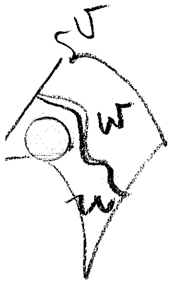
4. SPEKTRAL AYRIŞIM

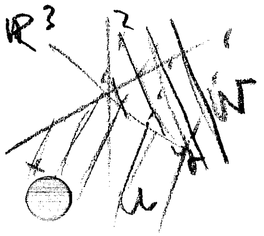
Bu bölüm operatörün köşegen bir matris ile temsil edildiği bir bazın hangi koşullarda var olduğunu inceleyecektir.

4.1. Direkt toplamlar:



Bazen, vektör uzayların ayrık altuzaylara bölmek mümkün ve faydalıdır. $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{W}$ bir $\mathcal{V}$ vektör uzayının altuzayları olsunlar. $\mathcal{U}+\mathcal{W}$ biri $\mathcal{U}$ da diğeri $\mathcal{W}$ de iki vektörün toplamı olarak yazılabilen $\mathcal{V}$ deki tüm vektörlerin topluluğunu göstersin. $\mathcal{U}+\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ olduğu kolayca görülür.

4.1.1. Örnek: $\mathcal{U}$ – xy-düz. $\mathcal{W}$ yz-düz. olsun $\subset \mathbb{R}^3$. Gerçekten de $\mathcal{U}+\mathcal{W} = \mathbb{R}^3$. çünkü $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$



$$(x,y,z) = \underbrace{\left(x, \tfrac{y}{2}, 0\right)}_{\in \mathcal{U}} + \underbrace{\left(0, \tfrac{y}{2}, z\right)}_{\in \mathcal{W}}$$

bu ayrışım tek değildir

$$= \left(x, \tfrac{y}{3}, 0\right) + \left(0, \tfrac{2}{3}y, z\right)$$ de yazılabilirdi.

4.1.2. Tanım: $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ olsun. Öyleki, $\mathcal{V} = \mathcal{U}+\mathcal{W}$ ve herikı $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{W}$ ye tek ortak vektör 0, vektörüdür. O zaman $\mathcal{V}$ nin $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{W}$ nin direkt toplamı olduğunu söyler ve

$$\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$$

yazarız.

BS K

4.1.3. **Öneri:** U ve W, V nin altuzayları olsunlar. O zaman,

$V = U \oplus W$ svs V deki herhangi bir vektör (tek olarak U daki bir vektör + W daki bir vektör) şeklinde yazılabilir.

İspat: $V = U \oplus W$ varsayalım ve $|v\rangle \in V$, U daki bir vektör ile W daki bir vektörün toplamı olarak farklı iki şekilde yazılabilsin:

$$|v\rangle = \underbrace{|u\rangle}_{\in U} + \underbrace{|w\rangle}_{\in W} = |u'\rangle + |w'\rangle \Rightarrow \underbrace{|u\rangle - |u'\rangle}_{LHS \in U} = \underbrace{|w'\rangle - |w\rangle}_{\in W}$$

LHS $\in U$ nun elemanı → W da da olmalı

o da sadece 0 ! $LHS = RHS = 0$ olmalı.

Böylece, $|u\rangle = |u'\rangle$, $|w\rangle = |w'\rangle$, ve V nin U daki bir vektör ile W daki bir vektörün toplamı olarak yazılabileceği tek bir yol vardır.

Tersine olarak, eğer $|a\rangle \in U$ ve $|a\rangle \in W$ ise, o zaman,

$$|a\rangle = \underbrace{|a\rangle}_{U} + \underbrace{|0\rangle}_{W} \quad \text{ve} \quad |a\rangle = \underbrace{|0\rangle}_{U} + \underbrace{|a\rangle}_{W}$$

yazabiliriz. $|a\rangle$ nın ayrışımının tekliği $|a\rangle = |0\rangle$ der. Bu nedenle, her iki U ve W ya ortak tek vektör, sıfır vektördür. Bu da, $V = U \oplus W$ dır.

4.1.4. **Öneri:** $\mathbb{V} = \mathbb{U} + \mathbb{W}$ ise, $\dim V = \dim U + \dim W$ dır.

İspat: var.

Direkt toplam kavramını, ikiden fazla direkt toplama genelleyebiliriz. Örn, $\mathbb{R}^3 = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Z}$ yazılabilir. Her parça eksenlere karşılık gelen tek boyutlu altuzaylardır. Varsayalım ki,

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_r$$

BS K

yani V r adet altuzayın direkt toplamıdır, ve bu altuzayların sıfır hariç ortak vektörü yoktur ve V deki herhangi bir vektör her bir altuzaydan bir vektörün toplamı olarak tek bir şekilde yazılabilir. P_j LO nü şu şekilde tanımlayalım :

$$\mathbb{P}_j |u\rangle = |u_j\rangle \quad , \; |u\rangle = \sum_{j=1}^{r} |u_j\rangle \quad , \; |u_j\rangle \in \mathcal{U}_j$$

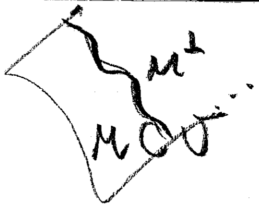
$$(P_j^2 = P_j \quad P_i P_j = 0 \; \forall i)$$

O zaman, $\mathbb{P}_j \mathbb{P}_i = \mathbb{P}_j \delta_{ij}$ ve P_j izdüşüm op. ü olur.

$$|u\rangle = \sum_{j=1}^{r} |u_j\rangle = \sum_{j=1}^{r} \mathbb{P}_j |u\rangle = \Big(\sum_j \mathbb{P}_j\Big) |u\rangle \quad \forall |u\rangle \in V$$

$$\sum_j \mathbb{P}_j = 1$$

4.1.5. Tanım : V bir iç çarpım uzayı olsun. $\mathcal{M}$, V nin bir altuzayı olsun. $\mathcal{M}^\perp$ ile, $\mathcal{M}$ deki tüm vektörlere dik V deki bütün vektörler kümesini gösterelim. $\mathcal{M}^\perp$ ye $\mathcal{M}$ nin dik tümleyeni denir.



4.1.6. Önerme : $\mathcal{M}^\perp$, V nin bir altuzayıdır.

İspat : $|a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{M}^\perp \Rightarrow \forall |c\rangle \in \mathcal{M}$ için

$$\langle c| \left(\alpha |a\rangle + \beta |b\rangle\right) = \alpha \overbrace{\langle c|a\rangle}^{=0} + \beta \overbrace{\langle c|b\rangle}^{=0} = 0$$

böylece, $\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle \in \mathcal{M}^\perp$, keyfi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $|a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{M}^\perp$ için.

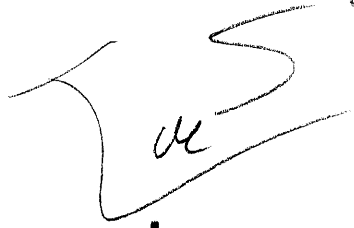
$V = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_r$ nin V si bir iç çarpım uzayı ise ve altuzaylar karşılıklı olarak dik ise, o zaman keyfi $|u\rangle, |v\rangle \in V$ için, $P_j^2 = P_j$

$$\langle u| P_j |v\rangle = \langle u | v_j\rangle = \langle u_j | v_j\rangle = \langle v_j | u_j\rangle^* = \langle v | u_j\rangle^*$$

$$= \langle v | P_j | u\rangle^*$$

BS K 2012 ve bu $\mathbb{P}_j$ nin hermitsel olduğunu gösterir. 2. Bölde I'nın hermitsel olduğunu varsaydık. Şimdi görüyoruz ki, sadece bir iç çarpım uzayında (ve sadece bir direkt toplamın altuzayları dik ise) İO nın hermitselliğini kazanıyoruz.

Örn 4.1.7.



için $B_M = \{|e_i\rangle\}_i^m$ ortonormal bazını ele alalım. ve bunu V için bir $B = \{|e_i\rangle\}_i^N$ bazına genişletelim.

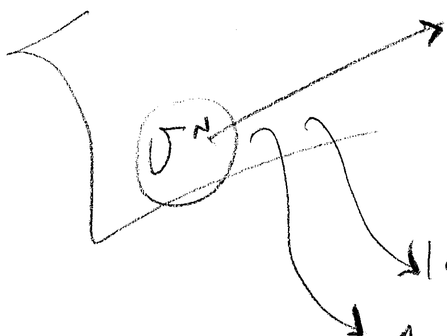
$\mathbb{P} = \sum_{i=1}^{M} |e_i\rangle\langle e_i|$ hermitsel İO nü kuralım. Bu, V deki bir vektörü M altuzayı üzerine izdüşüren bir op. dür. Kolayca görülür ki, $1-\mathbb{P}$, $M^\perp$ üzerine izdüşüren op. dür. Keyfi bir $|a\rangle \in V$,

$$|a\rangle = (\mathbb{P} + 1 - \mathbb{P})|a\rangle = \underbrace{\mathbb{P}|a\rangle}_{M} + \underbrace{(1-\mathbb{P})|a\rangle}_{M^\perp}$$

Dahası, M ve $M^\perp$ in her ikisinde de olan tek vektör $|0\rangle$ dır, çünkü bu kendine dik olan tek vektördür.

4.1.8. Önerme: V bir iç çarpım uzayı $\Rightarrow$ $V = M \oplus M^\perp$ (herhangi bir M altuzayı için). Dahası, M ve $M^\perp$ e karşılık gelen İO ü hermitsel'dir.

4.2. İnvaryant Altuzaylar:



N-boyutlu bir V vektör uzayının vektörlerine bir LO ın etkimesi ile elde edilebilecek alt uzaylar bahis konumuz olacak.

$|a\rangle$ bir vektör

A : bir op. olsun.

$|a\rangle, A|a\rangle, A^2|a\rangle, \ldots, A^N|a\rangle$ vektörleri lineer bağımlıdırlar.
bunlardan $(N+1)$ adet var.

BS K

$\mathcal{M} \equiv \mathrm{Span}\{A^k|a\rangle\}_{k=0}^{N}$ olsun. Buradan, $m \equiv \dim \mathcal{M} \leq \dim \mathcal{V}$ çıkar, ve $\mathcal{M}$, herhangi bir $|x\rangle \in \mathcal{M}$ için $A|x\rangle$ vektörü $\mathcal{M}$ ye aittir özelliğine sahiptir. Diğer bir deyimle, hiç bir vektör, A ile etkilendiğinde altuzayı terketmez.

4.2.1. Tanım: Bir $\mathcal{M}$ altuzayı, A op. nün invaryant bir altuzayıdır eğer A, $\mathcal{M}$ nin vektörlerini, $\mathcal{M}$ nin vektörlerine dönüştürür ise. Bu kısaca, $A(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ olarak yazılır. Eğer, $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}^\perp$ her ikisi, A nın invaryant altuzayları ise, $\mathcal{M}$, A yı indirger deriz.

$\mathcal{M}$ nin bir bazı ile başlayarak, onu $\mathcal{V}$ nin $B = \{|a_i\rangle\}_{i=1}^{N}$ bazına genişletebiliriz, bu bazın ilk m vektörü $\mathcal{M}$ yi gerer. A nın matris gösterimi (böyle bir baz içinde)

$$A|a_i\rangle = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ji}|a_j\rangle \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

dim $\mathcal{M}$

bağıntısı ile verilir. $i \leq m \Rightarrow j > m$ için $\alpha_{ji} = 0$ olur, çünkü $i \leq m$ olduğunda $A|a_i\rangle$, $\mathcal{M}$ ye aittir ve bu nedenle sadece $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle, \ldots, |a_m\rangle\}$ lerin bir lineer birleştirimi olarak yazılabilir. Böylece, A nın B bazındaki matris temsili

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$m \times m$

$m \times (N-m)$

$(N-m) \times (N-m)$

$(N-m) \times m$

biçiminde olacaktır.

$\to A$ op. nün m-boyutlu $\mathcal{M}$ altuzayında temsil ediyor deriz.

Bazen, B deki kalan baz vektörleri: $\{|a_{m+1}\rangle, \ldots, |a_N\rangle\}$ gerilen altuzayda A nın invaryant bir altuzayıdır. O zaman, A_{12} sıfır olacaktır ve A blok köşegen biçimini alacaktır:

BS K

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

Uygun bir baz seçimi ile bu şekilde getirilebilen bir op.ün bir matris gösterimi indirgenebilir denilir; aksi durumda, indirgenemez denir. İndirgenebilir bir A matrisi farklı yolla gösterilir:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = A_1 \oplus A_2$$

4.1.2. Lemma: Bir iç çarpım uzayı V nin bir M altuzayı A LO altında değişmezdir svs $M^{\perp}$, A^{+} altında altında değişmezdir. (İspat prb. 4.3)

Bu Lemmanın sonucu + $(A^{+})^{+} = A$ + $(M^{\perp})^{\perp} = M$ özdeşliklerinin bir sonucu şu teoremde verilir.

4.2.3. Teorem: V nin bir altuzayı A yı indirger svs bu, A ve A^{+} ın herikisi altında invaryanttır.

4.2.4. Lemma: $M \subset V$ ve $\mathbb{P}$, M üzerinde hermitsel İO olsun. M, A LO'i altında invaryanttır, svs $AP = PAP$

İspat: M invaryant olsun $\forall |x\rangle \in V$ için

$\mathbb{P}|x\rangle = |x\rangle$
$A\mathbb{P}|x\rangle = A|x\rangle$

$$\mathbb{P}|x\rangle \in M \Rightarrow A\mathbb{P}|x\rangle \in M \Rightarrow \mathbb{P}A\mathbb{P}|x\rangle = A\mathbb{P}|x\rangle$$

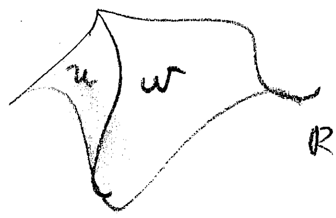
elde edeniz

$|x\rangle$ keyfi olduğundan $A\mathbb{P} = \mathbb{P}A\mathbb{P}$ çıkar.

Tersine olarak, $A\mathbb{P} = \mathbb{P}A\mathbb{P}$ olsun, herhangi bir $|y\rangle \in M$ için,

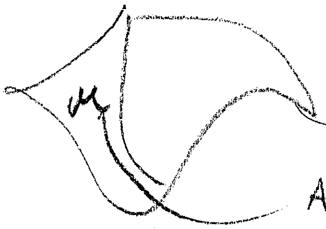
$\mathbb{P}|y\rangle = |y\rangle \Rightarrow A\mathbb{P}|y\rangle = A|y\rangle = \mathbb{P}(A\mathbb{P}|y\rangle) \in M$ elde ederiz.

bu nedenle M A altında invaryanttır. □



$u \oplus w = V$

$R^3 \equiv x \oplus y \oplus z$ (O hariç ortak elemanları yok!)

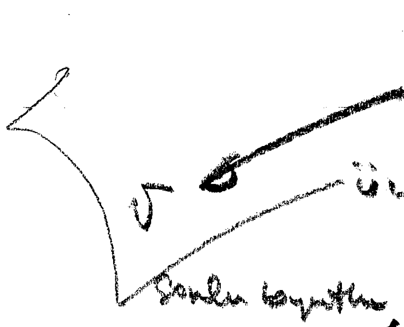


A op. için invaryant alt uzay
$\Leftrightarrow A(M) \subset M$
$A|\cdot M + M^{\perp}$ nin sol f. leshi
nin sağ leshi

$$A = A_1 \oplus A_2 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$ indirgenebilir

$A|a\rangle = \lambda|a\rangle$ $\quad \det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0 = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - \lambda)^{m_i}$ cebirsel katlılık

$[A, A^\dagger] = 0 \Rightarrow A$ <u>normal</u> op.



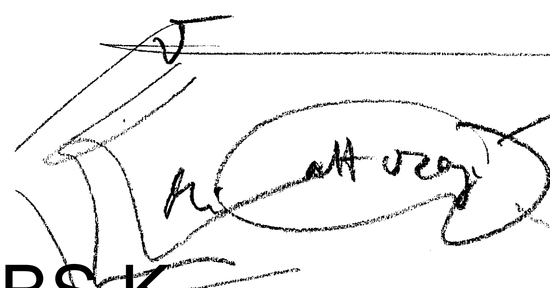
A op. olsun $\rightarrow \lambda_1 \ldots \lambda_r$ ÖD

öz uzay

$P_1 \ldots P_r$ He-İO ✓

Sonlu boyutlu, $\mathbb{C}$, iç çarpım uzayı

$\left(P_i P_j = 0 \quad i \neq j\right)\left(\sum P_i = 1\right)\left(\sum_i \lambda_i P_i = A\right)$



baz $|e_j^s\rangle$

$\langle e_j^s | e_{j'}^{s'} \rangle = \delta_{jj'} \delta_{ss'}$

$P_j = \sum_{s=1}^{m_j} |e_j^s\rangle\langle e_j^s|$

BS K

4.2.5. Teorem: M, V'nin bir altuzayı; P, V'nin M üzerine hermitsel İO ü ve A, V üzerinde bir LO olsun. O zaman, M, A'yı indiger ancak ve ancak $[A, P] = 0$ ise.

İspat: Varsayalım ki M, A'yı indirger. O zaman, teorem 4.2.3'den M, herikisi A ve $A^\dagger$ altında invaryanttır.

lemma 4.2.4. $\Rightarrow$ $AP = PAP$ ve $A^\dagger P = PA^\dagger P$

tekrar eşlenik alır $\Rightarrow$ $(A^\dagger P)^\dagger = (PA^\dagger P)^\dagger$

$PA = PAP$

$\Rightarrow$ $AP = PA$ verir.

Tersine olarak, $PA = AP$ olsun. O zaman $P^2A = PAP$, böylece, $PA = PAP$ eşlenik olarak, $A^\dagger P = PA^\dagger P$, P hermitsel. lemma 4.2.4 da M $A^\dagger$ altında invaryant. Benzer şekilde, $PA = AP$ ve $PAP = AP^2$ elde ederiz, böylece $PAP = AP$. Lemma 4.2.4 den M, A altında invaryanttır. 4.2.3. teoreminden M, A'yı indirger. $\square$

4.3. Özdeğerler ve Özvektörler

4.3.1 Tanım: $A \in \mathcal{L}(V)$ lineer dönüşümünün özdeğeri bir λ skaleri, özvektörü $|a\rangle$ sıfırdan farklı vektördür eğer

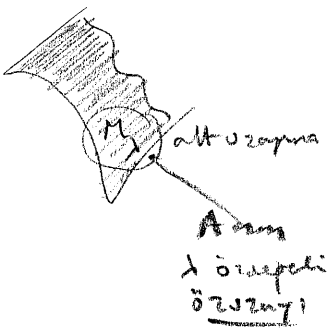
$$A|a\rangle = \lambda|a\rangle \text{ ise.}$$

4.3.2. Öneri: Aynı λ özdeğerine karşılık gelen A'nın tüm özvektörler kümesine $|0\rangle$ ekleniş, ve çıkan kümenin span kümesini M_λ ile gösterin. O zaman, M_λ, V'nin bir altuzayıdır ve her (sıfırolmayan) M_λ dahi vektör, λ özde-

BS K

gerli A nın bir özvektörüdür. (ispat, tanımdan)

4.3.3. Tanım: M_λ altuzayına, λ özdeğerine karşılık gelen A'nın özuzayı olarak atıfta bulunulur. Onun boyutu, λ'nın geometrik katlılığı (multiplicity) olarak adlandırılır. Bir özdeğer basittir denir, eğer bunun geometrik katlılığı 1 ise. A nın özdeğerlerinin kümesi A nın spektrumu olarak adlandırılır.



Kurulumu nedeniyle, farklı özvektörlere karşılık gelen farklı özuzaylar $|0\rangle$ hariç ortak vektörlere sahip değildir. Bu şöyle gösterilir:

$$|v\rangle \in M_\lambda \cap M_\mu \qquad \lambda \neq \mu \Rightarrow \text{ o zaman}$$

$$0 = (A - \lambda \mathbb{1})|v\rangle = A|v\rangle - \lambda|v\rangle = \mu|v\rangle - \lambda|v\rangle$$

$$= \underbrace{(\mu - \lambda)}_{\neq 0} |v\rangle \Rightarrow |v\rangle = 0 \checkmark$$

(4.5) $A|a\rangle = \lambda|a\rangle$ denklemi $(A - \lambda 1)|a\rangle = 0$ olarak yazılabilir. Bu bize şunu söyler: $|a\rangle$, A nın bir özvektörüdür svs $|a\rangle$, $A - \lambda\mathbb{1}$ in çekirdeğine ait ise. Bu sonuncusu terslenebilir ise, o zaman çekirdeği sadece $|0\rangle$'dan ibaret olacaktır, bu da 4.5'in çözümü olarak kabul edilebilir değildir. Böylece, önemsiz olmayan çözüm için $A - \lambda\mathbb{1}$'in tersi olmamalıdır. Bu, ancak ve ancak

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0 \qquad (4.6)$$

ise doğrudur. λ nın polinomu olan 4.6 det.i A nın karakteristik polinomu olarak adlandırılır. Bunun kökleri karakteristik kökler ve basitçe A nın özdeğerleridir. Derecesi ≥ 1 olan herhangi bir pol. un en az bir (kompleks) kökü vardır; bu da şu teoremi verir:

BS K

4.3.4. **Teorem:** $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı sonlu boyuttaki bir vektör uzayındaki her op.ün, en az bir özdeğeri vardır, ve bu nedenle de en az bir özvektörü vardır.

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$: A nın karakteristik pol.nun farklı kökleri olsun, ve λ_j, m_j defa ortaya çıksın (m_j : λ_j nin cebirsel katlılığı)

O zaman,

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}$$

$$= \prod_{j=1}^{p} (\lambda_j - \lambda)^{m_j}$$

$\lambda = 0$ için, bu

$$\det A = \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} \cdots \lambda_p^{m_p} = \prod_{j=1}^{p} \lambda_j^{m_j}$$

verir. Bu sonuç, bir op.ün determinantının tüm özdeğerlerinin çarpımı olduğunu gösterir. Özellikle, bir özdeğer 'O' ise, o zaman op. terslenebilir değildir.

4.3.5 **Örnek:** Bir $\mathbb{P}$ İO'nun özdeğerlerini bulalım. $|a\rangle$ özvektörü ise,

$$\mathbb{P}|a\rangle = \lambda|a\rangle$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}^2|a\rangle = \lambda\mathbb{P}|a\rangle = \lambda^2|a\rangle \qquad \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}|a\rangle = \lambda^2|a\rangle \Rightarrow \lambda^2|a\rangle = \lambda|a\rangle \Rightarrow (\lambda^2 - \lambda)\underbrace{|a\rangle}_{\neq 0} = 0$$

$$\lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, 1$$

özdeğeri $\mathbb{P}$ nin terslenemez olduğunu gösterir.

BS K

4.3.6. **Örnek:** cebirsel ve geometrik katlılık arasındaki fark

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in karakteristik pol.u $(1-\lambda)^2 = 0$ dır. Matrisin

özdeğeri $\lambda = 1$ dir, cebirsel katlılığı $m_1 = 2$ dir, ancak,

$(A - 1)|a\rangle = 0$ denklemini sağlayan en genel vektör $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ şeklindedir. Bu da $M_{\lambda=1}$ in tek boyutlu olduğunu gösterir ki λ nın geometrik katlılığı "1" dir.

4.3.7. **Tanım:** V uzayı üzerinde bir A LO köşegenleştirilebilir denir, eğer bütün vektörlerin tümü A nın özvektörleri olan V için bir baz varsa.

4.3.8. **Teorem:** A bir V vekt. uzayı üzerinde farklı özdeğerleri olan $\{\lambda_i\}_{i=1}^{m}$ köşegenleştirilebilir bir op. olsun. V üzerinde P_j İO leri (hermitsel olmaları gerekmeyen) vardır, öyleki

(1) $1 = \sum_{i=1}^{r} P_i$ (2) $P_i P_j = 0$ $j \neq i$ için (3) $A = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j P_j$

İspat: M_j, λ_j ye karşılık gelen özuzayı göstersin. Özvektörlerin V yi germesinden ve iki farklı özuzayın tek ortak vektörünün $|0\rangle$ vektörü olmasından,

$$V = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_r$$ elde ederiz.

P_j, M_j üzerine İO olmak üzere 4.1 ve 4.2 denklemlerini kullanırsak, (1) ve (2) yi hemen verir. (3) ün ispatı için V de keyfi bir $|v\rangle$ vekt. olsun. O zaman, $|v\rangle$ tek olarak herbiri bir uzaydan gelen vektörlerin toplamı olarak yazılabilir. Bu nedenle,

$A|v\rangle = \sum_{j=1}^{r} A|v_j\rangle = \sum_j^r \lambda_j |v_j\rangle = \left(\sum_{j=1}^{r} \lambda_j P_j\right)|v\rangle$ ✓

BSK

4.4. Spektral Ayrışım:

4.4.1. Tanım: Bir normal op. iç çarpım uzayı üzerinde $[A, A^+] = 0$ olan bir op. dur. Bu tanımın önemli bir sonucu;

$$\|Ax\| = \|A^+x\| \quad \text{svs} \quad A \text{ normal ise.} \qquad 4.9$$

4.4.2. Önerme: A, V üzerinde normal bir op. olsun. O zaman $|x\rangle$, A nın λ özdeğerli özvektörüdür svs $|x\rangle$, A^+ nın λ^* özdeğerli bir özvektörü ise.

İspat: (4.9) dan $(A - \lambda 1)^+ = A^+ - \lambda^* 1\!\!1$ dan ve $A - \lambda 1\!\!1$ in normal olmasından, $\|(A - \lambda 1\!\!1)\| = 0$ svs $\|(A^+ - \lambda^* 1\!\!1)x\| = 0$ ise, elde ederiz. Normu "0" olan tek vektör $|0\rangle$ olduğundan

$$(A - \lambda 1\!\!1)|x\rangle = 0 \quad \text{svs} \quad (A^+ - \lambda^* 1\!\!1)|x\rangle = 0$$

elde ederiz. Bu öneriyi ispatlar. □

Bu öneriyi hermitsel bir H ve üniter bir U operatörüne uygulayarak faydalı bir sonuç elde ederiz:

$$H|x\rangle = \lambda|x\rangle = H^+|x\rangle = \lambda^*|x\rangle \Rightarrow (\lambda - \lambda^*)|x\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \lambda^*, \ \lambda \text{ gerçel}$$

$$|x\rangle = 1\!\!1|x\rangle = UU^+|x\rangle = U(\lambda^*|x\rangle) = \lambda^* U|x\rangle = \lambda\lambda^*|x\rangle$$

$$\Rightarrow \lambda\lambda^* = 1 \quad \lambda \text{ ünimodüler.}$$

4.4.3. Önerme Hermitsel bir op. un özdeğerleri gerçeldir. Üniter bir op. un özdeğerlerinin mutlak değeri birim'dir.

BS K

4.4. Örnek : $H = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix}$ hermitsel matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulalım.

$$\det(H - \lambda \mathbb{1}) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -1$$

$$0 = (H - \lambda_1 \mathbb{1})|a_1\rangle = (H - \mathbb{1})|a_1\rangle = \begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 - i\alpha_2 \\ +i\alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2 = i\alpha_1 \Rightarrow |a_1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ i\alpha_1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$ keyfi $\in \mathbb{C}$

$\alpha_1 + i\alpha_2 = 0$, $i\alpha_1 - \alpha_2 = 0$, $\alpha_1 + i\alpha_2 = 0$ aynı. $\alpha_2 = i\alpha_1$

$$0 = (H - \lambda_2 \mathbb{1})|a_2\rangle = (H + \mathbb{1})|a_2\rangle = \begin{pmatrix} \beta_1 - i\beta_2 \\ i\beta_1 + \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = -i\beta_1 \Rightarrow |a_2\rangle = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

keyfi

çoğu kez, bu özvektörler ortonormalize yapılır. $|a_1\rangle$ ve $|a_2\rangle$ ortogonal olduklarından sadece normalize ederiz.

$$1 = \langle a_1|a_1\rangle = |\alpha_1|^2 (1 \ -i)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 2|\alpha_1|^2 \quad \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha_1 = e^{i\varphi}/\sqrt{2} \qquad \varphi \in \mathbb{R}$$

4.4.5 **Teorem :** Bir normal op. ün bir özuzayı, bu op. u indirger. Dahası, bir normal op. ün özuzayları karşılıklı olarak diktir.

İspat : teoremin ilk kısmı önerme 4.4.2 ve trm 4.2.3 ün önemsiz bir sonucudur. 2. kısmın ispatı için, $|u\rangle \in M_\lambda$ ve $|v\rangle \in M_\mu$, $\lambda \neq \mu$ olsun. trm 4.2.3 kullanarak,

$$\lambda\langle v|u\rangle = \langle v|\lambda u\rangle = \langle v|Au\rangle = \langle A^\dagger v|u\rangle = \langle \mu^* v|u\rangle = \mu\langle v|u\rangle$$

BS K

buradan, $(\lambda-\mu)\langle v|u\rangle=0$, $\lambda\neq\mu$ olduğundan $\langle v|u\rangle=0$ çıkar. ∎

4.4.6. Spektral Ayrışım Teoremi:

A, sonlu boyutlu kompleks iç çarpım uzayı V üzerinde bir normal op. olsun. $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ ler bunun farklı özdeğerleri olsunlar. $P_1,\dots,P_r$ sıfır olmayan (hermitsel) İO leri mevcuttur, öyleki

(1.) $P_iP_j=0$ $\forall i\neq j$ için (2.) $\sum_{i=1}^{r} P_i=1$ (3.) $\sum_{i=1}^{r}\lambda_i P_i = A$

<u>İspat</u>: P_i, λ_i özdeğerine karşılık gelen M_i özuzayı üzerine izdüşüren op. olsun. Bunlar hermitsel'dir. Trm 4.4.5 den, farklı herhangi iki özuzayın tek ortak vektörü $|0\rangle$ dır. Bu nedenle, $M=M_1\oplus\cdots\oplus M_r$ ve $P=\sum_i^r P_i$ olsun. P, M üzerine dik İO dur. $[A,P_i]=0$ (Arg. 4.3.5) olduğundan $[A,P]=0$ dır. Böylece, trm 4.2.5 den M, A yı indirger, yani, $M^\perp$ de A altında invaryanttır. Şimdi, A nın $M^\perp$ ye kısıtlamasına sonlu boyutlu $M^\perp$ vektör uzayı üzerinde kendi başına bir op. olarak bakalım.

teorem 4.3.4, A yı $M^\perp$ üzerinde en az bir özvektöre sahip olmaya zorlar. Ancak, bu mümkün değildir. Çünkü, A nın tüm özvektörleri kendi özuzayları içinde sayıldılar. Tek çözüm $M^\perp$ nin $|0\rangle$ olmasıdır. Bu

$V=M_1\oplus\cdots\oplus M_r$ ve $1=\sum_{i=1}^{r} P_i$ verir.

2. denklem, 1., 4.1 ve 4.2 den çıkar. Teoremin kalan kısmı trm 4.3.8 in ispatında kullanılan benzer tartışmalardan çıkar.

∎

Şimdi, bir normal operatörün köşegenleştirilebilmesi ile spektral teorem arasındaki ilişkiyi kurabiliriz. Her, ... altuzayda, bir ortonormal baz seçeriz. Bütün bu bazların birleşimi açıkça tüm V uzayı için bir bazdır. Bu baz vektörleri

$|e_j^s\rangle$ ile gösterelim: Açıkça,

(s: m_j altuzaydaki özel vekt. gösterir; j: altuzay)

$$\langle e_j^s | e_{j'}^{s'}\rangle = \delta_{ss'}\,\delta_{jj'} \quad \text{ve} \quad P_j = \sum_{s=1}^{m_j} |e_j^s\rangle\langle e_j^s|$$

$P_k |e_{j'}^{s'}\rangle = \delta_{kj'} |e_{j'}^{s'}\rangle$ olduğuna dikkat edersek, böyle bir bazda A nın matris elemanlarını elde ederiz:

$$\langle e_j^s | A | e_{j'}^{s'}\rangle = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \,\langle e_j^s | P_i | e_{j'}^{s'}\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \,\delta_{ij'} \,\langle e_j^s | e_{j'}^{s'}\rangle = \lambda_{j'} \langle e_j^s | e_{j'}^{s'}\rangle$$

sadece köşegen elemanları sıfırdan farklıdır. Her j indisi için, m_j tane ortonormal $|e_j^s\rangle$ vekt. vardır, burada m_j, λ_j nın katlılığıdır. Böylece, λ_j, m_j defa bir köşegen elemanı olarak görülür. Bu nedenle, böyle bir ortonormal bazda, A

$$\mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1,\ldots,\lambda_1}_{m_1 \text{ defa}}, \underbrace{\lambda_2,\ldots,\lambda_2}_{m_2 \text{ defa}}, \ldots, \underbrace{\lambda_r,\ldots,\lambda_r}_{m_r})$$

ile temsil edilecektir.

Bu tartışmayı özetleyelim:

* 4.4.7. **Öneri:** $A \in \mathcal{L}(V)$ normal $\Rightarrow$ V, A nın özvektörlerinden ibaret olan bir ortonormal baza sahiptir. Bu nedenle, kompleks iç çarpım uzayı üzerinde, bir normal op. ü köşegenleştirilebilir.

4.4.8. **Öneri:** Hermitsel bir op. pozitif 'dir sus anın tüm özdeğerleri pozitif ise.

[poz. op. (a) Hermitsel (b) $\langle a|A|a\rangle \geq 0$ tüm $|a\rangle$ ler için]

4.4.9 **Örnek:** En büyük ve en küçük özdeğerlerin hesabı:

Bir normal A op.nün en büyük ve en küçük özdeğerlerini, eğer bunların özuzayları tek boyutlu ise, veren pratik bir teknik vardır. Uygunluk için, özdeğerler azalan mutlak değerler sırasında etiketlensin:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_r| \neq 0$$

$\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{N}$, A nın özvektörlerinden ibaret olan V nin bir bazı, ve $|x\rangle = \sum_{k=1}^{N} \xi_k |a_k\rangle$, V de keyfi bir vektör olsun. O zaman,

$$A^m|x\rangle = \sum \xi_k A^m |a_k\rangle = \sum \xi_k \lambda_k^m |a_k\rangle = \lambda_1^m \Big[\xi_1 |a_1\rangle +$$

$$+ \sum_{k=2}^{N} \xi_k \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^m |a_k\rangle \Big]$$

$m \to \infty$ lim. de $\sum_{k=2}^{N} \to 0$ olur. Bu nedenle, herhangi bir $|y\rangle \in V$ için

$$A^m|x\rangle \approx \lambda_1^m \xi_1 |a_1\rangle \text{ ve } \langle y|A^m|x\rangle \approx \lambda_1^m \xi_1 \langle y|a_1\rangle$$

BS K

Bunun ve $m+1$ için olan denklemin oranlarını alırsak,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\langle y | A^{m+1} | x \rangle}{\langle y | A^{m} | x \rangle} = \lambda_1 \quad \text{elde ederiz.}$$

Bu sonuç λ_1 in dejenere olmamasına, yani M_1 in tek boyutlu olmasına bağlıdır. m için daha büyük değerler aldıkça daha iyi bir yaklaşım bulunur.

Sıfırın en küçük bir özdeğer olmadığını varsayarak, en küçük özdeğeri A yı A^{-1} ile değiştirerek, yani $\lambda_1 \to 1/\lambda_r$ bulunur.

Herhangi, verilen hermitsel bir H matrisi, standart ortonormal bir bazda hermitsel bir op.ün temsili olarak düşünülebilir. Standart bazı $|e_j^s\rangle$ lerden ibaret olan ortonormal baza dönüştüren bir U üniter matrisi bulabiliriz, burada $|e_j'\rangle$ ler hermitsel op.ün özvektörleridir. Bu yeni bazda hermitsel bir op.ün temsili UHU^+ dır.
Ancak, yukarıki tartışma yeni matrisin köşegen olduğunu gösterdi.
Böylece şu sonuca varırız:

4.4.10. <u>Önerı</u>. Hermitsel bir matris köşegen bir biçimine daima üniter bir dönüşüm yardımı ile getirilir.

4.4.11. Örnek:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1+i & -1-i \\ 0 & 0 & -1+i & 1+i \\ -1-i & -1-i & 0 & 0 \\ -1+i & 1-i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hermitsel matrisini köşegenleştirmemiş olalım!
ele

BS K

$$\det(H - \lambda \mathbb{1}) = (\lambda+2)^2 (\lambda-2)^2 \quad \left.\right\} \begin{array}{ll} \lambda_1 = -2 & m_1 = 2 \\ \lambda_2 = +2 & m_2 = 2 \end{array}$$

Özvektörler: $(H + 2\mathbb{1})|a\rangle = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1+i & -1-i \\ 0 & 2 & -1+i & 1+i \\ -1-i & -1-i & 2 & 0 \\ -1+i & 1-i & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \underset{\sim}{0} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_3 = \frac{1}{2}(1+i)(\alpha_1+\alpha_2) \\ \alpha_4 = \frac{1}{2}(1-i)(\alpha_1-\alpha_2) \end{array}$$

iki keyfi parametre var, iki lineer bağımsız çözüm seçeriz:

$2\alpha_1 = 0$, $8\alpha_2 = 0$) ikisi de sıfırdanır

$\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 0$ için $|a_1\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$

$\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2$ " $|a_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1+i \\ -1+i \end{pmatrix}$

$\langle a_1 | a_2 \rangle = 0$ dik ⊥.

normalize eder isek,

$$|e_1\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1+i \\ 1-i \end{pmatrix} \; ; \quad |e_2\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1+i \\ -1+i \end{pmatrix}$$

Benzer şekilde 2. özdeğer denk.i $(H - 2\cdot\mathbb{1})|a\rangle = 0$ şu çözümü verir:

$$\alpha_3 = -\frac{1}{2}(1+i)(\alpha_1+\alpha_2) \qquad \alpha_4 = -\frac{1}{2}(1-i)(\alpha_1-\alpha_2)$$

$$|e_3\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1-i \\ -1+i \end{pmatrix} \qquad |e_4\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1-i \\ 1-i \end{pmatrix}$$

BS K

H yi köşegenleştiren matris bu 4 vektörden kurulur:

$$U^{+} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1+i & 1+i & -1-i & -1-i \\ 1-i & -1+i & -1+i & 1-i \end{pmatrix}$$

$$U = \left(U^{+}\right)^{+} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-i & 1+i \\ 0 & 2 & 1-i & -1-i \\ 2 & 0 & -1+i & -1-i \\ 0 & 2 & -1+i & 1+i \end{pmatrix};$$

$$U H U^{+} \rightarrow \text{köşegen.}$$

4.4.12. Örnek: z-ekseni boyunca uzanan bir manyetik alan içinde yüklü bir parçacığın hareketini ele alalım.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} = q \det \begin{pmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{m} v_y \qquad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB}{m} v_x \, , \qquad \frac{dv_z}{dt} = 0$$

bunu birlikte xy deki hareketle bulalım

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \frac{qB}{m}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = -i\underbrace{\omega}_{\frac{qB}{m}} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

bu 2x2 köşegen olsa idi iki çözüm çiftlenmemiş olurdu.

BS K

Bu matrisin köşegenleştirilmesi demek,

$$D = \underset{\sim}{R} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{R}^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

olacak şekilde bir $\underset{\sim}{R}$ bulmak demektir. Böyle bir köşegenleştirme yapabilse idik, 4.10 u $\underset{\sim}{R}$ ile çarparak

$$\frac{d}{dt} R \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = -i\omega R \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} R^{-1} R \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x' \\ v_y' \end{pmatrix} = -i\omega \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x' \\ v_y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\omega \mu_1 v_x' \\ -i\omega \mu_2 v_y' \end{pmatrix}$$

$$\frac{dv_x'}{dt} = -i\omega \mu_1 v_x' \qquad \frac{dv_y'}{dt} = -i\omega \mu_2 v_y'$$

$$v_x' = v_{0x}' e^{-i\omega \mu_1 t} \qquad v_y' = v_{0y}' e^{-i\omega \mu_2 t}$$

$\underset{\sim}{R}$ yi bulmak için $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin normalize özvektörlerine ihtiyaç vardır. (Bkz. Örn 4.4.4)

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R^{-1} = R^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = (R^{+})^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

BS K

$$\underset{\sim}{R}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mu_1 = 1,\ \mu_2 = -1$$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \underset{\sim}{R}^{+} \begin{pmatrix} v_x' \\ v_y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{0x}' e^{-i\omega t} \\ v_{0y}' e^{i\omega t} \end{pmatrix}$$

$t=0$ -ba V_{0x} V_{0y} [illegible] x és y [illegible],

$$\begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix} = R^{+} \begin{pmatrix} v_{0x}' \\ v_{0y}' \end{pmatrix} \quad \text{[illegible]} \quad \begin{pmatrix} v_{0x}' \\ v_{0y}' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -iv_{0x} + v_{0y} \\ iv_{0x} + v_{0y} \end{pmatrix}$$

[illegible]

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-iv_{0x} + v_{0y}) e^{-i\omega t} \\ (iv_{0x} + v_{0y}) e^{i\omega t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v_{0x} \cos \omega t + v_{0y} \sin \omega t \\ -v_{0x} \sin \omega t + v_{0y} \cos \omega t \end{pmatrix}$$

BS K

Fiziksel bir çok durumda, iki operatörün eş zamanlı köşegenleş-tirilebileceğini bilmek arzu edilir. Örneğin, iki op. ün eş zamanlı özvektörlerinden ibaret olan kuantum mekaniksel bir sistemin bir Hilbert uzayının bir bazı varsa, bu iki operatör aynı anda ölçülebilir. Özellikle, bunlar belirsizlik bağıntısı ile kısıtlanmamıştır.

4.4.13. **Tanım:** İki op. eş zamanlı köşegenleştirilebilir denir, eğer bunlar aynı izdüşüm operatörler kümesi cinsinden yazılabilirse (teorem 4.4.6 daki gibi)

İki op. ün aynı anda köşegenleştirilebilmesi için koşullar nedir?

Açıkça, gerekli koşul bu iki op. ün sıra değiştirmesidir. Bu ise İD nin diklliğinin bir sonucudur; bütün i ve j ler için $P_iP_j = P_jP_i$. Bu iki op. ün matris gösteriminde de bellidir: herhangi iki köşegen matris sıra değiştirir. Yeterlik için ne diyebiliriz? Yani, iki op. ün sıra değiştirmesi bunların aynı anda köşegenleştirilebilmesi için yeterli midir? Bunun için şu lemma gereklidir.

4.4.14 **Lemma:** Bir T op. ü, bir normal A op. ü ile sıra değiştirir **sys** T, A nın tüm İD leri ile sıra değiştirir ise,

İspat: "S" ≡ if kısmı önemsizdir "only if = vs" kısmının ispatı için, $AT = TA$ varsayalım ve $|x\rangle$, A nın özuzaylarından biri (M_j olsun) içinde herhangi bir vektör olsun.

O zaman,

$$A(\underline{\underline{T|x\rangle}}) = T(A|x\rangle) = T(\lambda_j|x\rangle) = \lambda_j(\underline{\underline{T|x\rangle}})$$

yani, $T|x\rangle$ $\mathcal{M}_j$ içerisinde yada da $\mathcal{M}_j$ T altında invaryant. $\mathcal{M}_j$ keyfi olduğundan T tüm uzaylar invaryant bırakır. Özellikle, $\mathcal{M}_j$ nin dik tümleyeni $\mathcal{M}_j^\perp$ yi invaryant bırakır. 4.2.3 ve 4.2.5 teoremlerinden $TP_j = P_jT$; ve bu tüm j ler için geçerlidir.

4.4.15 **Teorem**: İki normal A ve B op-nün aynı anda köşegenleştirilebilmesi için gerek ve yeter koşul $[A,B]=0$.

İspat: Gerek koşulun ispatı önemsiz. Yeterlilik için,

$$\underset{\sim}{A} = \sum_j^r \lambda_j P_j \qquad \underset{\sim}{B} = \sum_{k=1}^{s} \mu_k \underset{\sim}{Q_k}$$ olsun burada $\{\lambda_j\}$ ve $\{\underset{\sim}{P_j}\}$ ler $\underset{\sim}{A}$ nın özdeğer ve izdüşümleri; $\{\mu_k\}$ ve $\{\underset{\sim}{Q_k}\}$ ise B ninkiler. $[A,B]=0$ varsayalım. O zaman, Lemma 4.4.14 den,

$A Q_k = Q_k A$ Mademki $[A, Q_k]=0$, öyle ise $[P_j, Q_k]=0$ olmalı. İspatı tamamlamak için $R_{jk} \equiv P_j Q_k$ tanımlayalım ve

$$R_{jk}^\dagger = (P_j Q_k)^\dagger = Q_k^\dagger P_j^\dagger = Q_k P_j = P_j Q_k = R_{jk} \checkmark$$

$$(R_{jk})^2 = (P_j Q_k)^2 = P_j Q_k P_j Q_k = P_j P_j Q_k Q_k$$

$$= P_j Q_k = R_{jk} \checkmark$$

R_j hermitsel İO dür. Dahası,

$$\sum_{j=1}^r R_{jk} = \underbrace{\sum_{j=1}^r P_j}\, Q_k = Q_k$$

BS K

Benzer şekilde, $\sum_{k=1}^{s} R_{jk} = \sum_{k=1}^{s} P_j Q_k = P_j$

Şimdi A ve B yi şöyle yazabiliriz:

$$A = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j P_j = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{s} \lambda_j R_{jk}$$

$$B = \sum_{k=1}^{s} \mu_k Q_k = \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{r} \mu_k R_{jk}$$

tanım gereği bunlar aynı anda köşegenleştirilebilir. ∎

4.4.16 **Örnek:**

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$ Pauli spin matrisinin spektral ayrışımını bulalım.

Özdeğer ve özvektörler:

$$\lambda_1 = 1 , \quad |e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} ; \quad \lambda_2 = -1 , \quad |e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$\mathcal{M}_{\lambda_j}$ altuzaylar tek boyutludur:

$$\underset{\sim}{P}_1 = |e_1\rangle\langle e_1| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{P}_2 = |e_2\rangle\langle e_2| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{P}_1 + \underset{\sim}{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = \sigma_2$$

BS K

En genel $\underset{\sim}{T}$ op.nü köşegenleştirmek için üzerine hangi kısıtlamalar koymalıyız? T nin, $T = H + iH'$ şeklinde yazılabileceğini gördük; H, H' Hermitsel. Teorem 4.4.6 ya göre bunlar ayrışabilir. T ile ayrışabilir sonucuna varabilir miyiz? Hayır, ✓ Çünkü H nin ayrışımında kullanılan IO ları H′ için kullanılanlar ile aynı olmayabilir. Ancak, H ve H′ aynı anda köşegenleştirilebilirler ise, diyelim,

$$H = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k P_k \qquad H' = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k' P_k$$

O zaman, $T = \sum_{k=1}^{r} (\lambda_k + i\lambda_k') P_k$. Buradan, T nin bir spektral ayrışıma sahip olduğu, ve bu nedenle köşegenleştirilebileceği sonucu çıkar. Teorem 4.4.15, şimdi $[H, H'] = 0$ olması gerektiğini söyler. Madem ki

$$H = \frac{1}{2}(T + T^{+}) \quad \text{ve} \quad H' = \frac{1}{2i}(T - T^{+})$$

$$[H, H'] = 0 \quad \text{sus} \quad [T, T^{+}] = 0 \text{ dır} \quad \text{yani T normaldir}$$

4.5. Operatörlerin fonksiyonları:

Dönüşümlerin fonksiyonlarını Böl. 2 de gördük. Spektral ayrışım ile önemli sonuçlar çıkarabiliriz:

$$T = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i \Rightarrow P_i \text{ ler dikliğinden}$$

$$T^2 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2 P_i, \ldots, T^n = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^n P_i$$

BS K

Böylece, T nin herhangi bir p polinomu, $p(T)=\sum_{i=1}^{r} p(\lambda_i) P_i$ ile verilen bir spektral ayrışıma sahiptir. Bunu kuvvet serisine açılabilir fonksiyonlara genelleştirirsek,

$$f(T)=\sum_{i=1}^{\infty} f(\lambda_i) P_i \qquad (4.13)$$

4.1.1. **Örnek**: $U=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ nın spektral ayrışımını inceleyelim.

U (üniter ve dik) matrisin özdeğerleri:

$$\det\begin{pmatrix} \cos\theta-\lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2-2\cos\theta\,\lambda+1=0$$

$$\lambda_1=e^{-i\theta}, \quad \lambda_2=e^{i\theta}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta-e^{\pm i\theta} & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta-e^{\pm i\theta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha_2=\mp i\alpha_1$$

$$|e_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad |e_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$\mathcal{M}_{\lambda_j}$ tek boyutlu ve $|e_j\rangle$ tarafından gerilir.

$$P_1=|e_1\rangle\langle e_1|=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}(1 \ \ -i)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2=|e_2\rangle\langle e_2|=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}(1 \ \ i)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

BSK

$$P_1 + P_2 = 1$$

$$e^{-i\theta} P_1 + e^{i\theta} P_2 = U$$ ve 4.13 ü kullanarak,

$$\ln U = \ln(e^{-i\theta}) P_1 + \ln(e^{i\theta}) P_2$$?

$$= -i\theta P_1 + i\theta P_2 = i(-\theta P_1 + \theta P_2) \equiv iH$$ Hermitsel

$$U = e^{iH} \qquad H = \theta(-P_1 + P_2) = \theta \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

2×2 ünite U matrisi antihermitsel bir op. un üsteli olarak yazılabilir.

4.7.1 teorem: Sonlu boyutlu kompleks iç çarpım uzayı üzerinde bir U ünite op-ü, H hermitsel olmak üzere $U = e^{iH}$ olarak yazılabilir. Dahası, ünite bir matris ünite bir dönüşüm matrisi ile köşegen biçimine konulabilir.

Bir op-un faydalı bir fonk.u onun karekökü'dür. Bir op-un karekökü'nü tanımlamanın en doğal yolu,

$$\sqrt{A} = \sum_{i=1}^{r} \left(\pm\sqrt{\lambda_i}\right) P_i$$

4.7.3 Tanım: Pozitif bir op. $A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i$ nin pozitif karekökü

$$\sqrt{A} = \sum_{i=1}^{r} \sqrt{\lambda_i}\, P_i \text{ dir.}$$

Spektral ayrışımın tekliği, pozitif bir op-un $\sqrt{\ }$ nın tek olmasını gerektirir.

4.5.4. Örnek: $A=\begin{pmatrix} 5 & 2i \\ -2i & 5 \end{pmatrix}$ için $\sqrt{A}$ yı bul.

karakteristik denk. $\lambda^2-10\lambda+16=0$ $\lambda_1=8$, $\lambda_2=2$ iki özdeğer pozitif ve A hermitsel'dir, A nın pozitif olduğu sonucuna varırız.

$$|e_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |e_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1=|e_1\rangle\langle e_1|=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad P_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{A}=\sqrt{\lambda_1}\,P_1+\sqrt{\lambda_2}\,P_2=\sqrt{8}\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}+\sqrt{2}\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{A}\right)^2=A$$

Sezgisel olarak, T nin yüksek kuvvetleri, uzayın bütün vektörlerine etkidikçe, sonunda bütün vektörleri tüketir, ve kuvvetin daha da artması, ardışık kuvvetlerin bir tekrarı olacaktır. $T^n=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^n P_i$ olduğunu gördük. Çeşitli n ler için P_i yi T nin kuvvetleri cinsinden çözebiliriz. Sonlu sayıda P_i olduğundan T nin sonlu sayıda kuvveti yeterli olacaktır. Gerçekte, P_i için T ye göre polinom kurabiliriz. ~~Eğer~~ şöyle bir polinom varsa, (4.13) den

$$P_i=p_i(T)=\sum_{k=1}^{r}p_i(\lambda_k)P_k \quad \text{sağlanacaktır};$$

burada p_j belirlenecek olan polinom'dur. İO lerinin dikliğinden $k=j$ olmadıkça $p_j(\lambda_k)$ 0, olmalıdır, $k=j$ için ise 1 olmalıdır. Diğer bir deyimle, $p_j(\lambda_k)=\delta_{kj}$. Böyle bir pol. açık bir şekilde kurulabilir:

$$p_j(x) = \frac{(x-\lambda_1)}{(\lambda_j-\lambda_1)}\frac{(x-\lambda_2)}{(\lambda_j-\lambda_2)}\cdots\frac{(x-\lambda_r)}{(\lambda_j-\lambda_r)} = \prod_{k\neq j}^{r}\frac{x-\lambda_k}{\lambda_j-\lambda_k}$$

Bu nedenle,

$$\underset{\sim}{P}_j = p_j(\underset{\sim}{T}) = \prod_{k\neq j}^{r}\frac{T-\lambda_k\mathbb{1}}{\lambda_j-\lambda_k} \qquad (4.15)$$

4.5.5 Önerti: Sonlu boyutlu bir vektör uzayı üzerindeki normal bir op.'ün her fonk.u, bir polinom olarak ifade edilebilir. Gerçekten, (4.13) ve (4.15) denklemlerinden,

$$f(\underset{\sim}{T}) = \sum_{j=1}^{r} f(\lambda_j)\underset{\sim}{P}_j = \sum_{j=1}^{r} f(\lambda_j)\prod_{k\neq j}^{r}\frac{T-\lambda_k\mathbb{1}}{\lambda_j-\lambda_k} \qquad (4.16)$$

4.5.6 Örnek: Son örnekteki $\sqrt{A}$ 'yı A 'nın pol.u olarak yazalım.

$$p_1(A) = \prod_{k\neq 1}^{2}\frac{A-\lambda_k\mathbb{1}}{\lambda_1-\lambda_k} = \frac{A-\lambda_2\mathbb{1}}{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{1}{6}(A-2)$$

$$p_2(A) = \prod_{k\neq 2}^{2}\frac{A-\lambda_k\mathbb{1}}{\lambda_2-\lambda_k} = \frac{A-\lambda_1\mathbb{1}}{\lambda_2-\lambda_1} = -\frac{1}{6}(A-8)$$

bunları buraya yerleştir.

$$\sqrt{A} = \sqrt{\lambda_1}\,p_1(A)+\sqrt{\lambda_2}\,p_2(A) = \frac{\sqrt{8}}{6}(A-2)-\frac{\sqrt{2}}{6}(A-8) = \frac{\sqrt{2}}{6}A+\frac{\sqrt{8}}{3}$$

BS K

4.6. Kutupsal Ayrışım: (KA)

Op.ler ve kompleks sayılar arasında birçok benzerlik gördük. Genel bir kompleks sayı $re^{i\theta}$ olarak yazılabilir. Keyfi bir op.ü benzer bir yolla yazabilir miyiz?

4.6.1 **Teorem:** (KA teoremi) Sonlu boyutlu kompleks bir iç çarpım uzayı üzerinde bir $\underset{\sim}{A}$ op.ü $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{U}\underset{\sim}{R}$ olarak yazılabilir; burada $\underset{\sim}{R}$, bir (tek) pozitif op, ve $\underset{\sim}{U}$ bir ünitar op.dur. A terslenebilir ⇒ U de tekildir.

İspat: teoremi op.ün terslenebilir olduğu durum için ispatlayacağız. gösterilebilir ki $A^{\dagger}A$ pozitiftir. Bu nedenle, bunun tek bir pozitif karekökü $R = \sqrt{A^{\dagger}A}$ op.ü vardır. $V = RA^{-1}$ ya da $VA = R$ alalım.

$$VV^{\dagger} = RA^{-1}(RA^{-1})^{\dagger} = RA^{-1}(A^{-1})^{\dagger}R^{\dagger} = R(A^{\dagger}A)^{-1}R^{\dagger}$$

$$= R(R^2)^{-1}R^{\dagger} = R(R^{\dagger}R)^{-1}R^{\dagger} = RR^{-1}R^{\dagger -1}R^{\dagger} = 1$$

$$V^{\dagger}V = 1.$$

V gerçekten ünitar bir op.dur. $U = V^{\dagger}$ seçilirse arzu edilen ayrışım elde edilir. Tekliğini ispatlamak için şuna dikkat ederiz:

$UR = U'R' \Rightarrow R = U^{\dagger}U'R'$ ve

$$R^2 = R^{\dagger}R = (U^{\dagger}U'R')^{\dagger}(U^{\dagger}U'R') = R'^{\dagger}U'^{\dagger}UU^{\dagger}U'R' = R'^{\dagger}R' = R'^2$$

BS K

Pozitif dönüşüm R^2 (ya da R'^2) sadece pozitif bir $\sqrt{\ }$ e sahip olduğundan, şu sonuç çıkar: $R = R'$

A terslenebilir $\Rightarrow$ $R = U^\dagger A$ da böyledir. Bu nedenle,

$$UR = U'R \Rightarrow URR^{-1} = U'RR^{-1} \Rightarrow U = U' \text{ ve } \underline{U \text{ tektir.}}$$

Not: R nin pozitif definite olması ve U nun tek olmaması, r nin pozitif ve $e^{i\theta}$ nın tek olmamasına benzer:

$$z = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2n\pi)} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Pratikte, R, $A^\dagger A$ yı spektral ayrıştırarak ve onun pozitif $\sqrt{\ }$ alınarak bulunur. Bir kez R bulununca, U, $A = RU$ dan bulunur.

4.6.2 **Örnek**: $A = \begin{pmatrix} -2i & \sqrt{7} \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ polar ayrışımını bulalım.

$$R^2 = A^\dagger A = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ \sqrt{7} & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2i & \sqrt{7} \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2i\sqrt{7} \\ -2i\sqrt{7} & 16 \end{pmatrix}$$

R^2 nin özdeğer ve özvektörleri; $\left(\lambda_1 = 18, \ \lambda_2 = 2\right)\left(|e_1\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ \sqrt{7} \end{pmatrix}, |e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{7} \\ i \end{pmatrix}\right)$

$$P_1 = |e_1\rangle\langle e_1| = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{7} \\ -i\sqrt{7} & 7 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = |e_2\rangle\langle e_2| = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 7 & -i\sqrt{7} \\ i\sqrt{7} & 1 \end{pmatrix}$$

BS K

BS K

$$R = \sqrt{\lambda_1}\, P_1 + \sqrt{\lambda_2}\, P_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5\sqrt{2} & i\sqrt{14} \\ -i\sqrt{14} & 11\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$\det A \neq 0$, A terslenebilir, bu R de terslenebilir demektir.

$$R^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 11\sqrt{2} & -i\sqrt{14} \\ i\sqrt{14} & 5\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$U = AR^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} -i15\sqrt{2} & 3\sqrt{14} \\ 3i\sqrt{14} & 15\sqrt{2} \end{pmatrix}$$ U gerçekten üniterdir.

14.7. Gerçel Vektör Uzayları: (GVU)

Buraya kadar olan inceleme kompleks iç çarpım uzaylar üzerinde odaklandı. Reel sayılar üzerinde tanımlanan (VU) kompleks uzaylar için geliştirilen bazı teorem ve sonuçları sağlamayacaktır. Ancak, gerçel bir VU nun kompleksleştirilmesi denilen bir süreçle (böyle bir uzaya sanal bir kısım eklenir) kompleks uzay için elde edilen sonuçları ispatlamak mümkündür.

4.7.1. **teorem:** Gerçel bir simetrik operatör, teorem 4.6.6 da gösterildiği gibi bir spektral ayrışımı vardır. Bu teorem özellikle klasik fizik uygulamalarında faydalıdır. Tipik bir durum, bir vektörün diğerine simetrik bir matris ile bağlandığı durumdur. O zaman iki vektörün birbirine basit bir şekilde bağlandığı bir koordinat sistemi bulmak uygundur. Bu simetrik matrisin dönme ile köşegenleştirilmesi demektir. 4.7.1 teoremi bu köşegenleştirmeyi mümkün kılar.

9.7.2 **Örnek:** Katı bir cismi oluşturan N nokta parçacık sistemi için, toplam açısal mom. $\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i)$, açısal frekansa bağlanır:

$$\vec{L} = \sum_i m_i [\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)] = \sum_i m_i [\omega \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i - \vec{r}_i (\vec{r}_i \times \vec{\omega})]$$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$I_{xx} = \sum m_i (r_i^2 - x_i^2) \quad I_{yy} = \sum m_i (r_i^2 - y_i^2) \quad I_{zz} = \sum_i m_i (r_i^2 - z_i^2)$$

$$I_{xy} = -\sum m_i x_i y_i \quad I_{xz} = -\sum m_i x_i z_i \quad I_{yz} = -\sum m_i y_i z_i$$

$$I_{xy} = I_{yx} \quad \text{v.s.}$$

Sim. dik ve dik dönüşüm ile köşegen hale gelir. Üç boyutta dik bir dönüşüm sadece koordinatların bir dönüşümüdür. Böylece, teorem 9.7.1. e göre, koordinat sistemlerini bu matris köşegen olacağı şekilde seçmek daima mümkündür. Böyle bir koordinat sisteminde,

$$L_x = I_{xx} \omega_x \qquad L_y = I_{yy} \omega_y \qquad L_z = I_{zz} \omega_z$$

Benzer şekilde, dönen katı bir cismin KE si,

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum \frac{1}{2} m_i \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{v}_i)$$

$$= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \omega^t I \omega = \frac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2$$

BS K

4.7.3. **Örnek**: Bir konik kesitin denkleminin en genel biçimi

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 xy + a_4 x + a_5 y + a_6 = 0 \qquad a_i \text{ ler sabitler.}$$

Eğer koordinat eksenleri, konik kesitinin asal eksenleri ile çakışırsa, xy terimi olmayacaktır. Geometrik nedenle, xy-eksenlerini asal eksenlere döndürebiliriz. Genel konik denklemi matris formunda,

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_3/2 \\ a_3/2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_4 & a_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_6 = 0$$

olarak yazabiliriz. 2×2 matris sim. ve bu nedenle dik bir $\underset{\sim}{R}$ matrisiyle köşegenleştirilebilir. O zaman, $R^t R = 1$ ve

$$(x \ \ y) R^t \underbrace{R \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} R^t}_{\begin{pmatrix} a_1' & 0 \\ 0 & a_2' \end{pmatrix}} \underbrace{R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}} + (a_4 \ \ a_5) R^t \underbrace{R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{} + a_6 = 0$$

$$R \begin{pmatrix} a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_4' \\ a_5' \end{pmatrix} \text{ olsun.}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1' & 0 \\ 0 & a_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_4' & a_5' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + a_6 = 0$$

ya da

$$a_1' x'^2 + a_2' y'^2 + a_4' x' + a_5' y' + a_6 = 0$$

4.7.4. **Örnek**: Bir $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ noktası bir $f(x_1, \dots, x_n) \equiv f(\bar{r})$ fonk.nunun bir maks.(min.) noktasıdır, eğer

$$\nabla f\Big|_{x_i=a_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{x_i=a_i} = 0$$

ve küçük $x_i - a_i$ için $f(\bar{r}) - f(\bar{a})$ negatif (pozitif) ise. Bu farkı, bu tanımın koşullarını sağlamak için fonk.u $\bar{a}$ civarında Taylor serisine açalım ve 2. mertebeye kadar olan terimleri alalım.

$$f(\bar{r}) = f(\bar{a}) + \cancel{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\bar{r}=\bar{a}}} + \frac{1}{2} \sum_{ij}^{n} (x_i - a_i)(x_j - a_j) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_{\bar{r}=\bar{a}}$$

$$f(\bar{r}) - f(\bar{a}) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \overset{\text{sütun}}{\delta_i} \delta_j D_{ij} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} \delta^t D \delta$$

$\bar{a}$ nın f nin min. noktası olması için RHS > 0 olmalı keyfi δ için. Bu ise D pozitif matris olmalı demektir. Böylece tüm özdeğerleri pozitif olmalı. Tersi tartışma maks. için geçerli. Bu tartışma 2-boyutta özelleştirilebilir.

Simetrik op. ler için spektral ayrışımın ele alınışı oldukça dolambaçsız olmasına karşılık, dik op. ler durumunda (gerçel VU-uzaydaki üniter op. lerin karşılığı) durumunda bu daha karmaşıktır. Gerçekten 2. boyutta dik bir dönüşümün özdeğerleri genelde kompleksdir. Bu simetrik dönüşümlere terstir. $\underset{\sim}{O}$ dik op.nu üniter bir op. olarak düşünelim. Üniter bir op. un özdeğerlerinin mutlak değeri 1 olduğundan, tek gerçel seçenek ± 1 dir.

Diğer özdeğerleri bulmak için, bir üniter op. olarak $\underset{\sim}{O} = e^{A}$ olarak yazılabilir. (A anti-hermitsel olmak üzere). Hermitsel eşleniklik ve transpoze alma gerçel vektör uzaylar için aynı olduğundan, $A = -A^t$ sonucuna varırız ve A antisimetriktir. A gerçel'dir de çünkü, $\underset{\sim}{O}$ da böyledir.

Şimdi $\underset{\sim}{A}$ nın özdeğerlerini alalım. λ, A nın $|a\rangle$ özvektörü-ne karşılık gelen bir özdeğeri ise, $\langle a|A|a\rangle = \lambda\langle a|a\rangle$.

$\langle a|A^{+}|a\rangle = \lambda^{*}\langle a|a\rangle$ ← bunun eşleniği verir, ancak

$A^{+} = A^{t} = -A$ dır. çünkü A gerçel ve antisimetriktir.

Bu nedenle, $\langle a|A|a\rangle = -\lambda^{*}\langle a|a\rangle \Rightarrow \lambda^{*} = -\lambda$ elde ederiz.

Eğer λ yı gerçel olmaya kısıtlarsak, bu ancak sıfır olur; aksi takdirde saf sanal olmalıdır. Kolayca görüleceği gibi λ, A nın özdeğeri ise $-\lambda$ da böyledir. Bu nedenle, A nın köşegen biçimi şuna benzer:

$$A_{diag} = \mathrm{diag}(0, 0, \ldots, i\theta_1, -i\theta_1, i\theta_2, -i\theta_2, \ldots\ i\theta_k, -i\theta_k)$$

BS K

$$O_{diag} = e^{A_{diag}} = \mathrm{diag}\left(e^{0}, e^{0}, \ldots, e^{i\theta_1}, e^{-i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_k}, e^{-i\theta_k} \right)$$

$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ gerçel. Açıkça, $\mathcal{O}$'nun bir özdeğeri -1 ise θ lardan bazıları $\pm\pi$ ye eşit olmalı. Bunları θ lardan ayırırsak,

$$O_{diag} = \mathrm{diag}\left(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{N_+}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{N_-}, e^{i\theta_1}, e^{-i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_m}, e^{-i\theta_m} \right)$$

elde ederiz. burada $N_+ + N_- + 2m = \dim \underset{\sim}{O}$. Her $e^{\pm i\theta_j}$ çiftine,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j \end{pmatrix} \equiv R_2(\theta_j)$$

biçiminde 2×2 lik bir matris karşılık geldiğini söyleyebiliriz.

4.7.5. <u>teorem</u>: Gerçel bir V iç çarpım uzayı üzerinde gerçel bir dik op. genel olarak tamamiyle köşegenleştirilemez. Köşegene gidebileceği en yakın biçim

$$O_{diag} = \mathrm{diag}\left(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}, \underbrace{-1, -1, \ldots, -1}, R_2(\theta_1), R_2(\theta_2) \ldots R_2(\theta_m) \right)$$

dir; burada $N_+ + N_- + 2m = \dim V$ ve $R_2(\theta_j)$ dir. Dahası, dik bir matrisi yukarıki biçime dönüştüren matrisin kendisi de bir dik matris'dir.

BS K

4.7.6. Örnek: Bu son teoremin ilginç bir uygulaması klasik mek.te karşımıza çıkar; bir katı cismin hareketi, öteleme ve dönme den ibarettir. teorem 4.7.5 bize şunu söyler: koordinat sist.inin uygun bir şekilde seçimi ile 3×3 lük dik matris köşegenleştirilebilir. Köşegen bilimi

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & & 0 \\ & \pm 1 & \\ 0 & & \pm 1 \end{pmatrix} \text{ ya da } \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(−1) yansıma (+1) özdeşlik dönmesi; bir kenara bırakırsak, bir katı cismin herhangi bir dönmesi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$ (x_ek. etraf. dön.) olarak yazılabilir.

Bu örnekteki dönmeyi ötelemeler ile birleştirirsek, aşağıdaki teoremi elde ederiz.

4.7.7. Euler Teoremi: Katı bir cismin genel hareketi, bu cismin bir noktasının ötelenmesi ve bu noktadan geçen bir eksen etrafında dönmeden ibarettir.

Nihayet, gerçel iç çarpım uzayları için kutupsal ayrışım:

4.7.8. Teorem. Gerçel iç çarpım uzayı üzerinde herhangi bir A op. ı $A = OR$ olarak yazılabilir; burada R, bir (tek) simetrik pozitif op. ı ve O diktir.

BS K

4.7.9. Örnek: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ yi kutupsal biçimde ayıralım.

$$R^2 = A^t A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad |e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad P_1 = |e_1\rangle\langle e_1| = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 16 \qquad |e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad P_2 = |e_2\rangle\langle e_2| = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \sqrt{R^2} = \sqrt{\lambda_1}\, P_1 + \sqrt{\lambda_2}\, P_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$$

A terslenebilir; R de terslenebilir.

lüktür.

$$R^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 17 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad O = AR^{-1} \Rightarrow O = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

4.7.10 Öneri: Bir matrisin karakteristik pol.unun köklerinin tamamı basit ise, o zaman bu matris köşegen biçime bir benzerlik dönüşümü (üniter olması gerekmez) yardımı ile getirilebilir.

4.7.11. Örnek:

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \; e^{-\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij} x_i x_j} \qquad 4.18$$

gerçel, sim. poz. def. M matrisinin elemanları.

integralini hesaplayalım.

BS K

simetrik olduğundan M, dik bir R matrisi ile köşegenleştirilebilir, öyleki, $RMR^t = D$ köşegen bir matristir ve elemanları ise $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (M'nin özdeğerleri). $\det R$ dahi 1'dir.

$$\sum_{ij} m_{ij} x_i x_j = x^t M x = x^t R^t R M R^t R x = x'^t D x'$$
$$= \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \dots + \lambda_n x_n'^2$$

$$x' = Rx = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ya da $\quad x_i' = \sum_{j=1}^n r_{ij} x_j \qquad i = 1, 2, \dots, n.$

Benzer şekilde, $x = R^t x'$ olduğundan $x_i = \sum_{j=1}^n r_{ji} x_j'$

Hacim elemanı,

$$dx_1 \dots dx_n = \left| \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(x_1', x_2', \dots, x_n')} \right| dx_1' \dots dx_n' = |\det J|\, dx_1' \dots dx_n'$$

Ancak, $\dfrac{\partial x_i}{\partial x_j'} = r_{ji} \Rightarrow J = R' \Rightarrow |\det J| = |\det R'| = 1$

Jacobian matrisinin ij'nci elemanı $\partial x_i / \partial x_j'$ dir

x' cinsinden I_n integrali

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1' \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n'\, e^{-\lambda_1 x_1'^2 - \dots - \lambda_n x_n'^2}$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_1}} \dots \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_n}} = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\lambda_1 \dots \lambda_n}} = \pi^{n/2} (\det M)^{-1/2}$$

Sonuç: $\int_{-\infty}^{+\infty} d^n x\, e^{-x^t M x} = \pi^{n/2} (\det M)^{-1/2} \Rightarrow \det M = \pi^n \Big/ \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d^n x\, e^{-x^t M x} \right)^2$

Ç.1. U_1 ve U_2 V nin altuzayları olsunlar. (a) $\dim(U_1+U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$ (b) $U_1+U_2 = V$ ve $\dim U_1 + \dim U_2 = \dim V$ ise $V = U_1 \oplus U_2$ (c) $\dim U_1 + \dim U_2 > \dim V$ ise $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$ olduklarını gösteriniz.

(a) $U_1 \cap U_2$ sonlu bir uzaya sahiptir; $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ olsun.

$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m\}$ U_1 için bir baz

$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ U_2 " " olsun

U_1+U_2 altuzayı,

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m, \gamma_1, \dots, \gamma_n$$

vektörleri tarafından gerilir. ve bu vektörler bağımsız bir küme oluştururlar.

$$\sum x_i \alpha_i + \sum y_i \beta_i + \sum z_k \gamma_k = 0$$

olduğunu varsayalım. O zaman

$$-\sum_k z_k \gamma_k = \sum_i x_i \alpha_i + \sum_i y_i \beta_i$$

yazılır ki bu da nın U_1 e ait olduğunu gösterir. U_2 ye de ait olduğundan, belli $c_1, \dots, c_k$ lar için

$$\sum z_k \gamma_k = \sum c_i \gamma_i$$

çıkar.

$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ kümesi bağımsız olduğundan z_k skalerlerinden herbiri sıfırdır. Böylece,

$$\sum x_i \alpha_i + \sum y_j \beta_j = 0$$

$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m\}$ de bağımsız bir küme olduğundan (her $y_i = 0$ ve her $x_i = 0$ dır) Böylece,

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$$

$U_1 + U_2$ için bir bazdır. Son olarak

$$\dim U_1 + \dim U_2 = (k+m) + (k+n)$$

$$= k + (m+k+n)$$

$$= \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2)$$

4.7. A ve B operatörleri $[A, B] = 1$ komütasyon bağıntısını sağlamaktadırlar. $|b\rangle$ B nin λ özdeğerli özvektörü olsun. $e^{-\tau A}|b\rangle$ nın B nin $\lambda + \tau$ " özvektörü olduğunu gösterin. $[B, e^{-\tau A}]$ yı bulun.

$[\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}] = 1 \qquad B|b\rangle = \lambda|b\rangle$

$$B \underbrace{e^{-\tau A}|b\rangle} = (\lambda + \tau)\underbrace{e^{-\tau A}|b\rangle} \quad ?$$

$$[B, e^{-\tau A}] = [B, (1 - \frac{\tau}{1!}A + \frac{\tau^2}{2!}A^2 + \dots)]$$

BS K

$$[B, e^{-\tau A}] = [B, 1] - \frac{\tau}{1!}[B, A] + \frac{\tau^2}{2!}[B, A^2] - \frac{\tau^3}{3!}[B, A^3] + \dots$$

$$[B, A^k] = k A^{k-1}$$

$$[B, e^{-\tau A}] = \tau \mathbb{1} - \frac{\tau^2}{2!} 2A + \frac{\tau^3}{3!} 3A^2 + \dots$$

$$= \tau \left[1 - \frac{\tau}{1!} A + \frac{\tau^2}{2!} A^2 + \dots \right] = \tau e^{-\tau A}$$

$$B e^{-\tau A} - e^{-\tau A} B = \tau e^{-\tau A}$$

$$\Rightarrow B e^{-\tau A} |b\rangle - e^{-\tau A} \underbrace{B |b\rangle}_{\lambda |b\rangle} = \tau e^{-\tau A} |b\rangle$$

$$B \underbrace{e^{-\tau A} |b\rangle} = (\lambda + \tau) \underbrace{e^{-\tau A} |b\rangle}$$

4.8. involutive op.-ın $A^2 = \mathbb{1}$ olan op. özdeğerlerini bulunuz.

$$A|a\rangle = \lambda |a\rangle \Rightarrow A^2 |a\rangle = \lambda^2 |a\rangle$$

$$\mathbb{1} |a\rangle = \lambda^2 |a\rangle \Rightarrow \lambda^2 = 1$$

$$\lambda = \pm 1$$

BS K