3.

# Matrisler: Operatör Temsilleri

## 3.1. Matrisler:

$V_N$ vektör uzayının $B_V = \{|a_i\rangle\}_{i=1}^{N}$ bazını seçelim ve keyfi bir $|x\rangle$ vektörünü bu bazda

$$|x\rangle = \sum_i \xi_i |a_i\rangle$$

olarak ifade edelim.

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_N \end{pmatrix}$$

yazarız ve bu $B_V$ bazında $|x\rangle$'i temsil ediyor deriz.

LD: $A \in \mathcal{L}(V_N, W_M)$ olan ve $B_V$ baz vektörlerine etkiyen ($M$-boyutlu $W_M$ vektör uzayındaki vektörleri verecek):

$$|w_k\rangle = \underset{\sim}{A} |a_k\rangle$$

$B_W = \{|b_i\rangle\}_{i=1}^{M}$ $W_M$

ek alt indis!

$$|w_1\rangle = \sum_j \alpha_{j1} |b_j\rangle$$
$$|w_2\rangle = \sum_j \alpha_{j2} |b_j\rangle$$
$$\vdots \quad |w_N\rangle = \sum_j \alpha_{jN} |b_j\rangle$$

BS K

$$w_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{M1} \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{M2} \end{pmatrix} \cdots \quad w_N = \begin{pmatrix} \alpha_{1N} \\ \alpha_{2N} \\ \vdots \\ \alpha_{MN} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1N} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \\ \vdots & & & \\ \alpha_{M1} & \cdots & \cdots & \alpha_{MN} \end{pmatrix} \longleftarrow$$

A matrisini $B_V$ ve $B_W$ bazlarında $\underset{\sim}{A}$'yı temsil ediyor deriz.

Sembolik olarak, bu

$$\underset{\sim}{A} |a_i\rangle = \sum_j^M \alpha_{ji} |b_j\rangle \qquad i = 1, \ldots, N$$

demektir.

$A : |x\rangle \longrightarrow |y\rangle$

$|y\rangle = \underset{\sim}{A} |x\rangle$ vektörünü alalım. Bu iki şekilde yazılabilir. Bir taraftan,

$W_M$'de

$$|y\rangle = \sum_{j=1}^M \zeta_j |b_j\rangle.$$ Diğer taraftan,

$$|y\rangle = \underset{\sim}{A} |x\rangle = \underset{\sim}{A} \sum_{i=1}^N \xi_i |a_i\rangle = \sum_{i=1} \xi_i \underset{\sim}{A} |a_i\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^N \xi_i \left( \sum_{j=1}^M \alpha_{ji} |b_j\rangle \right) = \sum_{j=1}^M \Big( \underbrace{\sum_{i=1}^N \xi_i \alpha_{ji}}_{\zeta_j} \Big) |b_j\rangle$$

$$\eta_j = \sum_{i=1}^{N} \alpha_{ji}\,\xi_i \qquad j = 1, \dots, M$$

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1N} \\ \alpha_{21} & & \dots & \\ \vdots & & & \\ \alpha_{M1} & \dots & & \alpha_{MN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_N \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{x}$$

matris çarpım kuralı.

Bu kurulum — iki vektör uzayında birer baz sabitlenmiş ile — her operatöre (eşsiz) bir matrisin karşılık getirildiğini gösterir. Diğer taraftan da, $M \times N$ — $\underset{\sim}{A}$ matrisi verilmiş ise, ($\alpha_{ij}$ elemanları ile) $T_A$ eşsiz bir LD kurulabilir,

$$T_A |a_i\rangle \equiv \sum_{j=1}^{M} \alpha_{ji}\, |b_j\rangle$$

baz vektörlerine etkisi ile tanımlanmış.

3.1.2. **Öneri:** $\mathcal{L}(V_N, W_M)$ ve $\mathcal{M}^{M\times N}$ vektör uzayları izomorfiktirler. Açık izomorfizm her bir vektör uzayında bir baz seçildiği zaman kurulur.

BS K

**3.1.3. Örnek:** $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ LO nin matris temsilini bulalım.

$$\underset{\sim}{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+2z \\ 3x-z \\ 2y+z \end{pmatrix}$$ ile verilen.

$$B = \left\{ |a_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ |a_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ |a_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Not: $\langle a_1|a_2\rangle = (1\ 1\ 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \langle a_i|a_j\rangle \neq \delta_{ij}$

**bazında:**

$$\underset{\sim}{A}|a_1\rangle = \underset{\sim}{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{A}|a_2\rangle = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{A}|a_3\rangle = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & -3/2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 5/2 \\ 5/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

BS K

A nın $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ üzerine etkisi sağ tarafı vermez.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

B nin bazından ziyade $\mathbb{R}^3$ ün standart baz cinsinden açılmıştır.

B vektörleri cinsinden $\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{x}$ i şöyle açarız.

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x-y+2z \\ 3x-z \\ 2y+z \end{pmatrix} = \left(2x - \frac{3y}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(-x + \frac{y}{2} + 2z\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \left(x + \frac{3}{2}y - z\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bu B_bazında bu vektörün şu şekilde temsil edilebileceğini söyler:

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_B = \begin{pmatrix} 2x - \frac{3y}{2} \\ -x + \frac{y}{2} + 2z \\ x + \frac{3y}{2} - z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2} \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{z}{2} \\ -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} \end{pmatrix}$$

Şimdi A ya bunu ver ⟶ sağ tarafa ulaşılır.

BS K

$M \times N$ matrisi $A$ ve bununla ilişkilendirilen $T_A \in \mathcal{L}(V_N, W_M)$
(lesiklede)

op.ü verilmiş olsun. $T_A$ nın çekirdeği ve bölgesi (range) bunlarındır. $T_A$ nın rankı $A$ nın rankı olarak adlandırılır.

3.1.4. **Önerme** Bir matrisin rankı, determinantı sıfırdan farklı olan en büyük (karesel) alt matrisinin boyutudur.

## 3.2. Matrisler ile işlemler

$M \times N$ $A$ matrisinin transpozesi $\rightarrow A^t$ satır ve sütunların yerdeğiştirilmesi

$$(A^t)_{ij} = A_{ji} \quad \text{ya da} \quad \alpha_{ij}^t = \alpha_{ji}$$

3.2.1. **teorem** karesel matrisler..

(a) $(A+B)^t = A^t + B^t$ (b) $(AB)^t = B^t A^t$

(c) $(A^t)^t = A$

$A^t = A \rightarrow$ sym.

$A^t = -A \rightarrow$ anti-sim

Her $A$ matrisi $A = \overbrace{\frac{1}{2}(A+A^t)}^{\text{sim}} + \overbrace{\frac{1}{2}(A-A^t)}^{\text{anti-sim.}}$

BS K

(reel) → $A^t A = A A^t = 1$ → ortogonal matris

kompleks eşlenik: $(A^*)_{ij} = (A)^*_{ij} \Rightarrow (\alpha_{ij})^* = (\alpha^*_{ij})$

$A^* = A \Rightarrow A$ reel. (Ayrıca $(A^*)^* = A$)

(kompleks eş + transpozisyon) = hermitsel eşlenik

$$A^\dagger = (A^t)^* = (A^*)^t$$

$$(A^\dagger)_{ij} = (A^*)_{ji} \quad \text{ya da} \quad (\alpha_{ij})^\dagger = \alpha^*_{ji}$$

3.2.2. Tanım: H Hermitsel matrisi → $H^\dagger = H$ yi sağlar

ya da elemanları cinsinden, $\xi^*_{ij} = \xi_{ji}$

bir Ünite matris $U^\dagger U = U U^\dagger = 1$ i sağlar ya da elemanları cinsinden

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_{ik}\, \mu^*_{jk} = \sum_{k=1}^{n} \mu^*_{ki}\, \mu_{kj} = \delta_{ij}$$

Notlar: 1) Bir Hermitsel matrisin köşegen elemanları → reel

2) " " " i nci kolonu i nci satırının kompleks eşleniği ya da tersi

3) Reel Hermitsel bir matris → sym.

4) N×N Ünite matris $R^N$ de ortonormal bir set oluşturur

Reel Ünite matris → ortogonal

## 3.3. Ortonormal Bazlar:

$B = \{|e_i\rangle\}_{i=1}^{N}$ ortonormal bazını seçelim. Bu bazda $\underset{\sim}{A}$ op.nün matris elemanları $\underset{\sim}{A}|e_i\rangle = \sum_{k=1}^{N} \alpha_{ki}|e_i\rangle$ yi her iki taraftan soldan $\langle e_j|$ ile çarparak bulunur:

$$\langle e_j|\underset{\sim}{A}|e_i\rangle = \langle e_j|\sum_k \alpha_{ki}|e_i\rangle = \alpha_{ji}$$

$$(A)_{ij} = \alpha_{ij} = \langle e_i|\underset{\sim}{A}|e_j\rangle$$

Ortonormal bir bazda, bir vektörün $\xi_i$ i.ci bileşeni bunu $\langle e_i|$ ile çarparak bulunur.

$$|x\rangle = \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\langle e_j|x\rangle}_{\xi_j}|e_j\rangle = \sum |e_j\rangle\langle e_j|x\rangle$$

$$\Rightarrow \underbrace{1 = \sum_{j=1}^{N} |e_j\rangle\langle e_j|}$$

$$\langle e_j|x\rangle = \sum_i \xi_i \langle e_j|e_i\rangle$$
$$= \xi_j$$

## 3.4. Baz değişimi ve benzerlik dönüşümü

Bir fiziksel problem, daha basit olduğu için bir özel bazda çözülebilir, ancak genel form istenirse olabilir.

$B = \{|a_i\rangle\}_i^N \longrightarrow B' = \{|a_i'\rangle\}_i^N$ ile değiştirelim.

keyfi bir $|a\rangle \to \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ bileşenleri ile $B$ de verilsin.

**Soru:** $|a\rangle$'nın $B'$deki bileşenleri?

$$|a\rangle = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i |a_i\rangle \qquad |a_i\rangle = \sum_{j=1}^{N} \rho_{ji} |a_j'\rangle$$

$$= \sum_i \sum_j \alpha_i \rho_{ji} |a_j'\rangle$$

$$\alpha_j' \qquad j = 1, \dots, N$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \vdots \\ \alpha_N' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1N} \\ \vdots & & & \\ \rho_{N1} & \cdots & & \rho_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} \qquad a' = \underset{\sim}{R}\, a$$

baz dön. matrisi

BS K

Bazı dönüştürdüğümüzde matrise ne olur?

$|b\rangle = \underset{\sim}{A}\,|a\rangle \longrightarrow b = \underset{\sim}{A}\, a$ matris denk.!

$\{\beta_i\}_{i=1}^{N}$ $\quad \{\alpha_i\}_{i=1}^{N}$

B

baz değişimi $b, a \longrightarrow b', a'$

$b' = \underset{\sim}{A}' a'$ mıydı. (A gibi dönüşecek)

$$\underline{\underline{Rb}} = A' \underline{\underline{Ra}} \Rightarrow b = \underline{R^{-1} A' R}\, a$$

$$\underline{b = A\, a} \text{ ile}$$

kıyaslanınca,

$$R^{-1} A' R = A \qquad A' = R A R^{-1}$$

benzerlik dönüşümü. $A'$ $A$ ya <u>benzer</u> olarak söylenir

## 3.5. Determinant

bazdan bağımsızdırlar.

$\varepsilon_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_N}$ permütasyon sembolü olsun

$\varepsilon_{12\ldots N} = 1 \qquad \varepsilon_{i_1 \ldots i_j \ldots i_k \ldots i_N} = -\varepsilon_{i_1 \ldots i_k \ldots i_j \ldots i_N}$

anti-sim. (ya da tide sym.) indis çiftlerinin değiştokuşu altında.

## 3.5.1. Bir matrisin determinantı.

3.5.1. **Tanım**: Det. $M^{N\times N} \to \mathbb{C}$ ye bir gönderim, bir A matrisinin $\alpha_{ij}$ elemanları cinsinden verilen.

$$\det A = \sum_{i_1 \ldots i_N = 1}^{N} \varepsilon_{i_1 \ldots i_N}\, \alpha_{1 i_1} \cdots \alpha_{N i_N}$$

3.5.2. **Teorem**: Bir A matrisinin determinantı

$$\det A = \sum_{i_1 \ldots i_N}^{N} \varepsilon_{i_1 \ldots i_N}\, \alpha_{i_1 1} \cdots \alpha_{i_N N}$$

$$\Rightarrow \quad \det A = \det A^t$$

3.5.3. **Teorem**: Bir matrisin iki satır (ya da iki sütunu)nun değiştirilmesi determinantının işaretini değiştirir.

3.5.1 tanımındaki her terim yalnızca ve yalnız her bir satırdan bir eleman içerir.

$$\det A = \alpha_{i1} A_{i1} + \alpha_{i2} A_{i2} + \ldots = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} A_{ij}$$

$\alpha_{ij}$ nin kofaktörü.

BS K

3.5.5. Öneri: $i \neq k \Rightarrow \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} A_{kj} = 0 = \sum_j \alpha_{ji} A_{jk}$

N×N matrisin N−1 mertebeli bir minoru bir satır ve bir sütunu silinen, örn, i. satır, j. sütun, o zaman minör $M_{ij}$ ile gösterilir.

3.5.6. Teorem $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

3.5.7. Matris çarpımların det. ları

3.5.8. Teorem $\det(AB) = \det A \det B$

3.5.9. Bir Matrisin Tersi:

$$\det A = \sum_j^N \alpha_{ij} A_{ij} = \sum_j^N \alpha_{ji} A_{ji} \qquad 3.20 \ (+)$$

ile birleştirir

$$\Rightarrow \sum_j \alpha_{ij} A_{kj} = \det A \, \delta_{ik} = \sum_j \alpha_{ji} A_{jk}$$

elde ederiz ve elemanları A matrisinin elemanlarının kofaktörleri olan $C_A$ matrisi inşa ederiz:

$$C_A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ A_{N1} & \cdots & & A_{NN} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_j \alpha_{ij} \overset{A^t_{jk}}{A_{kj}} = \det A\, \delta_{ik} = \sum_j \alpha_{ji} \overset{A^t_{kj}}{A_{jk}}$$

$$\sum_j \alpha_{ij} \left(C_A^t\right)_{jk} = \sum_j \left(C_A^t\right)_{kj} \alpha_{ji}$$

ya da matris formunda,

$$A\, C_A^t = \det A\, \mathbb{1} = C_A^t\, A$$

**3.5.9. Teorem:** Bir matrisin tersi (varsa) tektir.

A matrisi $\det A \neq 0 \Rightarrow$ tersine sahiptir.

$$A^{-1} = \frac{C_A^t}{\det A}$$

**İspat** 1. kısım $B$ ve $C$ $A$'nın tersleri olsunlar

$$B = \underbrace{(CA)}_{=1} B = C \underbrace{(AB)}_{=1} = C$$

## 3.6. İz

**3.6.1. Tanım** $A$ : $N \times N$ matris

İz : $\mathcal{M}^{N\times N} \to \mathbb{C}(\mathbb{R})$ ile verilen $\sum_{i=1}^{d} \alpha_{ii} = \operatorname{tr} A$

$A$'nın izi olarak adlandırılır.

BS K

3.6.3. <u>Teorem.</u> İz bir lineer gönderimdir.

$$\operatorname{tr} A^t = \operatorname{tr} A \qquad \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr} BA$$

3.6.4. <u>Öneri</u>: Her $A \in \mathcal{L}(V)$ operatörü $V$ nin herhangi bir bazında op.ün matris temsilinin det. ve İzi olan, $\det A$ ve İz $A$ sayıları eşlik eder.