2. Operatör Cebri

$T: V \to U$ ve $S: U \to W$

lineer operatörler ise

$S \circ T : V \to W$ de bir lineer operatördür.

Bir cebir tek bir vekt. uzayı gerektirir, bu nedenle $V = U = W$ alırız ve $\mathcal{L}(V, V)$ V'nin endomorfizmlerinin kümesi $\rightarrow$ $\mathcal{L}(V)$ diye kısaltılır.

2.1. $\mathcal{L}(V)$'nin cebri

2.1.1. Tanım: $T, U \in \mathcal{L}(V)$ iki lineer op. eşittir eğer, tüm $|a\rangle \in V$ için $T|a\rangle = U|a\rangle$ ise

T ve U nun lineerliğinden dolayı, şunu elde ederiz.

> 2.1.2. Kutu: iki $T, U \in \mathcal{L}(V)$ endomorfizmi eşittir, eğer tüm $|a_i\rangle \in B$ için $T|a_i\rangle = U|a_i\rangle$ ise burada, B V nin bir bazıdır. Bu nedenle, bir endomorfizm bir bazın vektörleri üzerine etkisi ile tek olarak belirlenir.

2.1.3 Teorem: Bir iç çarpım uzayının T endomorfizmi 0 dır SVS $\langle b|T|a\rangle = \langle b|Ta\rangle = 0$, tersine olarak, eğer $\langle b|T|a\rangle = 0$ tüm $|a\rangle$ ve $|b\rangle$ ler için ise, o zaman $|b\rangle = T|a\rangle = |Ta\rangle$ seçerek, iç çarpımın pozitif definite olmasından $\langle Ta|Ta\rangle = 0 \ \forall a \Leftrightarrow T|a\rangle = 0 \ \forall a \Leftrightarrow T = 0$ elde ederiz.

İspat: Açıkça $T = 0 \Rightarrow \langle b|Ta\rangle = 0$ dır.

BS K

2.1.4. Teorem: İç çarpım uzayı üzerinde T lineer op.'ü 0 dır ancak ve ancak tüm $|a\rangle$ için $\langle a|T|a\rangle = 0$ ise

İspat: Açıkça, $T=0 \Rightarrow \langle a|T|a\rangle = 0$ dır. Tersine olarak bir $\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$ vektörü seç, bu vekt. ve duali arasına T yi sandviç yap ve kutuplanma özdeşliği denen ifadeyi elde etmek için terimleri düzenle:

$$\alpha^* \beta \langle a|T|b\rangle + \alpha\beta^* \langle b|T|a\rangle = \langle \alpha a + \beta b|T|\alpha a + \beta b\rangle$$

$$- |\alpha|^2 \langle a|T|a\rangle - |\beta|^2 \langle b|T|b\rangle$$

bu teoremin varsayımına göre RHS $\to 0$. (:) $\alpha = \beta = 1$ koyarsak,

$\langle a|T|b\rangle + \langle b|T|a\rangle = 0$ elde ederiz. Benzer şekilde $\alpha = 1$ ve $\beta = i$ ile

$i\langle a|T|b\rangle - i\langle b|T|a\rangle = 0$ elde ederiz. Bu iki denklem tüm $|a\rangle$ ve $|b\rangle$ ler için $\langle a|T|b\rangle = 0$ verir.

2.1.3. teoreminden, $T=0$ $\square$

İki U ve T op.'nün eşit olduğunu göstermek için ya bunları keyfi bir vektöre etki ettirir, aynı sonucu verdiğini gösteririz ya da yukarıki teoremler aracılığı ile $U-T$ nin sıfır op. olduğunu gerçekleriz. Özdeş olarak, tüm $|a\rangle, |b\rangle$ için $\langle a|T|b\rangle = \langle a|U|b\rangle$ ya da $\langle a|T|a\rangle = \langle a|U|a\rangle$ olduğunu gösterir. Sıfır elemanı ek olarak, (bütün cebirlerde vardır), $\mathcal{L}(V)$ nin birim 1 elemanı vardır ve tüm $|a\rangle \in V$ için $1|a\rangle = |a\rangle$ bağıntısını sağlar. Elimizdeki 1 ile $T^{-1}T = TT^{-1} = 1$ özelliğini sağlayacak bir T^{-1} op.'nün bulunup bulunamayacağı sorulabilir. Genel olarak, bijektif gönderimlerin tersi vardır. Bu yüzden, sadece bir vekt. uzayının otomorfizmleri terslenebilir.

BS K

2.1.5. Örnek: $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineer op. ü

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3)$$

ile tanımlansın. T terslenir mi, böyle ise tersini bulun.

bijektif $\Leftrightarrow$ tersi vardır. Bu, T nin sürjektif veya injektif $\Leftrightarrow$ böyledir (teor. 1.7.8) injektif olması, $\ker T = \{0\}$ a özdeştir. Ancak, $\ker T$, $T(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$ sağlayan vektörler kümesidir, ya da

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad x_2 + x_3 = 0 \qquad x_3 + x_1 = 0$$

bunların tek çözümü $\boxed{x_1 = x_2 = x_3 = 0}$

$$\ker T = \{0\} \Rightarrow T\text{'nin tersi vardır.}$$

T^{-1} i bulmak için $T^{-1}T = 1$ i (x_1, x_2, x_3) e uygula:

$$(x_1, x_2, x_3) = T^{-1}T(x_1, x_2, x_3) = T^{-1}(x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3)$$

$x_1 + x_2 = x \qquad x_2 + x_3 = y \qquad x_1 + x_3 = z$ koyalım.

$$T^{-1}(x, y, z) = \frac{1}{2}(x - y + z, x + y - z, -x + y + z)$$

$$T^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, -x_1 + x_2 + x_3)$$

2.1.6. teorem: Bir lineer op. ün tersi tektir. T ve S iki terslenebilir operatör ise, TS de terslenebilir ve

$$(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$$

$T: V \to V$ endomorfizmi terslenebilir svs V nin bir bazını başka bir bazına taşır ise.

BS K

2.1.1. Operatörlerin Polinomları

tüm pozitif $m \geq 1$ için, T nin kuvvetlerini $T^m = TT^{m-1} = T^{m-1}T$ olarak tanımlarız. Bunun ($m=1$ için) uyumu $T^0 = 1$ gerektirir. Sonuç olarak,

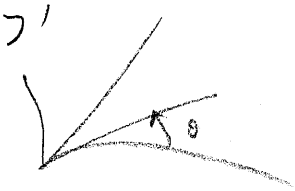
$$p(T) = \alpha_0 1 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \cdots + \alpha_n T^n$$

şeklindeki polinomlar tanımlanabilir.

2.1.7. Örnek: $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, xy-düzleminde vektörleri θ kadar döndüren bir lineer op. olsun:

$$T_\theta(x,y) = (\underbrace{x\cos\theta - y\sin\theta}_{x'}, \underbrace{x\sin\theta + y\cos\theta}_{y'})$$

T_θ nın kuvvetleri



$$T_\theta^2(x,y) = T_\theta(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x_\theta \\ y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= (x'\cos\theta - y'\sin\theta, x'\sin\theta + y'\cos\theta)$$

$$= (x\cos 2\theta - y\sin 2\theta, x\sin 2\theta + y\cos 2\theta)$$

T_θ^2 : (x,y) yi 2θ kadar döndürür.

benzer şekilde

$$T_\theta^n = T_{n\theta}$$

$x\cos^2\theta - y\sin\theta\cos\theta$

$- x\sin^2\theta - y\sin\theta\cos\theta$

$x(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2y\sin\theta\cos\theta$

$x\cos 2\theta - y\sin 2\theta$

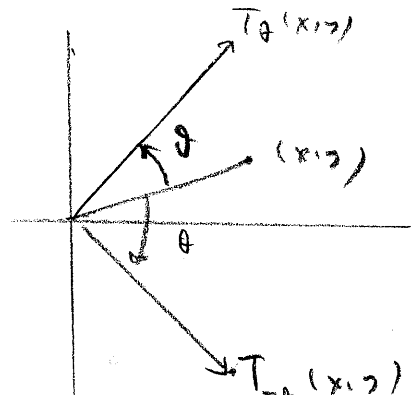
BS K

Terslenebilir bir T lineer op. nün **negatif kuvvetleri**

$$T^{-m} = (T^{-1})^m \text{ ile tanımlanır.}$$

T nin **üsleri**: $T^m T^n = T^{m+n}$

$$(T^m)^n = T^{mn}$$



2.1.8. **Örnek:** T_θ^{-n}'yi hesaplayalım.

$$T_\theta^{-1} T_\theta (x,y) = (x,y)$$

$$T_\theta^{-1} (\underbrace{x\cos\theta - y\sin\theta}_{x'}, \underbrace{x\sin\theta + y\cos\theta}_{y'}) = (x,y)$$

$x' = x\cos\theta - y\sin\theta \ / \cos\theta$

$y' = x\sin\theta + y\cos\theta \ / \sin\theta$

$$T_\theta^{-1} (x', y') = (x'\cos\theta + y'\sin\theta, -x'\sin\theta + y'\cos\theta)$$

$$T_\theta^{-1} = T_{-\theta} \Rightarrow T_\theta^{-n} = (T_\theta^{-1})^n = (T_{-\theta})^n = T_{-n\theta}$$

$$T_\theta^{-n} T_\theta^{n} (x,y) = (x,y)$$

* T terslenebilir olsa bile $p(T)$ değildir. Gerçekten, iki terslenebilir op. ün toplamının terslenmesi gerekmez. **Örn**, T ve $-T$ terslenebilir olmasına rağmen $T + (-T) = 0$ op. ü böyle değildir.

BS K

2.1.2. Operatörlerin Fonksiyonları:

Bir $f(x)$ fonk.nun Taylor açılımı,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \left.\frac{d^k f}{dx^k}\right|_{x_0}$$

x_0: $f(x)$ ve türevlerinin tanımlandığı nokta. Benzer olarak, T op. lerinin bir fonk.u,

$$f(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \left.\frac{d^k f}{dx^k}\right|_{x_0} \frac{(T-x_0)^k}{k!}.$$

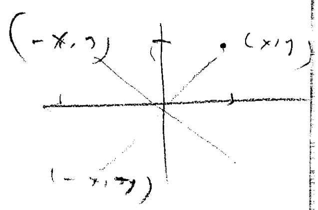
bu seri op. lerin sonsuz toplamıdır ve yakınsaklık problemi çıkabilir.

$f(T)$ daima sonlu boyutlu vekt. uzayları için tanımlanır. Gerçekten, bu daima T nin bir polinomudur. $x_0 = 0$ için

$$f(T) = \sum_0 \left.\frac{d^k f}{dx^k}\right|_0 \frac{T^k}{k!}$$

$$e^T \equiv \exp(T) = \sum_k \frac{T^k}{k!}$$

2.1.9. Örnek: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ op.ü $T(x,y) = (-y,x)$ ile verildiğinde, $\exp(\alpha T)$ yi hesaplayalım.



$T^n(x,y)$ bulalım. $n=2$ ile başla:

$$T^2(x,y) = T(-y,x) = (-x,-y) = -(x,y) = -1(x,y)$$

BS K

$$T^2 = -1$$

$$T^3 = T(T^2) = -T \quad , \quad T^4 = T^2 T^2 = 1$$

$$T^{2n} = (-1)^n 1 \qquad T^{2n+1} = (-1)^n T$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots \qquad\qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$e^{\alpha T} = \sum_{n \,(\text{tek})} \frac{(\alpha T)^n}{n!} + \sum_{n \,\text{çift}} \frac{(\alpha T)^n}{n!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha T)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha T)^{2k}}{(2k)!}$$

$$= \sum_k \frac{(-1)^k \alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} T + \sum \frac{(-1)^k \alpha^{2k}}{(2k)!} 1$$

$$= T \sin\alpha + 1 \cos\alpha$$

$$e^{\alpha T}(x,y) = (\sin\alpha\, T + \cos\alpha\, 1)(x,y)$$

$$= \sin\alpha\, T(x,y) + \cos\alpha\, 1(x,y)$$

$$= \sin\alpha\,(-y,x) + \cos\alpha\,(x,y)$$

$$= (-y\sin\alpha,\ x\sin\alpha) + (x\cos\alpha,\ y\cos\alpha)$$

$$= (\underbrace{-y\sin\alpha + x\cos\alpha,\ x\sin\alpha + y\cos\alpha}_{})$$

xy-düzleminde α açısı kadar dönme.

$e^{\alpha T}$ z-ekseni etrafında α kadar döndürme op.u. T dönmenin jeneratörü

2.1.3. Komütatörler:

İki op.'ün çarpımının sonucu, yazıldıkları sıraya bağlıdır. $T, U \in \mathcal{L}(V)$ ise, $TU \in \mathcal{L}(V)$ ve $UT \in \mathcal{L}(V)$, ancak genel olarak $UT \neq TU$'dur. Bunlara sıra değiştirmeyen denilir.

2.1.10. Tanım: $\mathcal{L}(V)$ deki U ve T op.lerinin $[U,T]$ komütatörü

$$[U,T] \equiv UT - TU$$

olarak tanımlanır.

Bu tanımın sonucu:

2.1.11. Önerme: $S, T, U \in \mathcal{L}(V)$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ise,

$[U,T] = -[T,U]$ anti-sim.

$[\alpha U, \beta T] = \alpha\beta[U,T]$ lineerlik

$[S, T+U] = [S,T] + [S,U]$ sağ-yönde lineerlik

$[S+T, U] = [S,U] + [T,U]$ sol " "

$[ST, U] = S[T,U] + [S,U]T$ sağ-türev özelliği

$[S, TU] = [S,T]U + T[S,U]$ sol " "

$[[S,T],U] + [[U,S],T] + [[T,U],S] = 0$

Jacobi özdeşliği.

BS K

İspat: ispatlar tanımdan çıkar. Sol-türev özelliği,

$$
\begin{aligned}
[S, TU] &= S(TU) - (TU)S \\
&= STU - TUS + TSU - TSU \\
&= (ST - TS)U + T(SU - US) \\
&= [S,T]U + T[S,U]
\end{aligned}
$$

Yararlı bir sonuç: $[A, A^m] = 0 \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ için

Özellikle $[A, 1] = 0$ ve $[A, A^{-1}] = 0$

2.2. Operatör Fonksiyonlarının Türevleri:

Operatörlerin fiziksel niceliklerini temsil etmelerini istersek, ki bunlar dinamiktir, o zaman bunların zamanla değişimine bakmak gerekir.

$$H : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(V)$$

gönderimini ele alalım. ($\mathbb{R}$ deki bir gerçel sayıyı, V üzerindeki bir lineer operatöre götürüyor. $t \in \mathbb{R}$ nin görüntüsünü $H(t)$ ile gösteririz, ve bu V üzerinde etkir. Fiziksel anlamı, t (genelde zaman) değişirken, görüntüsü $H(t)$ de değişir. Bu nedenle farklı t ler için farklı op.lar elde ederiz. Özellikle, $t \neq t'$ için $[H(t), H(t')] \neq 0$.

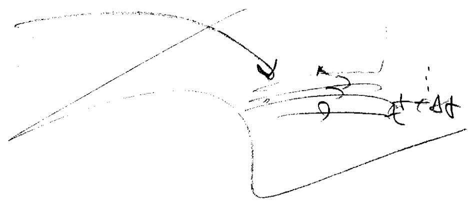
BS K

Somut bir örnek, D ve T lineer op.nın lineer bir bileşimi olsun: $H(t) = D\cos wt + T\sin wt$, $w =$ sbt. Zaman geçtikçe, $H(t)$ kimliğini D den T ye tersi olacak şekilde değiştirir. Zamanın çoğunda melez kimliğe sahiptir. D ve T sıra değiştirmediğinden, $H(t)$ nin farklı zamanlar için değeri genelde olarak sıra değiştirmez.

$e^{H(t)}$ olarak yazılabilen op.ler oldukça ilginçtir. Burada $H(t)$ op.ü basittir; yani, $H(t)$ t ye bağlılığı karşılık gelen $e^{H(t)}$ nin bağlılığından daha basittir. (örn 2.19)

2.2.1. Tanım: $H : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(V)$ gönderimi için, türevi

$$\frac{dH}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{H(t+\Delta t) - H(t)}{\Delta t}$$



olarak tanımlarız. Bu türevde, $\mathcal{L}(V)$ ye aittir. Türev almanın tüm kuralları op.lere de uygulanır.

$$\frac{d}{dt}(UT) = \frac{dU}{dt}T + U\frac{dT}{dt}$$

$$U = T = H \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(H^2) = 2H\frac{dH}{dt}$$

2.2.2. Örnek: H t den bağımsız iken e^{tH} nin türevi?

$$\frac{d}{dt}e^{tH} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{(t+\Delta t)H} - e^{tH}}{\Delta t}$$

BS K

Δt sonsuz küçük;

$$e^{(t+\Delta t)H} - e^{tH} = e^{tH}\underbrace{e^{\Delta t H}} - e^{tH} = e^{tH}(\underbrace{1+\Delta t H}) - e^{tH}$$

$$= e^{tH} H \Delta t$$

$$\frac{d}{dt} e^{tH} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{tH}\cancel{\Delta t} H}{\cancel{\Delta t}} = e^{tH} H$$

$[H, e^{tH}] = 0$ olduğundan, $\frac{d}{dt} e^{tH} = H e^{tH}$ de yazılır.

Daha genel, zamana bağlı olursa;

$$\frac{d}{dt} e^{H(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{H(t+\Delta t)} - e^{H(t)}}{\Delta t}$$

Eğer, $H(t)$'nin türevi varsa, Δt ye göre 1. mertebeden,

$$H(t+\Delta t) = H(t) + \Delta t \frac{dH}{dt}$$

yazarız ve

$$e^{H(t+\Delta t)} = e^{H(t) + \Delta t \frac{dH}{dt}}$$

elde ederiz.

2.2.3. Örnek: $i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$ Schrödinger denk.'ni — zamana bağlı —

bir op. dif. denk.'e dönüştürülebilir.

$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$ ile U evrim op.'u tanımlayalım.

$$i\partial_t U(t)|\psi(0)\rangle = H U(t)|\psi(0)\rangle$$

BS K

$|\psi(0)\rangle$ keyfi bir vektör, H ve t ye bağlı değil.

$$\frac{du}{dt} = H\, U(t)$$ dif. denk. ini alalım.

Bunun çözümünü bulabiliriz (H ve t den bağımsız)

$$\frac{d^2U}{dt^2} = H \frac{du}{dt} = H\,[H\,U(t)] = H^2 U(t)$$

$$\frac{d^3U}{dt^3} = \frac{d}{dt}\,[H^2 U(t)] = H^3 U(t)$$

$$\frac{d^nU}{dt^n} = H^n U(t)$$

$U(t=0)$ iyi tanımlı olsun. O zaman, bu noktada seriye açılabilir,

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^nU}{dt^n}\Big|_0 = \sum_0 \frac{t^n}{n!} H^n U(0)$$

$$= \left(\sum_0 \frac{t^n H^n}{n!}\right) U(0) = e^{tH}\, U(0)$$

Hangi koşullarda, $e^{S+T} = e^S e^T$ yazılabilir?

Sadece, $[T,[S,T]] = 0 = [S,[S,T]]$ için olan durumları inceleyeceğiz.

$$U(t) = e^{tS} e^{tT} e^{-t(S+T)}$$ op. nü alalım ve onu türetelim.

BS K

$$\frac{d}{dt}U = Se^{tS}e^{tT}e^{-t(S+T)} + e^{tS}\cancel{T}e^{tT}e^{-t(S+T)}$$

$$- e^{tS}e^{tT}(S+\cancel{T})e^{-t(S+T)}$$

$$= Se^{tS}e^{tT}e^{-t(S+T)} - e^{tS}e^{tT}Se^{-t(S+T)}$$

Şimdi $[[S,T],S] = [[S,T],T] = 0$

$\Rightarrow [e^{tT}, S] = -t[S,T]e^{tT}$ dır ve bu nedenle (gösterin!)

$$e^{tT}S = Se^{tT} - t[S,T]e^{tT}$$

$$e^{tT}S = Se^{tT} + [e^{tT}, S]$$ yazabiliriz.

ve

$$\frac{d}{dt}U = t[S,T]U(t)$$

olur. Bu denk.in çözümü $U(t) = e^{t^2[S,T]/2}$

$$\Rightarrow \quad e^{tS}e^{tT}e^{-t(S+T)} = e^{t^2[S,T]/2}, \quad U(0)=1$$

2.2.9. Öneri : $S, T \in \mathcal{L}(V)$ olsun. Eğer, $[S,[S,T]] = [T,[S,T]] = 0$ o zaman, BCH formülü geçerlidir.

$$e^{tS}e^{tT}e^{-t^2[S,T]/2} = e^{t(S+T)}$$

Özellikle, $e^{tS}e^{tT} = e^{t(S+T)}$ sus $[S,T]=0$

BS K

t = 1 alınır ise, BCH formülü

$$\boxed{e^{S} e^{T} e^{-[S,T]/2} = e^{S+T}}$$

ye indirgenir.

Varsayalım: $[A(t)$ ve $\frac{dA}{dt}$, $[A, \frac{dA}{dt}]]$ olsun.

$S = A(t)$, $T = \Delta t \frac{dA}{dt}$ alırsak

$$e^{A(t+\Delta t)} = e^{A(t) + \Delta t \frac{dA}{dt}} = e^{A(t)} e^{\Delta t \frac{dA}{dt}} e^{-[A(t), \Delta t \frac{dA}{dt}]/2}$$

elde ederiz. Sonsuz küçük Δt için, bu,

$$e^{A(t+\Delta t)} = e^{A(t)} \left(1 + \Delta t \frac{dA}{dt}\right)\left(1 - \frac{\Delta t}{2}\left[A(t), \frac{dA}{dt}\right]\right)$$

$$= e^{A(t)} \left\{ 1 + \Delta t \frac{dA}{dt} - \frac{1}{2} \Delta t \left[A(t), \frac{dA(t)}{dt}\right] \right\}$$

$$\frac{d}{dt} e^{A(t)} = e^{A} \frac{dA}{dt} - \frac{1}{2} e^{A} \left[A, \frac{dA}{dt}\right].$$

Keza, $e^{A(t+\Delta t)} = e^{A(t) + \Delta t \frac{dA}{dt}} = e^{\Delta t \frac{dA}{dt} + A(t)}$

$$= e^{\Delta t \frac{dA}{dt}} e^{A(t)} e^{-[\Delta t \frac{dA}{dt}, A(t)]/2}$$

bu da

$$\frac{d}{dt} e^{A(t)} = \frac{dA}{dt} e^{A} + \frac{1}{2} e^{A} \left[A, \frac{dA}{dt}\right]$$ verir.

BS K

İki denklemi toplarsak, türev için,

$$\boxed{\frac{d}{dt} e^{H(t)} = \frac{1}{2}\left(\frac{dH}{dt} e^{H} + e^{H} \frac{dH}{dt}\right) = \frac{1}{2}\underbrace{\left\{ \frac{dH}{dt}, e^{H} \right\}}_{\text{antikom.}}}$$

2.2.5 Öneri: $H : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(V)$ olsun ve H ın türevleri $[H, \frac{dH}{dt}]$ ile sıradeğiştirsin. O zaman,

$$\frac{d}{dt} e^{H(t)} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{dH}{dt}, e^{H} \right\} \cdot \left(= \frac{1}{2}\left(\frac{dH}{dt} e^{H} + e^{H} \frac{dH}{dt} \right) \right)$$

Özellikle, $[H, \frac{dH}{dt}] = 0 \Rightarrow$ o zaman,

$$\frac{d}{dt} e^{H(t)} = \frac{dH}{dt} e^{H} = e^{H} \frac{dH}{dt}.$$

$A(AF-FA)-(AF-FA)A$

$[A, AF-FA]$

$A[A,F]+[A,F]A$

$-F[A,A]-[A,F]A$

Sık rastlanan op. $F(t) = e^{tA} B e^{-tA}$ dır. A ve B t den bağımsız, şu görülebilir

$$\frac{dF}{dt} = [A, F(t)] \quad \text{ve} \quad \frac{d}{dt}[A, F(t)] = [A, \frac{dF}{dt}].$$

Bu sonuçları kullanarak,

$$\frac{d^2F}{dt^2} = \frac{d}{dt}[A,F] = [A,[A,F]] = A^2[F(t)]$$

genel olarak, $\frac{d^nF}{dt^n} = A^n[F(t)]$

$$A^n[F(t)] = [A, A^{n-1}[F(t)]] \quad A^0[F(t)] = F(t)$$

BS K

Örn. $A^3[F(t)] = [A, A^2[F(t)]] = [A, [A, A[F(t)]]]$

$$= [A, [A, [A, F(t)]]].$$

F(t) ve türevlerini t=0 da hesaplayarak Taylor açılımında yerleştirir isek, $F(t) = e^{tA} B e^{-tA}$

$$F(t) = \sum_0 \frac{t^n}{n!} \frac{d^n F}{dt^n}\Big| = \sum_0 \frac{t^n}{n!} A^n[F(0)] = \sum \frac{t^n}{n!} A^n[B],$$

yazarız. Yani,

$$e^{tA} B e^{-tA} = \left(\sum_0 \frac{t^n}{n!} A^n\right)[B] = e^{tA}[B]$$

şeklinde yazılır. $t=1$ için

$$e^{A} B e^{-A} = e^{A}[B] = \left(\sum_0 \frac{1}{n!} A^n\right)[B] \equiv B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \dots$$

Eğer $[A,[A,B]] = 0 \Rightarrow e^{tA} B e^{-tA} = B + t[A,B]$

$A \to D \qquad B \to T$

$$e^{tD} T e^{-tD} = T + t[D,T] = T + t\mathbb{1},$$

t kadar ötelendi

e^{tD} T nin t kadar öt. op.ü

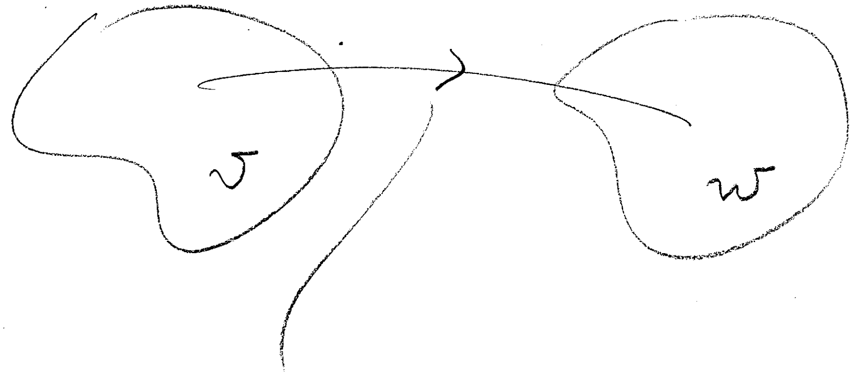
D ötelemenin doğurucusu.

QM de T konum

D mom. op. yapılırsa.

 Mom. QM de ötelemenin doğurucusudur.

Özet: 17a



$T: V \to W$

$T(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle) = \alpha T|a\rangle + \beta T|b\rangle$ LDö.

$T: V \to V$ endomorfizm ya da L Operatör

- $W \equiv \mathbb{C}(\mathbb{R}) \Rightarrow T \to$ L Fonk.
- $\mathcal{L}(V, W)$: LD'lerin kümesi
- $\mathcal{L}(V)$ $(\mathcal{L}(V, V))$ endomorfizmler kümesi
- $\mathcal{L}(V, \mathbb{C}(\mathbb{R}))$ $\boxed{\text{L Fonksiyoneller kümesi}}$

V^* Dual space

$T: V \to W$ bijektif $\Rightarrow$ T izomorfizm

BS K

2.3. Operatörlerin Eşleniği:

$|b\rangle, |c\rangle \in \mathcal{V}$ olsun ve $|c\rangle = T|b\rangle$ varsayalım. Biliyoruz ki $(|b\rangle)^\dagger = \langle b|$ ve $((|c\rangle))^\dagger = \langle c|$ ye eşlik eden, $\mathcal{V}^*$ dual uzayında lineer fonksiyoneller vardır. $\mathcal{L}(\mathcal{V}^*)$ ye ait olan ve T ye karşılık gelen bir op. var mıdır? Diğer bir deyişle, $\langle c| = ? \langle b|$.

2.3.1. Tanım: $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$, $|a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{V}$ olsun. T nin adjoint ya da hermitsel eşlenik op.-ü $T^\dagger$ ile gösterilir ve

$$\langle a|T|b\rangle^* = \langle b|T^\dagger|a\rangle$$

ile tanımlanır. Bunun sol yanı $\langle a|c\rangle^*$ ya da $\langle c|a\rangle$ olarak yazılır. ve

$$\langle c| = \langle b|T^\dagger \Rightarrow (T|b\rangle)^\dagger = \langle b|T^\dagger$$

hermitsel eşleniğin tanımı. $(1^\dagger = 1)$

2.3.2. Teorem: $U, T \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun. O zaman,

1. $(U+T)^\dagger = U^\dagger + T^\dagger$
2. $(UT)^\dagger = T^\dagger U^\dagger$
3. $(\alpha T)^\dagger = \alpha^* T^\dagger$
4. $(T^\dagger)^\dagger = T$ (sonlu boyutlu uzayda geçerli)

BS K

2.3.4. Örnek: $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ op.nün

$$T\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}}_{|a\rangle} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - i\alpha_2 + \alpha_3 \\ i\alpha_1 - \alpha_3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + i\alpha_3 \end{pmatrix}$$

eşleniğini bulalım:

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \qquad |b\rangle = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

Odualleri;

$$\left.\begin{aligned} \langle a| &= (\alpha_1^* \ \alpha_2^* \ \alpha_3^*) \\ \langle b| &= (\beta_1^* \ \beta_2^* \ \beta_3^*) \end{aligned}\right\} \text{olsun.}$$

$$\langle b|T^\dagger|a\rangle = \langle a|T|b\rangle^* = \left[(\alpha_1^* \ \alpha_2^* \ \alpha_3^*)\, T\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \right]^*$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 - i\beta_2 + \beta_3 \\ i\beta_1 - \beta_3 \\ \beta_1 - \beta_2 + i\beta_3 \end{bmatrix}$$

$$= [\alpha_1^*\beta_1 - i\alpha_1^*\beta_2 + \alpha_1^*\beta_3 + i\alpha_2^*\beta_1 - \alpha_2^*\beta_3 + \alpha_3^*\beta_1 - \alpha_3^*\beta_2 + i\alpha_3^*\beta_3]^*$$

$$= \beta_1^*(\alpha_1 - i\alpha_2 + \alpha_3) + \beta_2^*(i\alpha_1 - \alpha_3) + \beta_3^*(\alpha_1 - \alpha_2 - i\alpha_3)$$

$$= \underbrace{(\beta_1^* \ \beta_2^* \ \beta_3^*)}_{\langle b|} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 - i\alpha_2 + \alpha_3 \\ i\alpha_1 - \alpha_3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - i\alpha_3 \end{pmatrix}}_{= T^\dagger |a\rangle}$$

2.4. Hermitsel ve Üniter Operatörler:

2.4.1. Tanım: Bir $H \in \mathcal{L}(V)$ lineer operatörü, hermitsel (ya da self-adjoint) denir, eğer $H^{\dagger} = H$ ise. Benzer şekilde, $A \in \mathcal{L}(V)$, eğer $A^{\dagger} = -A$ ise anti-hermitsel.

2.4.2. Tanım: $|a\rangle$ durumunda bir T op.nün beklenen değeri

$$\langle T \rangle_a = \langle a | T | a \rangle$$

ile tanımlanır. Beklenen değerin kompleks eşleniği,

$$\langle T \rangle_a^* = \langle a | T | a \rangle^* = \langle a | T^{\dagger} | a \rangle$$

olur. T hermitsel $\Rightarrow$ beklenen değer reeldir.

Kompleks sayılar için $z = x + iy \quad 2x = z + z^* \quad 2iy = z - z^*$

Operatörler için benzeri:

$$\underbrace{T}_{\text{herhangi bir op.}} = \frac{1}{2}(T + T^{\dagger}) + \frac{1}{2}(T - T^{\dagger}) \equiv \underbrace{H}_{\text{hermitsel}} + \underbrace{A}_{\text{antihermitsel}}$$

Herhangi bir anti-hermitsel A op.ü $A = i(-iA)$ olarak yazılabilir; $-iA$ hermitsel'dir: $(-iA)^{\dagger} = i(-A) = -iA$

$-iA$ yı H' ile gösterir $\Rightarrow$ $T = H + iH'$ yazarız. Şimdi H ve H' nün her ikisi de hermitseldir. Bu $z = x + iy$ nin benzeridir.

$(TU)^{\dagger} = U^{\dagger} T^{\dagger} = UT \neq TU$

2.4.3. Teorem: Kompleks iç çarpım uzayı üzerinde bir H lineer dönüşümü hermitsel'dir, sadece ve sadece bütün $|a\rangle$'lar için $\langle a|H|a\rangle$ gerçel ise.

İspat: Hermitsel op. için gerçel beklenen değerleri vardır. Tersine olarak, bütün $|a\rangle$'lar için $\langle a|H|a\rangle$ gerçel olsun. O zaman,

$$\langle a|H|a\rangle = \langle a|H|a\rangle^* = \langle a|H^\dagger|a\rangle \Leftrightarrow \langle a|H-H^\dagger|a\rangle = 0 \quad \forall |a\rangle$$

$$H - H^\dagger = 0$$

2.4.4. Örnek:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$ hermitsel ve $\mathbb{C}^2$ üzerinde etkili

(!) (σ_2)

keyfi bir $|a\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ alalım ve $\langle a|H|a\rangle$'yı hesaplayalım.

$$\langle a|H|a\rangle = (\alpha_1^* \ \alpha_2^*)\begin{pmatrix} -i\alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = -i\alpha_1^*\alpha_2 + i\alpha_2^*\alpha_1$$

$$= i\alpha_2^*\alpha_1 + (i\alpha_2^*\alpha_1)^* = 2\,\mathrm{Re}\,(i\alpha_2^*\alpha_1)$$

gerçel'dir. ✓

En genel 2×2 hermitsel matris $H = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \gamma \end{pmatrix}$ için

α ve γ gerçel,

$\langle a|H|a\rangle = \alpha|\alpha_1|^2 + \gamma|\alpha_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\alpha_1^*\beta\alpha_2)$ yani $\langle a|H|a\rangle$ gerçel.

BS K

2.4.5. Tanım: Bir iç çarpım uzayında bir A operatörü pozitiftir denir ($A \geq 0$ yazılır) eğer A hermitsel ve tüm $|a\rangle$ lar için $\langle a|A|a\rangle \geq 0$ ise.

2.4.6. Örnek: hermitsel bir H op.nün karesi H^2 pozitiftir.

$$\langle a|H^2|a\rangle = \langle a|H^\dagger H|a\rangle = \langle Ha|Ha\rangle \geq 0$$

Bir T op.ü $\langle a|T|a\rangle = 0 \Rightarrow |a\rangle = 0$ koşulunu da sağlarsa "pozitif definite" denir.

* İki ve üç boyutlu katı dönmeler, skaler çarpım ve mesafeleri korur. Bu kavram, kompleks iç çarpım uzaylarına genelleştirilebilir mi? $|a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{V}$ ve U, $\mathcal{V}$ üzerinde bir lineer op. olsun, ve skaler çarpımı korusun; yani, $|b'\rangle = U|b\rangle$ ve $|a'\rangle = U|a\rangle$ verilmiş iken, $\langle a'|b'\rangle = \langle a|b\rangle$. Bu şunu verir:

$$\langle a'|b'\rangle = \left(\langle a|U^\dagger\right)\left(U|b\rangle\right) = \langle a|U^\dagger U|b\rangle$$

$$= \langle a|b\rangle = \langle a|1|b\rangle$$

$$U^\dagger U = 1$$

[$U^\dagger U = 1 \Downarrow$ U: izometri olarak adlandırılır ya da izometrik dönüşüm, ek olarak $UU^\dagger = 1 \Rightarrow$ izometri U üniter dönüşüm olarak adlandırılır]

2.4.7. Tanım: $\mathcal{V}$, sonlu boyutlu bir iç çarpım uzayı olsun. Bir U op.ü üniterdir denir, eğer $U^\dagger = U^{-1}$ ise. Üniter op.ler $\mathcal{V}$ nin iç çarpımını korur.

BS K

2.4.8. Örnek : $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$

$$T \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha_1 - i\alpha_2)/\sqrt{2} \\ (\alpha_1 + i\alpha_2 - 2\alpha_3)/\sqrt{6} \\ [\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + i(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)]/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$\langle a|T|b\rangle^* = \langle b|T^+|a\rangle$$

ile tanımlanan op. üniterdir.

$$|a\rangle = \underset{\sim}{\alpha} \qquad |b\rangle = \underset{\sim}{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

$$\langle a| = (\alpha_1^* \ \alpha_2^* \ \alpha_3^*) \qquad \langle b| = (\beta_1^* \ \beta_2^* \ \beta_3^*)$$

$$T^+ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{6}} + \frac{\alpha_3(1-i)}{\sqrt{6}} \\ \frac{i\alpha_1}{\sqrt{2}} - i\frac{\alpha_2}{\sqrt{6}} - \frac{\alpha_3(1+i)}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2\alpha_2}{\sqrt{6}} + \frac{\alpha_3(1-i)}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$TT^+ \underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{\alpha} \Rightarrow TT^+ = 1$$

benzer şekilde $T^+T = 1$

$T \to$ üniterdir.

2.5. İzdüşüm Operatörleri:

düzlemdeki bir nokta (x,y) koordinatları ile belirlenir. x-ekseni düzlemin bir alt-uzayıdır. Böyle bir noktaya etkiyen ve bunu alt uzayına gönderen bir P_x lineer op.ü var mıdır?

$$P_x(x,y) = (x,0)$$

Nokta önceden x-ekseni üzerinde ise, bunu değiştirmezsin. Özellikle P_x iki kere uygulanırsa, bir kere uygulandığının aynı sonucunu verir: $P_x^2 = P_x$. Bu tartışmayı şu tanımda genelleştiririz:

2.5.1. Tanım: Bir $P \in \mathcal{L}(V)$ hermitsel op.ü izdüşüm op. dür denir, eğer $P^2 = P$ ise. Bu tanımdan, tersi olan tek izdüşüm op.ü özdeşlik op. üdür.

P_1 ve P_2 İO. leri olsunlar. Hangi koşullarda P_1+P_2 de bir izdüşüm op.'dur.

$$(P_1+P_2)^2 = P_1+P_2 = P_1^2+P_2^2+P_1P_2+P_2P_1$$

$$= P_1+P_2+\underbrace{P_1P_2+P_2P_1}_{\text{sus } 0 \Rightarrow P_1+P_2 \text{ İO.}} \qquad (2.10)$$

$\Rightarrow P_1$ ile soldan çarp.

$$P_1^2P_2 + P_1P_2P_1 = 0 \Rightarrow P_1P_2 + P_1P_2P_1 = 0 \Rightarrow P_1P_2 - P_2P_1 = 0$$

$$P_1P_2 = P_2P_1 \qquad (2.11)$$

$\Rightarrow P_1$ ile sağdan çarp: $P_1P_2P_1 + P_2P_1^2 = 0$

$P_1 P_2 + P_2 P_1 = 0$ (2.10)

$P_1 P_2 - P_2 P_1 = 0$ (2.11)

bunların çözümü $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$ olur.

2.5.2. Öneri : $P_1, P_2 \in \mathcal{L}(V)$ izdüşüm op. leri olsun. $P_1 + P_2$ bir İO dür svs $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$ ise. Bu koşulu sağlayan İO leri dik İO leri olarak adlandırılırlar. Genelleştirme : $\{P_i\}_1^n$ İO leri kümesi,

$$P_i P_j = \begin{cases} P_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

sağlanıyor $\Rightarrow$ $P = \sum_1^n P_i$ de bir İO dür

Normal bir $|e\rangle$ verilmiş iken, $P = |e\rangle\langle e|$ nin bir İO ü olduğu kolayca görülür:

. P hermitsel 'dir : $P^{\dagger} = (|e\rangle\langle e|)^{\dagger} = |e\rangle\langle e|$

. $P^2 = P$: $P^2 = (|e\rangle\langle e|)(|e\rangle\langle e|) = |e\rangle \underbrace{\langle e|e\rangle}_{1}\langle e|$

$$= |e\rangle\langle e|$$

$B = \{|e_i\rangle\}_{i=1}^N$ ortonormal bazını alır ve $\{P_i = |e_i\rangle\langle e_i|\}_{i=1}^N$ İO leri kümesini kurabiliriz. P_i ler karşılıklı olarak diktirler. Böylece, $\sum_i^N P_i$ de bir İO üdür.

2.5.3. Öneri : $B = \{|e_i\rangle\}_1^N$, V_N için bir ortonormal baz olsun. O zaman, $\{P_i = |e_i\rangle\langle e_i|\}_1^N$ kümesi karşılıklı olarak dik İO nden ibarettir, ve

BS K

$\sum_{i=1}^{N} P_i = \sum_{i=1}^{N} |e_i\rangle\langle e_i| = 1$. Bu tamlık bağıntısı olarak adlandırılır.

<u>İspat:</u> P_i nin dikliği, $|e_i\rangle$ nin böyle olmasının sonucudur. İkinci kısım için keyfi bir $|a\rangle$ alalım ve $|e_i\rangle$ cinsinden yazalım:

$$|a\rangle = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j |e_j\rangle$$

$$P_i|a\rangle = P_i\Big(\sum_j \alpha_j |e_j\rangle\Big) = \sum_j \alpha_j \underbrace{P_i}_{|e_i\rangle\langle e_i|} |e_j\rangle \quad \delta_{ij}$$

$$= \alpha_i |e_i\rangle.$$

Bu nedenle,

$$1\,|a\rangle = \sum \alpha_i |e_i\rangle = \sum_i P_i |a\rangle = \Big(\sum_i P_i\Big)|a\rangle$$

$|a\rangle$ keyfi olduğundan $\sum_i P_i = 1$ ✓ □

Tüm baz yerine, ilk $m<N$ vektörü seçersek, $P^{(m)} = \sum_{i=1}^{m} |e_i\rangle\langle e_i|$ İOÜ, ilk m baz vektörleri $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{m}$ ~~tarafından~~ gerilen altuzaya izdüşürür. Yani, $P^{(m)}$, herhangi bir $|a\rangle \in V$ üzerine etkidiğinde, sonuç, sadece ilk m tane vektörün lineer bir bileşimi olacaktır.

2.5.4. <u>Örnek</u>: Üç ortonormal vektör $\{|e_i\rangle\}_1^3 \in \mathbb{R}^3$

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad |e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \qquad |e_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

ile verilmiş.

Herbirine eşlik eden izdüşüm op.ü

$$P_1 = |e_1\rangle\langle e_1| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}(1\;1\;0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$P_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}(1\;-1\;2) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}$$

$$P_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

P_i $|e_i\rangle$ doğrusu boyunca izdüşürür.

$$|a\rangle \equiv P_2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}x-y+2z\\-x+y-2z\\2x-2y+4z\end{pmatrix}$$

$$\langle e_1|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\;1\;0)\frac{1}{6}\begin{pmatrix}\\ \\ \end{pmatrix} = 0$$

$\langle e_3|a\rangle = 0$

$|e_1\rangle$ ve $|e_2\rangle$ nin bulunduğu düzleme izdüşüren op.:

$$P_1 + P_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$$

$$|b\rangle \equiv (P_1+P_2)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2x+y+z\\x+2y-z\\x-y+2z\end{pmatrix}$$

$\langle e_3|b\rangle = 0$

$$P_1+P_2+P_3 = \begin{pmatrix}1&&0\\&1&\\0&&1\end{pmatrix} = 1$$

BS K

Prb. 2.3.) Örn. 13.4 deki $\underset{\sim}{D}$ ve $\underset{\sim}{T}$ yi alalım

— Örn. 13.4.(i) Herhangi bir $|x\rangle \in \mathcal{P}^c[t]$ için $x(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$ iken $|y\rangle = \underline{D}|x\rangle$ yazalım, burada $y(t) = \sum_1^n k\alpha_k t^{k-1}$ olarak tanımlansın. $\underline{D}$ türev op.-ü. (ii) $\mathcal{C}^n(a,b)$, $[a,b]$ aralığında tanımlanmış gerçel değişkenli fonk.lar kümesi ve bunların ilk n türevi mevcut, sürekli. Herhangi bir $|f\rangle \in \mathcal{C}^n(a,b)$ için, $|u\rangle = G|f\rangle$ yi $u(t) = g(t)f(t)$ ile tanımlayalım. ve $g(t)$, $\mathcal{C}^n(a,b)$ içinde, tespit edilmiş bir fonk.'dur. G lineer op.dür. Özellikle, t ile çarpma op.-ü (T ile gösterelim) lineerdir:

$$T|x\rangle = |y\rangle \qquad y(t) = t\,x(t)$$

(a) $[\underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{T}] = \underset{\sim}{1}$ olduğunu göster.

$$\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{T}|x\rangle = \underset{\sim}{D}|y\rangle = |z\rangle$$

$$y(t) = t\,x(t) = \sum_k \alpha_k t^{k+1}$$

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (k+1) t^k$$

$$TD|x\rangle = T|y'\rangle = |z\rangle$$

$$y' = \sum \alpha_k k\, t^{k-1}$$

$$z = t\sum_0 \alpha_k k\, t^{k-1} = \sum \alpha_k k\, t^k$$

$$(DT - TD)|x\rangle = |z\rangle \Rightarrow$$

BS K

$$\sum_k \alpha_k (k+1) t^k - \sum_k \alpha_k k t^k = \sum_k \alpha_k t^k \to |x\rangle$$

$$[D, T] = 1$$

(b) $D^3 T^3$ ve $T^3 D^3$ LD nü hesapla.

Prb. 2.7. $[D^k, T] = k D^{k-1}$ ve $[T^k, D] = -k T^{k-1}$

olduğunu göster.

$[D, T] = 1$

$DT - TD = 1$ sağdan ve soldan D ile çarp

$$\left.\begin{aligned} D^2T - DTD &= D \\ DTD - TD^2 &= D \end{aligned}\right) \quad D^2T - TD^2 = 2D$$

$$[D^2, T] = 2D$$

$D^3T - D^2TD = D^2$

$\exists\ [D^k, T] = k D^{k-1}$ için doğrudur

$D^2 - TD^3 = D^2$

$k+1$ için doğru olduğunu gösterelim

$$\left.\begin{aligned} D^kT - TD^k &= kD^{k-1} \\ D^{k+1}T - \underbrace{DT}_{1+TD}D^k &= kD^k \end{aligned}\right) \quad \begin{aligned} DT - TD &= 1 \\ DTD^k - TD^{k+1} &= D^{k+1} \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$D^{k+1}T - TD^{k+1} = (k+1) D^k$$

$$[D^{k+1}, T] = (k+1) D^k$$

BS K

Prb. 2.8. H^{-1} 'yi $H(t)$ nin türevi cinsinden hesapla.

$$H^{-1}(t)\, H(t) = 1$$

$$\frac{dH^{-1}}{dt} H + H^{-1} \frac{dH}{dt} = 0$$

$$\frac{dH^{-1}}{dt} H = -H^{-1} \frac{dH}{dt} \Rightarrow \frac{dH^{-1}}{dt} = -H^{-1} \frac{dH}{dt} H^{-1}$$

Prb. 2.9. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve her $H \in \mathcal{L}(V)$ için

$$e^{\alpha H} e^{\beta H} = e^{(\alpha+\beta)H}$$

olduğunu göster.

$$e^{\alpha H} e^{\beta H} = \sum \frac{\alpha^n}{n!} H^n \sum \frac{\beta^m}{m!} H^m$$

$$= \sum_n \sum_m \frac{\alpha^n \beta^m}{n!\, m!} H^{n+m} \qquad n+m=k$$

$$= \sum_k \frac{H^k}{k!} \underbrace{\sum_n \frac{k!\, \alpha^n \beta^{k-n}}{n!\, (k-n)!}}_{(\alpha+\beta)^k} = e^{(\alpha+\beta)H}$$

Prb. 2.11. A ve B hermitsel $\Rightarrow$ $i[A,B]$ de hermitsel'dir.
$(C=)$

$$A = A^+ \quad B = B^+$$

$$C = iAB - iBA \qquad C^+ = -iB^+A^+ + iA^+B^+ = -iBA + iAB$$

$$= C \checkmark$$

BS K

Prb. 2.12. $\dfrac{dU}{dt} = tHU(t)$ op. dif. denk.ne çözüm bul.

$$y = t^2 , \quad \frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dy}\frac{dy}{dt} = 2t\frac{dU}{dy}$$

$$2\cancel{t}\frac{dU}{dy} = \cancel{t}HU(y) \Rightarrow U = e^{yH/2} = e^{t^2H/2}$$

Prb. 2.15. $[[S,T],T] = 0 = [[S,T],S]$ olduğunu varsayarak,

$$[S, \exp(tT)] = t[S,T]\exp(tT)$$

olduğunu göster.

$$[S, e^{tT}] = \sum_{k=0} \frac{t^k}{k!}[S, T^k]$$

$$[[S,T],T] = 0 \Rightarrow [[T,S],T] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$[S, T^k] = kT^{k-1}[S,T] \quad \underline{\text{prb. 2.6}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}kT^{k-1}[S,T] = \sum \frac{t^k}{k!}k[S,T]T^{k-1}$$

$$= t[S,T]\sum_{1}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}T^{k-1} = t[S,T]e^{tT} \checkmark$$

BS K

Prb. 2.25. $|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$ vektörü için (a) P_a İzdüşüm matrisini bulunuz.

$$P_a = |a\rangle\langle a| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(b) P_a $\mathbb{C}^4$ deki her vektörü $|a\rangle$ ya izdüşürür.

$$|v\rangle = \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{pmatrix} \Rightarrow P_a|v\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\\alpha_2-\alpha_3\\-\alpha_2+\alpha_3\\0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_3)\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1-\alpha_2)|a\rangle \checkmark$$

(c) $1-P_a$ da PO dur..

$$1-P_a = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1/2&1/2&0\\0&1/2&1/2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$(1-P_a)^2 = (1-P_a) \checkmark$$

BS K

Prb. 2.28. parametrik denk.: $x=2t+1$, $y=-t+3$, $z=t-1$ olan bir çizgi üzerine, $(3,4,-4)$ vektörünün izdüşümünün uzunluğu nedir?

$$\left.\begin{aligned} x &= 2t+1 \\ y &= -t+3 \\ z &= t-1 \end{aligned}\right) \quad \begin{aligned} t=0 \quad & (1,3,-1) \\ t=1 \quad & (3,2,0) \end{aligned}$$

$$(3-1,\ 2-3,\ 0+1) = (2,-1,1)$$

$$|e\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_e = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (2, -1\ \ 1) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|v\rangle = P_e \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 12-8-8 \\ -6+4+4 \\ 6-4-4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\langle v|v\rangle = \frac{1}{9}(4+1+1) = \frac{6}{9} \qquad \|v\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$