(kompleks katsayılı t nin tüm polinomları uzayı.)

BS K

1.1.9. Örnek : (•) $\mathbb{R}$ için, 1, bazdır. tek boyutlu,

(•) 1 ve i : R üzerinde $\mathbb{C}$ vektör uzayın baz vektörleri (iki boyutlu)

(•) $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ 3 boyutlu

(•) $\mathbb{C}^N$ in bazı

$$\left.\begin{aligned} \hat{e}_1 &= (1, 0, \ldots, 0) \\ \hat{e}_2 &= (0, 1, \ldots, 0) \\ \hat{e}_N &= (0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}\right\} N \text{ boyutlu.}$$

1.2. İç Çarpım :

Düzlem ya da uzaydaki vektörleri alalım:

$$g : V \times V \to \mathbb{R} \qquad g(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$g(\vec{a}, \vec{b}) = g(\vec{b}, \vec{a}) \quad \text{simetrik,}$$

1. değişkende lineer simetri ile 2. de lineer / (her ikisinde de ... olsa iki bilineer olacaktı.)

$$g(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \vec{c}) = \alpha\, g(\vec{a}, \vec{c}) + \beta\, g(\vec{b}, \vec{c})$$

vektörün boyu: $|\vec{a}|^2 = g(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$

$$g(\vec{a}, \vec{a}) = 0 \iff \vec{a} = \vec{0} \text{ ise.}$$

bunu vektör uzaylarına genellemek istiyoruz.

$$g(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle, |c\rangle) = \alpha^* g(|a\rangle, |c\rangle) + \beta^* g(|b\rangle, |c\rangle)$$

$$g(|a\rangle, |b\rangle) = g(|b\rangle, |a\rangle)^*$$

$$g(|a\rangle, |b\rangle) \longrightarrow \langle a|b\rangle$$

gibi kompleks eşlenik konmasıyla

1.2.1. Tanım: bir V vektör uzayındaki $|a\rangle$ ve $|b\rangle$ vektörlerinin iç çarpımı bir kompleks sayıdır.

$\langle a|b\rangle \in \mathbb{C}$ öyleki,

1. $\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^*$
2. $\langle a|\left(\beta|b\rangle + \gamma|c\rangle\right) = \beta\langle a|b\rangle + \gamma\langle a|c\rangle$
3. $\langle a|a\rangle \geq 0$ ve $\langle a|a\rangle = 0$ iff $|a\rangle = |0\rangle$ ("iç çarpımın pozitif definitlik özelliği")

pozitif def. $\Rightarrow$ Riemannian çarpım olarak da adlandırılır.

- yoksa psödo-Rim. iç çarpım olarak adlandırılır.

iç çarpım bilineer değil, sesquilineer'dir.

V üzerinde iç çarpım tanımlanan bir vektör uzayı $\boxed{\text{iç çarpım uzayı}}$ olarak adlandırılır.

- $\langle \beta b + \gamma c|a\rangle = \beta^*\langle b|a\rangle + \gamma^*\langle c|a\rangle$

1.2.3. Örnek. (i) $|a\rangle, |b\rangle \in \mathbb{C}^n$ $\quad |a\rangle = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$|b\rangle = (\beta_1, \dots, \beta_n)$

$$\langle a|b\rangle = \alpha_1^*\beta_1 + \alpha_2^*\beta_2 + \dots + \alpha_n^*\beta_n = \sum_i \alpha_i^*\beta_i$$

$$|b\rangle = |a\rangle \Rightarrow \langle a|a\rangle = |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2 \geq 0$$

(ii) $|a\rangle, |b\rangle \in \mathbb{R}^n$ kompleks eşlenik olmadan Öklid'deki aynı.

(iii) $f, g \in \mathbb{C}(a,b)$ aralığında. $\quad \langle f, g\rangle = \int_a^b w(x)\, f^*(x)\, g(x)\, dx$

BS K

1.2.1. Diklik :

1.2.4. Tanım : $|a\rangle, |b\rangle \in V$ vektörleri $\langle a|b\rangle = 0$ ile diktirler denir. Bir normal vektör (ya da normalize) $\langle e|e\rangle = 1$ olan vektördür.

N-boyutlu bir vektör uzayındaki $B = \{|e_i\rangle\}_{i=1}^{N}$ bazı,

$$\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases} \Rightarrow$$ ortonormal bazdır denir.

1.2.5. Örnek : (i) $\mathbb{R}^n$ $\quad |e_1\rangle = (1,0,\ldots,0), \ldots$

$|e_n\rangle = (0,0,\ldots,1)$.

(ii) $|e_k\rangle = e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$, $\mathbb{C}[0,2\pi)$ içerisinde $w(x)$ ağırlıklı fonksiyonlar kümesi olsun. O zaman,

$$\langle e_k|e_k\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx\, e^{-ikx} e^{ikx} = 1.$$

$l \neq k$ $\quad \langle e_l|e_k\rangle = 0 \qquad \langle e_l|e_k\rangle = \delta_{lk}$

1.2.2 Gram_Schmidt Süreci

V deki bir bazı, ortonormal baza çevirmek olanaklıdır. G-S ortonormalleştirmenidir.

V

$B = \{|a_1\rangle, |a_2\rangle, \ldots, |a_N\rangle\}$ bazını alalım.

BS K

$$|e_1\rangle = |a_1\rangle / \sqrt{\langle a_1|a_1\rangle}$$

$|a_2\rangle$ den $|a_2\rangle$'nın $|e_1\rangle$ boyunca olan izdüşümünü çıkartıyor

$$|e_2'\rangle = |a_2\rangle - \underbrace{\langle e_1|a_2\rangle|e_1\rangle}$$ olsun.

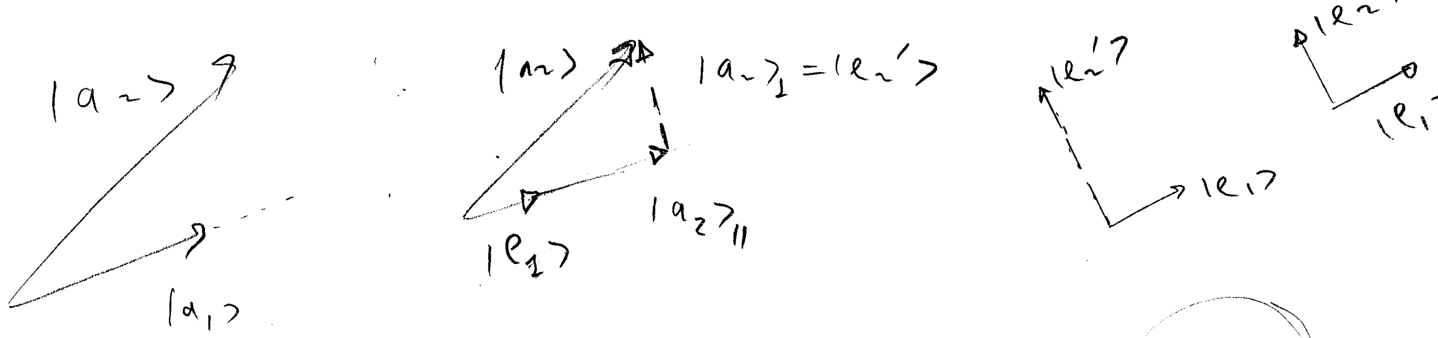
$$|e_2\rangle = |e_2'\rangle / \sqrt{\langle e_2'|e_2'\rangle}$$

$$|e_3'\rangle = |a_3\rangle - \sum_{i=1}^{2} |e_i\rangle\langle e_i|a_3\rangle$$

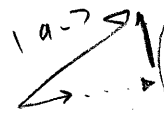
$\vdots$

$$|e_{m+1}'\rangle = |a_{m+1}\rangle - \sum_{i}^{m} |e_i\rangle\langle e_i|a_{m+1}\rangle$$

$$|e_{m+1}\rangle = \frac{|e_{m+1}'\rangle}{\sqrt{\langle e_{m+1}'|e_{m+1}'\rangle}}$$



$\langle e_1|e_1\rangle = 1$



$|e_2'\rangle = |a_2\rangle - |a_2\rangle_\parallel$ $\qquad \langle e_1|a_2\rangle|e_1\rangle$

1.2.3. Schwartz eşitsizliği :

1.2.6. Teorem : Bir V iç çarpım uzayında, $|a\rangle, |b\rangle$ vektör çifti için $\langle a|a\rangle\langle b|b\rangle \geq |\langle a|b\rangle|^2$ Schwartz eşitsizliği geçerlidir.

$|a\rangle$ $|b\rangle$ ye orantılı ise eşitlik geçerlidir.

BS K

İSPAT:

$|c\rangle = |b\rangle - \frac{\langle a|b\rangle}{\langle a|a\rangle}|a\rangle$ olsun. $\langle a|c\rangle = 0$ ✓

$|b\rangle = \frac{\langle a|b\rangle}{\langle a|a\rangle}|a\rangle + |c\rangle$ olur.

$\langle b|b\rangle = \left|\frac{\langle a|b\rangle}{\langle a|a\rangle}\right|^2 \langle a|a\rangle + \langle c|c\rangle$ daima pozitif.

$\langle b|b\rangle \geq \frac{|\langle a|b\rangle|^2}{\langle a|a\rangle} \Rightarrow \langle a|a\rangle\langle b|b\rangle \geq |\langle a|b\rangle|^2$

1.2.4. Bir vektörün boyu

1.2.7. Tanım: İç çarpım uzayındaki bir $|a\rangle$ vektörünün boyu ya da normu $\|a\|$ ile gösterilir ve $\|a\| \equiv \sqrt{\langle a|a\rangle}$ ile tanımlanır. $\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$ vektörünün normu için $\|\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle\| \to \|\alpha a + \beta b\|$ notasyonunu kullanacağız. Özellikler

(i) $\|0\| = 0$

(ii) $\|a\| \geq 0$ $\quad \|a\| = 0$ iff $|a\rangle = |0\rangle$

(iii) $\|\alpha a\| = |\alpha| \, \|a\|$ $\quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$

(iv) $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$ üçgen eşitsizliği.

V — Üzerinde norm tanımlanmış bir vektör uzayına normlanmış V.U. denir

$|a\rangle$ ve $|b\rangle$ vektörleri arasındaki mesafe $d(a,b) \equiv \|a-b\|$

İç çarpım uzayları genellikle otomatik olarak normlanmıştır. Ancak, tersi normlu değildir. (Genelde!)

Özet 12/02010

$(g: V \times V \to \mathbb{R}, \mathbb{C}, V)$

iç çarpım tanımlanmış bir VU

1) $\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle$

2) $\langle a|a\rangle \geq 0$

3) $\langle a|(\alpha|b\rangle + \beta|c\rangle) = \alpha\langle a|b\rangle + \beta\langle a|c\rangle$

$\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$ Diklik. → Gram–Schmidt

Schwartz eşitsizliği $\langle a|a\rangle \langle b|b\rangle \geq |\langle a|b\rangle|^2$

$\|a\| = \sqrt{\langle a|a\rangle}$ bir vekt. boyu, norm.

$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$ paralelkenar yasası.

BS K

Eğer norm paralelkenar yasasını sağlar ise,

$$\boxed{\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2}$$

o zaman,

$$\langle a|b\rangle \equiv \frac{1}{4}\left\{ \|a+b\|^2 - \|a-b\|^2 - i\left(\|a+ib\|^2 - \|a-ib\|^2\right)\right.$$

tanımlanır ve bunun bir iç çarpım olduğu gösterilir.

1.2.8. Teorem: Normlanmış bir lineer uzay (SUS) norm paralel kenar yasasını sağlar ise iç çarpım uzayıdır.

~~N boyutlu V'yi alalım.~~ $\{|a_i\rangle\}_{i=1}^N$ bazını seçelim ve bu bazda bir $|a\rangle$ vektörünün bileşenleri $\{\alpha_i\}_{i=1}^N$ olsun;

buna göre,

$$\|a\|^2 \equiv \sum_{i=1}^N |\alpha_i|^2$$

tanımlayalım. Gösterilebilir ki bu bir norm tanımlar ve bu norm paralel kenar yasasını sağlar.

1.2.9 Teorem: Her sonlu boyutlu vektör uzayı, bir iç çarpım uzayına dönüştürülebilir.

1.2.10 Örnek:

$\mathbb{C}^n$: $|a\rangle = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$|b\rangle = (\beta_1, \dots, \beta_n)$

BS K

1°)

norm: $\|a\| = \sqrt{\langle a|a\rangle} = \sqrt{\sum_i^n |\alpha_i|^2}$

bu norm $|a\rangle$ ve $|b\rangle$ arasındaki mesafeyi

$$d(a,b) = \|a-b\| = \sqrt{\langle a-b|a-b\rangle} = \sqrt{\sum_i^n |\alpha_i - \beta_i|^2}$$

olarak verir. Diğer normlarda tanımlanabilir, örneğin

2°) $\|a\|_1 = \sum_i^n |\alpha_i|$

buna göre mesafe,

3°) $d_1(a,b) = \|a-b\|_1 = \sum_i^n |\alpha_i - \beta_i|$

başka bir norm ;

$$\|a\|_p \equiv \left(\sum_i^n |\alpha_i|^p\right)^{1/p} \quad p: \text{poz. tamsayı.}$$

$$d_p(a,b) = \|a-b\|_p = \left(\sum |\alpha_i - \beta_i|^p\right)^{1/p}$$

1.3. Linear Dönüşümler

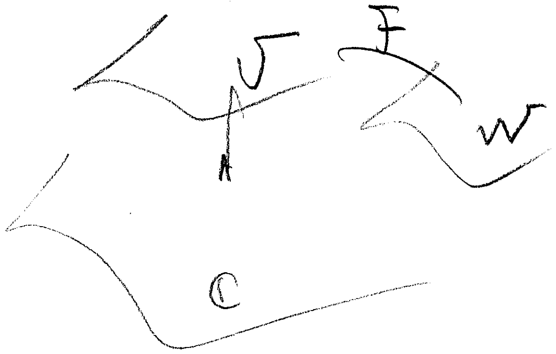
1.3.1. Gönderim örnekleri

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$

2. $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$

3. $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $F(x,y) = \underbrace{U(x,y) + i\,V(x,y)}_{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}}$

⋮



$\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı vektör uzayları olsun.

$F : V \to W$ tanımlayalım öyleki

$|a\rangle, |b\rangle \in V$ ve $|x\rangle, |y\rangle \in W$ için

$$F(|a\rangle) = |x\rangle \qquad F(|b\rangle) = |y\rangle$$

Genelde F vektör uzayı yapısını korumaz. Yani

$$F(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle) \neq \alpha|x\rangle + \beta|y\rangle$$

bu durum yukarıdaki örneklerde (4. hariç) böyledir.

3.2. <u>Tanım:</u> V'den W'ye bir <u>lineer dönüşüm</u>

$T : V \to W$ gönderimidir, öyleki

$$T(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle) = \alpha T(|a\rangle) + \beta T(|b\rangle) \quad \begin{cases} \forall\, |a\rangle, |b\rangle \in V \\ \text{ve } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \end{cases}$$

$T : V \to V$ lineer dön. + V'nin bir <u>endomorfizmi</u> ya da V üzerinde bir <u>lineer operatör olarak</u> adlandırılır

$$T(|a\rangle) = T|a\rangle \quad \text{parantezsiz yazılım}$$

BS K

$T : V \to W$ ve $U : V \to W$ iki lineer dönüşümü eşittir (SVS) $T|a_i\rangle = U|a_i\rangle$ V'nin bazı bazındaki tüm $|a_i\rangle$'ler için. Böylece, bir lineer dön. bölge uzayın bazına etkisiyle tek olarak belirlenir

W, $\mathbb{C}$ ya da $\mathbb{R}$ olduğunda, bu lineer dön. fonksiyonel olarak adlandırılır (Neden!)

V den W ya lineer dönüşümler kümesi $\mathcal{L}(V, W)$ ile gösterilsin; bu küme bir vektör uzaydır: Sıfır dönüşüm O, V deki her vektörü W nın sıfır elemanına götürür. İki T ve U lineer dön. nün toplamı $T+U$ lineer dön. dür. $|a\rangle \in V$ ye etkisi:

$$(T+U)|a\rangle \equiv T|a\rangle + U|a\rangle$$

$$(\alpha T)|a\rangle \equiv \alpha\,(T|a\rangle) = \alpha T|a\rangle$$

V nin endomorfizmlerinin kümesi $\mathcal{L}(V)$ ile gösterilir.

$\mathcal{L}(V, \mathbb{C})$ (ya da $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$) lineer fonksiyonların kümesi V^* ile gösterilir ve V'nin dual uzayı olarak adlandırılır.

BS K

1.3.4. Örnek lineer op.ler

(1) $\{|a_i\rangle\}_{i=1}^{n}$ V deki keyfi sonlu vekt. kümesi, $\{f_i\}_i^n$ keyfi fonk.lar kümesi olsun

$$A = \sum_k^n |a_k\rangle f_k \in \mathcal{L}(V)$$

$$A|x\rangle = \sum_k |a_k\rangle f_k(|x\rangle) = \sum f_k(|x\rangle)|a_k\rangle$$

ile tanımlansın. O zaman A, V üzerinde bir lineer op.dür.

(2) π, $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ den sayıları sıralayan permütasyon olsun. Eğer, $|x\rangle = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, $\mathbb{C}^n$ içinde bir vektör ise,

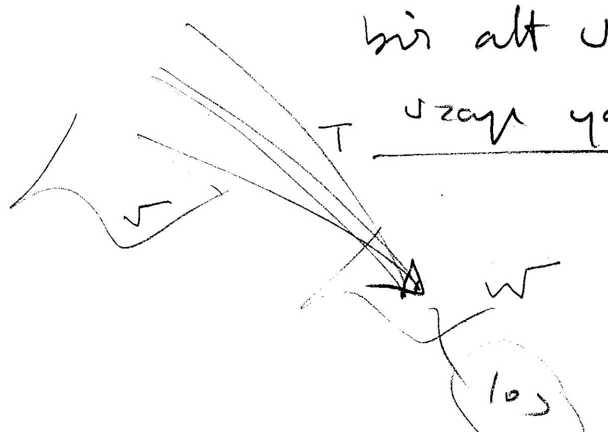
$$A_\pi |x\rangle = (\eta_{\pi(1)}, \eta_{\pi(2)}, \ldots, \eta_{\pi(n)})$$

yazabiliriz. LO

1.3.5. Teorem:

W nin sıfır vektörüne gönderilen V deki vektörlerin kümesi $(T: V \to W)$, V nin bir alt uzayını oluşturur ve T nin sıfır uzayı ya da çekirdeği denir.

null uzay



İspat: $|a\rangle, |b\rangle \in V$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$T|a\rangle = 0 \quad T|b\rangle = 0 \quad |a\rangle, |b\rangle \in \ker T$

$$T(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle) = \alpha(T|a\rangle) + \beta(T|b\rangle) = 0 + 0 \in \ker T$$

BS K

1.3.6. **Teorem:** Bir $T: V \to W$ LD nün $T(V)$ değer kümesi, W nın alt uzayıdır. $\dim T(V) = \operatorname{rank} T$.

1.3.7. **Teorem:** Bir LD 1-1 (injektiftir) SVS çekirdeği sıfır ise.

İSPAT: SVS kısmı kolay!

$T|a_1\rangle = T|a_2\rangle$ olsun; o zaman T nin lineerliği

$\Rightarrow T(|a_1\rangle - |a_2\rangle) = 0$ $\ker T = 0$ olduğundan $|a_1\rangle = |a_2\rangle$ dır.

1.3.8. **Teorem:** $T: V \to W$ bir LD olsun. O zaman,

$\dim V = \dim \ker T + \dim T(V)$ olur. (boyut teoremi). (bu teoremin sonuçlarından biri injektif bir endomorfizm otomatik olarak surjektiftir ya da tersi.

1.3.9. **Öneri:** Sonlu boyutlu bir vektör uzayının bir endomorfizmi bijektiftir eğer bu ya injektif ya da surjektif ise

1.3.10. **Örnek:** $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2 + x_3 - x_4,\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4,\ x_1 - x_3 - 3x_4)$$

bunun kernel'ini bulalım.

$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,0,0)$ olacak şekilde;

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 - x_3 - 3x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= x_3 + 3x_4 \\ x_2 &= -3x_3 - 5x_4 \end{aligned}$$

Böylelikle, ker T içerisinde olacak, bir ($\mathbb{R}^4$'ün)

vektör,

$$(x_3+3x_4,\ -3x_3-5x_4,\ x_3,\ x_4) = x_3(1,-3,1,0) + x_4(3,-5,0,1)$$

biçiminde olmalıdır. (keyfi reel sayılar.)

sonuç olarak ker T iki ~~lineer~~ sapımın vekt ün lineer bileşimi. dim ker T = 2 ⇒ Teorem 1.3.8 → $T(V)=2$ yani T 'nin değer kümesi 2-boyutludur.

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (2x_1+x_2+x_3-x_4)(1,0,1) + (x_1+x_2+2x_3+2x_4)(0,1,-1)$$

ve bu yüzden $T(x_1,x_2,x_3,x_4)$ sadece 2 sapımın vektörün bir lineer birleşimidir.

1.3.11. **Tanım**: Eğer $T: V \to W$ şeklinde bijektif bir dön. mevcut ise V W ya izomorftur denir, T → izomorfizmdir. V nin kendi üstüne bijektif gönderim otomorfizm olarak adlandırılır.

V 'nin otomorfizmlerin kümesi $GL(V)$ ile gösterilir.

1.3.12. **Teorem**: lineer bir surjektif gönderim $T: V \to W$, bir izomorfizm'dir ancak ve ancak (svs) nullity si sıfır ise.

İSPAT: svs kısmını, nullity = 0 olsun 1.3.7 teoreminden T, 1-1 dir. surjektif olduğundan 1-1 olmalıdır. □

1.3.13. **Teorem:** Bir $T: V \to W$ izomorfizmi, lineer bağımsız vektörler kümesini lineer bağımsız vektörler kümesine taşır.

İSPAT:

$\{|a_i\rangle\}_{i=1}^{n}$ lineer bağ. vekt. kümesi (V üzerinde) olsun.

$\{T|a_i\rangle\}_{i=1}^{n}$ in W da lineer bağımsız olduğunu göstermek için, varsayalım ki

$\sum_i^m \alpha_i T|a_i\rangle = |0\rangle$ olacak şekilde, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ ler mevcut olsun. O zaman T nin lineerliğinden ve teorem 1.3.12 den

$$T\left(\sum^m \alpha_i |a_i\rangle\right) = |0\rangle \text{ ya da } \sum \alpha_i |a_i\rangle = 0$$

ve $|a_i\rangle$ nin lineer bağımsızlığı $\Rightarrow$ bütün i ler için $\alpha_i = 0$ olur.

$\therefore$ $\{T|a_i\rangle\}_{i=1}^{n}$ lineer bağ. olmalıdır.

$\blacksquare$

1.3.14. **Teorem:** İki sonlu vektör uzayı izomorfiktir <u>SVS</u> ikisi aynı boyuta sahipse.

İSPAT: $B_V = \{|a_i\rangle\}_i^N$ — V de baz

$B_W = \{|b_i\rangle\}_{i=1}^{N}$ W içinde bir baz olsun.

$T|a_i\rangle = |b_i\rangle \quad i = 1, 2, \ldots, N$ tanımlayalım.

İspatın geri kalanı T nin izomorfizmi olduğunu göstermektir (göster!)

<u>Bu teoremin sonuçlar</u>: $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^N$
$\mathbb{C} \sim \mathbb{C}^N$ ve izomorftur.

BS K

1.3.1. Lineer Fonksiyoneller

Bir vektör uzayı ile onun duali arasındaki izomorfizme bakalım. N-boyutlu bir vekt. uzayı ve $B = \{|a_i\rangle\}_{i=1}^{N}$ bazını ele alalım. Verilen herhangi bir N skaler kümesi $\{\alpha_i\}_{i=1}^{N}$ için

$$f_\alpha|b\rangle = f_\alpha\left(\sum_{i=1}^{N} \beta_i |a_i\rangle\right) = \sum \beta_i f_\alpha|a_i\rangle = \sum_i \beta_i \alpha_i$$

$|b\rangle$

bu bize şunu söyler:

$f_\alpha|a_i\rangle = \alpha_i$ LF

$$|b\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix} \qquad f_\alpha \longleftrightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$$

$f_\alpha|b\rangle \rightarrow$ matris çarpımı.

f_α, $\{\alpha_i\}$ kümesi ile tek olarak belirlenir. Diğer bir deyimle, her N skaler kümesine karşılık gelen tek bir fonksiyonel vardır. Bu bizi, $\{1,0,\dots,0\}, \{0,1,\dots,0\}, \dots, \{0,0,\dots,1\}$ skalerler kümesine karşılık gelen $f_1, \dots f_N$ özel fonksiyonelleri kümesine götürür. Bu demektir ki,

$f_1|a_1\rangle = 1$ ve $j \neq 1$ için $f_1|a_j\rangle = 0$

$f_2|a_2\rangle = 1$ ve $j \neq 2$ " $f_2|a_j\rangle = 0$

$\vdots$

$f_N|a_N\rangle = 1$ ve $j \neq N$ " $f_N|a_j\rangle = 0$

YA DA

$$f_i|a_j\rangle = \delta_{ij}$$

nın fonksiyonelleri, V^* dual uzayın bir bazını oluşturur

Bunu görmek için, keyfi bir $g \in V^*$ alalım.

$$g|a_i\rangle = \gamma_i \in \mathbb{C}$$

O zaman, $g = \sum_i^N \gamma_i f_i$ diyebiliriz. Gerçekten V içerisinde $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ bileşenli $B = \{|a_1\rangle, \ldots, |a_N\rangle\}$ bazına göre keyfi bir $|a\rangle$ alalım. O zaman,

$$g|a\rangle = g\Big(\underbrace{\sum^N \alpha_i |a_i\rangle}_{|a\rangle}\Big) = \sum_i \alpha_i\, g|a_i\rangle = \sum_i \alpha_i \gamma_i$$

$$\underbrace{\Big(\sum_i \gamma_i f_i\Big)}_{g}|a\rangle = \Big(\sum_i^N \gamma_i f_i\Big)\Big(\sum_j^N \alpha_j |a_j\rangle\Big)$$

$$= \sum_i \gamma_i \sum_j \alpha_j f_i |a_j\rangle = \sum_i \gamma_i \sum_j \alpha_j \delta_{ij}$$

$$= \sum_i \gamma_i \alpha_i$$

Sonuç: $g = \sum_i \gamma_i f_i$, yani $\{f_i\}^N$, V^* uzayını geçer. Sonuç bir teoremdir.

Teorem 1.3.15 Eğer V, bazı $B = \{|a_i\rangle\}^N$ olan N-boyutlu bir vektör uzayı ise, V^* içerisinde $f_i|a_j\rangle = \delta_{ij}$ özelliğinde olan tek bir $B^* = \{f_i\}^N$ karşılık gelen baz vardır.

B nin dual bazı olarak adlandırılır.

Bu teoreme göre, (i) N-boy.lu bir VU'ın duali N-boy.lu dur ve ona izomorftur. (ii) V deki her vektöre V^* da tek bir lineer fonksiyonel karşılık gelir. $\forall\, |a\rangle$ vektörü, B bazında $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ bileşenleri ile tek olarak belirlenir. $|a\rangle$ ya karşılık gelen f_a lineer fonksiyoneli basitçe $\sum_i \alpha_i f_i \in B^*$ dır.

BS K

1.3.16. Tanım: $|a\rangle \in V$ nın bir yokedicisi $f|a\rangle = 0$ olacak şekilde bir $f \in V^*$ lineer fonksiyonelidir.

W, V nin bir altuzayı olsun. W daki tüm vektörleri sıfırlayan V^* daki lineer fonksiyoneller kümesi W° ile gösterilir.

W°, V^* nin bir alt uzayıdır (sal). Dahası W nın $\{|a_i\rangle\}_i$ bazına genişletirsek, şunu gösterebiliriz: B ye dual $B^* = \{f_i\}_i^n$ bazından seçilmiş $\{f_i\}_{i=k+1}^n$ fonksiyonelleri W° yı gerer. O zaman sonuç

$$\dim V = \dim W + \dim W^\circ$$

1.3.17. Tanım: $T : V \to U$ LD olsun.

$$T^* : U^* \to V^*,$$

$$[T^*(g)]|a\rangle = g(T|a\rangle) \quad \forall a \in V,\ g \in U^*$$

T^*, T nin duali ya da (pull back i)

$T^* \in \mathcal{L}(U^*, V^*)$ yani T^* bir lineer operatördür (V^* üzerinde)

baz gönderim özellikleri T dekilere bağlıdır.

~~1.3.18. Örnek: T bir LD, T^* onun duali olsun. O zaman~~

~~$\ker T^* = T(V)^\circ$~~

Bunu görmek için T^* ın çekirdeğini alalım.

BS K

Açıkça, g, T^* ın çekirdeği içerisindeki SVS g, $T|a\rangle$ biçimindeki tüm vektörleri sıfırlar, yani, $T(V)$ deki tüm vektörleri. Sonuçta g, $T(V)^\circ$ içerisindedir. Özellikle T surjektif ise $T(V) = U$, ve g U daki tüm vektörleri sıfırlar, yani sıfır lineer fonksiyoneldir.

Sonuç; $\ker T^* = 0$ ve bu nedenle T^* injektiftir. Benzer şekilde, T injektif $\Rightarrow$ T^* surjektiftir. Bunun özeti şudur:

1.3.18 Öneri: T, bir LD, T^* onun duali olsun. O zaman $\ker T^* = T(V)^\circ$ dır. Eğer T, surjektif (injektif) ise T^* injektif (surjektif) dir. Özellikle T izomorfizm ise T^* da böyledir.

<u>iç çarpım ile lineer fonksiyonel arasındaki bağlantı</u>: $\{|a_i\rangle\}_i^n$ bazını alalım. $\alpha_i := \langle a|a_i\rangle$ olsun. $\{\alpha_i\}_i^n$ skalerler kümesi $f_a|a_i\rangle = \alpha_i$ olacak şekilde tek bir lineer fonksiyonel f_a tanımlar. $\alpha_i = \langle a|a_i\rangle$ olduğundan f_a, $\langle a|$ ile özdeştir.

$$T : f_a \longmapsto \langle a|$$

yazarız. Burada T özdeşleşme gönderimidir. Notasyon:

$$(|a\rangle)^\dagger \equiv \langle a|$$

T işlemi, vektörlerin lineer birleşimi üzerine nasıl etkir?

BS K

$|c\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$ 'yi keyfi $|x\rangle$ ile çarp.

$$\langle x|c\rangle = \alpha\langle x|a\rangle + \beta\langle x|b\rangle$$

$$(\text{LHS})^* = \langle x|c\rangle^* = \langle c|x\rangle$$

$$(\text{RHS})^* = \alpha^*\langle x|a\rangle^* + \beta^*\langle x|b\rangle^*$$

$$= \alpha^*\langle a|x\rangle + \beta^*\langle b|x\rangle$$

$$= (\alpha^*\langle a| + \beta^*\langle b|)|x\rangle$$

$$(|c\rangle)^\dagger = \langle c| = \alpha^*\langle a| + \beta^*\langle b|$$

$$(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle)^\dagger = \alpha^*\langle a| + \beta^*\langle b|$$

$f_a \leftrightarrow \langle a|$ lineer değil ($|a\rangle \leftrightarrow f_a$ lineer bir eşleme)

ama sesquilineer (iki doğrusal). T gönderimi de söylenir.

$$T(\alpha f_a + \beta f_b) = \alpha^*\langle a| + \beta^*\langle b|$$

$$= \alpha^* T(f_a) + \beta^* T(f_b)$$

<u>Temsil</u>: $|a\rangle \in \mathbb{C}^n$

$|a\rangle = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}$ olarak seçmek uygundur.

$$\langle a| = (\alpha_1^*\ \alpha_2^* \dots \alpha_n^*)$$

$$\langle a|b\rangle = (\quad)\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = \sum \alpha_i^*\beta_i$$

BS K

1.4. Cebir

1.4.1 Tanım: $\mathbb{C}$ (ya da $\mathbb{R}$) üzerindeki bir A cebri, çarpım olarak adlandırılan $\mu : V \times V \to V$ ikili işlemi ile birlikte $\mathbb{C}$ (ya da $\mathbb{R}$) üzerindeki bir vektör uzaydır; bu çarpma işlemi

$$\left.\begin{array}{l}\forall\, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in A \\ \forall\, \beta, \gamma \in \mathbb{C}(\mathbb{R})\end{array}\right) \text{ için } \quad \vec{a}(\alpha \vec{b} + \gamma \vec{c}) = \beta\, \vec{a}\vec{b} + \gamma\, \vec{a}\vec{c}$$

Dirac (bra-ket)

(sağdan çarpma için de benzer bir ifade)

<u>vektör uzayın boyutu</u>, <u>cebirin boyutu</u> olarak adlandırılırlar. Bu cebir,

$\bar{a}(\bar{b}\bar{c}) = (\bar{a}\bar{b})\bar{c}$ sağlanırsa assosyatif

$\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$ " komütatif 'dir denir.

$1\bar{a} = \bar{a}1 = \bar{a}$ sağlayan cebire de <u>birimli cebir</u> ".

Birimli cebirin bir $\vec{b}$ elemanı, $\vec{b}.\vec{a} = \mathbf{1} \Rightarrow$ $\bar{a}$'nın sol tersi denir.

1.4.2. <u>Örnek</u>: (i) $\mathbb{R}^2$

$$(y_1, y_2)(x_1, x_2) = (y_1x_1 - y_2x_2, y_1x_2 + y_2x_1)$$

$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \quad \underline{\text{komütatif}}$$

bu durumda $\mathbb{R}^2$ komütatif bir cebirdir

(ii) $\mathbb{R}^3$, $\times$ vekt. çarpımı assosyatif ve komütatif olmayan cebiri oluşturur.

(iii) Matris cebiri assosyatif ancak komütatif değil.

BS K

1.4.3. Tanım: Bir vektör uzayı endomorfizmi $D: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, aşağıdaki özelliğe sahip ise, $\mathcal{A}$ üzerinde türev olarak adlandırılır:

$$D(\bar{a}\bar{b}) = [D(\bar{a})]\bar{b} + \bar{a}[D(\bar{b})]$$

1.4.4. Örnek: $\mathcal{A}$, $n \times n$ matrisler kümesi olsun,

$\bullet$ ile gösterilen ikili işlemi tanımlayalım,

$A \bullet B \equiv AB - BA$ ~ sıradan matris çarpımı.

(A, sabit bir matris olsun)

$D_A(B) = A \bullet B$ lineer dönüşümünü tanımlayalım.

$$D_A(B \bullet C) = A \bullet (B \bullet C) = A(B \bullet C) - (B \bullet C)A$$

$$= A(BC - CB) - (BC - CB)A$$

$$= ABC - ACB - BCA + CBA$$

diğer yandan,

$$(D_A B) \bullet C + B \bullet (D_A C) = ABC + CBA - BCA - ACB$$

D_A : $\mathcal{A}$ üzerinde bir türev.

1.4.5. Tanım. $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ cebri olsun; $T: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ lineer dönüşümü, $T(\bar{a}\bar{b}) = T(\bar{a})T(\bar{b})$ ise T bir cebir homomorfizmi olarak adlandırılır. Bijektif bir cebir homomorfizmine cebir izomorfizmi denir.

1.4.6. Örnek: $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} \to A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & -a_2 \\ -a_1 & 0 & a_3 \\ +a_2 & -a_3 & 0 \end{pmatrix}$ şeklindeki 3×3 matrisler olsun.

BS K

$T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$

$$T(\bar{a}) = T(a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & -a_2 \\ -a_1 & 0 & a_3 \\ a_2 & -a_3 & 0 \end{pmatrix}$$

ile tanımlanan gönderim $\to$ lineer bir izomorfizm'dir.

$\times$ (vekt. çarpımı) $\mathcal{A}$ üzerinde çarpım olsun. $\to$ $\mathcal{A}$ cebiri

$\mathcal{B}$ için Örn. 1.4.4 daki ikili işlemi tanımlayalım. T bir cebir izomorfizmine genişletilir.

Bir $\mathcal{A}$ cebiri ve $B = \{\bar{e}_i\}_1^N$ baz verilmiş olsun.
vekt. uzayı için

$$\text{I} \qquad \bar{e}_i \bar{e}_j = \sum_{k=1}^{N} C_{ij}^{\,k} \bar{e}_k \qquad C_{ij}^{\,k} \in \mathbb{C}$$

yazılabilir. $\mathcal{A}$'nın yapı sabitleridir.

1.4.7. Kutu: V herhangi bir vekt. uzayı, ve (I) denklemi ile çarpımları tanımlanan baz vekt. tanımlayarak N^3 adet $\{C_{ij}^{\,k}\}$ sayılarının hümesini seçerek V'yi bir cebire çevirebiliriz.

1.4.8. Örnek : $n \times n$ matrislerin vekt. uzayını ve $\{\bar{e}_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ standart bazını alalım.

$$\bar{e}_{ij} = \begin{cases} 1 & i,j\text{.nci konumda}, \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$(\bar{e}_{ij})_{lk} = \delta_{il}\,\delta_{jk}$$

BS K

$$(\bar e_{ij}\,\bar e_{kl})_{mn} = \sum_r (\bar e_{ij})_{mr}\,(\bar e_{kl})_{rn}$$

$$= \sum_r \delta_{im}\,\delta_{jr}\,\delta_{kr}\,\delta_{ln}$$

$$= \delta_{im}\,\delta_{jk}\,\delta_{ln} = \delta_{jk}\,(\bar e_{il})_{mn}$$

$$\Rightarrow \quad \bar e_{ij}\,\bar e_{kl} = \delta_{jk}\,\bar e_{il}$$

$C^{mn}_{ij,kl}$ <u>yapı sabitleri</u>.

1.4.9 <u>Örnek</u>: $\{\bar e_i\} \in \mathbb{R}^4$

seç. $\begin{cases} \bar e_1^2 = -\bar e_2^2 = -\bar e_3^2 = -\bar e_4^2 = e_1 \\ \bar e_1 \bar e_i = \bar e_i \bar e_1 = \bar e_i \qquad i = 2,3,4 \text{ için} \\ \bar e_i \bar e_j = \sum_k \epsilon_{ijk}\,\bar e_k \qquad i,j = 2,3,4 \text{ için} \end{cases}$

$\mathbb{R}^4$: associatif, non_komütatif cebir, kuaterniyonların cebri

$\longrightarrow \mathbb{H}$

$\bar e_1 \to 1$; $\bar e_2, \bar e_3, \bar e_4 \to i\,;\,j\,;\,k$ ile gösterilir.

$q = x + iy + jz + kw \qquad q \in \mathbb{H}$

$q^* = x - iy - jz - kw \longrightarrow$ konjugesi

q'nun <u>reel</u> kısmı. q'nun <u>saf</u> kısmı.

1.4.10. <u>Tanım</u>: A bir cebir, A'nın bir B alt uzayı, tüm elemanlarının çarpımını içeriyor ⇒ A'nın bir <u>alt cebri</u> olarak adlandırılır. İlaveten şu özelliğe de sahip ise

tüm $\bar a \in A$ ve $\bar b \in B$ için $\bar a \bar b$ içeriyor ise A'nın sol ideali denir

sağ ideal ve iki yanlı ideal de tanımlanabilir.

BS K

1.4.11. Kural: Birimli bir cebrin hiçbir has ideali özdeşlik elemanı içermez.

Gerçekten de hiçbir has sol (sağ) ideal, sol (sağ) bir tersi olan eleman içermez. Bir ideal'in kendisi has bir (alt) ideal içerebilir. Eğer bir ideal has bir alt ideal içermez ⇒ buna <u>minimal</u> ideal denir.

1.4.12. <u>Örnek</u>. $\mathcal{C}^0(a,b)$: (a,b) aralığında tüm sürekli reel değerli fonk.ların vekt. uzayı

$f, g \in \mathcal{C}^0(a,b)$, f ve g nin tüm $x \in (a,b)$ ler için

$$fg(x) = f(x)g(x)$$ ile tanımlanır.

verilen sbt. bir $c \in (a,b)$ noktasında sıfır olan fonk.lar kümesi $\mathcal{C}^0(a,b)$ içerisinde bir ideal oluşturur. Cebir komütatif olduğundan ideal iki yanlıdır.

Bir $\mathcal{A}$ cebri için, $\bar{x} \in \mathcal{A}$ al,

$$A\vec{x} = \{\bar{a}\vec{x} \mid \bar{a} \in A\}$$

sol ideal. Sağ ideal de benzer...

<u>İki yanlı ideal</u>:

$$\mathcal{A}\bar{x}\mathcal{A} = \{\bar{a}\bar{x}\bar{b} \mid \bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{A}\}$$

$\bar{x}$ tarafından doğurulan idealler olarak adlandırılır.

BS K