6

Genelleştirilmiş Fonksiyonlar

Bir defa, boyutların sayısının sonsuz olmasına izin verir isek, sonlu durumda var olmayan birçok olanak için kapıyı açmış oluruz. Böyle bir olanak, sonsuzlukların çeşidi nedeni ile ortaya çıkar. İki tip sonsuzluk ile karşılaştık: sayılabilir ve sayılamaz sonsuzluklar. İlkinin örneği tamlar sayısı ve diğerininki gerçel sayılar sayısıdır. Bir vektör uzayının boyutunun doğası genel bir vektörün bileşenlerinde yatar; bu vektör (i) sonlu boyutlu bir uzayda sonlu sayıda bileşenlere, (ii) sayılabilir bazı olan sonsuz boyutlu bir vektör uzayında sayılabilir sonsuz sayıda bileşenlere, ve (iii) sayılabilir bazı olmayan sonsuz boyutlu bir vektör uzayında sayılamaz sonsuz sayıda bileşenlere sahiptir.

6.1. Sürekli İndis

Yukarıda bahsedilen üç tipte vektör uzayının farklarını ve doğasını anlamak için, bir "sayma kümesinin" fonksiyonu olarak bileşenleri düşünmek uygundur. Böylece, bir N-boyutlu vektör uzayında bir $|f\rangle$ vektörünün bileşenleri f_i, sonlu $\{1, 2, \ldots, N\}$ kümesi üzerinde tanımlanmış bir f fonksiyonunun değerleri olarak düşünülebilir, ve böyle fonksiyonel bağımlılığı vurgulamak için f_i yerine $f(i)$ yazarız. Benzer şekilde sayılabilir bazı, $B = \{|e_i\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ olan bir Hilbert uzayında bir $|f\rangle$ vektörünün f_i bileşenleri bir $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun değerleri olarak düşünülebilir, burada $\mathbb{N}$ doğal sayılar (sonsuz) kümesidir. Sonraki adım, sayma kümesinin sayılamaz olmasına izin vermektir, yani, gerçel sayılar ya da bir aralığı gibi sürekli durum.

BS K

Bu, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna karşılık gelen $f(x)$ formunun bir bileşenine götürür. Vektörlerin kendisi hakkında ne denebilir? Böyle bileşenler nasıl bir baz neden olabilir?

Teorem 5.2.2 nin izomorfizmi nedeni ile, $\mathcal{L}^2_w(a,b)$ üzerine yoğunlaşacağız. Önceki notasyonla, $\{|e_x\rangle\}_{x\in\mathbb{R}}$ ortonormal bir kümenin elemanlarını göstersin ve $f(x)$, $\langle e_x|f\rangle$ olarak yorumlansın. $\mathcal{L}^2_w(a,b)$ nin iç çarpımı, şimdi,

$$\langle g|f\rangle = \int_a^b g^*(x) f(x) w(x)\, dx = \int_a^b \langle g|e_x\rangle\langle e_x|f\rangle w(x) dx$$

$$= \langle g| \left(\underbrace{\int_a^b |e_x\rangle w(x) \langle e_x| dx}_{} \right) |f\rangle$$

olarak yazılabilir ki bu $=1$ yazmayı önerir. Fizikte 'e' bırakılır ve $|e_x\rangle \to |x\rangle$ yazılır. Böylece sürekli bir baz için tamlık bağıntısını elde ederiz:

$$\int_a^b |x\rangle w(x) \langle x| dx = 1 \quad \text{ya da} \quad \int_a^b |x\rangle\langle x|\, dx = 1 \qquad 6.1$$

$$|f\rangle = \Big(\int_a^b |x\rangle \underset{w(x)}{\langle x|}\, dx \Big) |f\rangle = \int_a^b f(x) w(x) |x\rangle dx \qquad 6.2$$

yazarsak, bu f vektörü $|x\rangle$ cinsinden nasıl yazılır, görürüz. 6.2 nin $\langle x'|$ ile çarpımı;

$$\langle x'|f\rangle = f(x') = \int_a^b f(x) w(x) \langle x'|x\rangle dx \qquad \Big\{ \begin{array}{l} x' \in (a,b) \\ \text{aksi takdirde ``0''} \end{array}$$

herhangi f için geçerli bu bağıntı, bize $w(x)\langle x'|x\rangle$ in x ve x' nün adi fonksiyonu olmadığını söyler. Örneğin $f(x')=0$ olsun. O zaman integralin sonucu daima "0" dır, diğer noktalarda f nin davranışına bakmaksızın bu söylenir. Açıkça, x' de sıfır olan ve aynı integrali veren sonsuz sayıda fonksiyonlar vardır. Bu çizgideki tartışma şunu verir.

$$W(x)\,\langle x'|x\rangle = 0 \qquad x \neq x' \text{ ise}$$

$$W(x)\,\langle x|x\rangle = \infty$$

$W(x)\,\langle x'|x\rangle$, $x-x'$ nün bir çift fonksiyonu ve $\int_a^b dx\, W(x)\langle x'|x\rangle = 1$

Bu Dirac_delta fonksiyonudur

$$\delta(x-x') = W(x)\,\langle x'|x\rangle \qquad 6.3$$

(a,b) aralığında tanımlanmış bir $f(x)$ fonksiyonu ile şu özelliğe sahiptir.

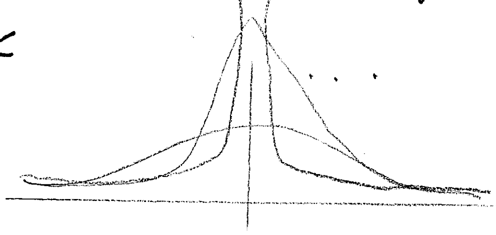
$$\int_a^b f(x)\,\delta(x-x')\,dx = \begin{cases} f(x') & x' \in (a,b) \\ 0 & x' \notin (a,b) \end{cases} \qquad 6.4$$

$\langle x'|x\rangle = \delta(x-x')/W(x)$ → vektörlerin ortonormallik bağıntısının sürekli indis durumuna genellenmesi.

Dirac_delta fonk.u bazı adi fonksiyonlar dizisinin limiti olarak temsil edilebilir.

6.1.1. Örnek: Gauss eğrisi: altındaki alan sabit kalacak şekilde genişliği 0'a yüksekliği ∞ a gitsin. Sonsuz limitte

$$\delta(x-x') = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\pi}}\, e^{-(x-x')^2/\varepsilon}$$

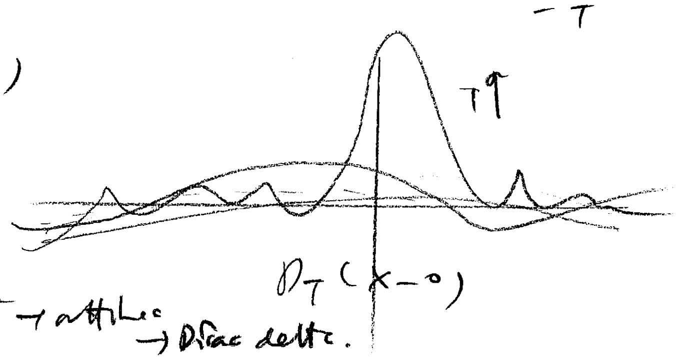


$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\quad)\,dx = 1.$$

6.1.2. Örnek:

$$D_T(x-x') \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} e^{i(x-x')t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\, \frac{e^{i(x-x')t}}{i(x-x')}\Bigg|_{-T}^{+T}$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin T(x-x')}{x-x'}$$



eğrinin altında kalan alan

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D_T(x-x')\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,dy = 1$$

$T\to\infty$ iken → Dirac delta.

T arttıkça, $D_T(x-x')$ gittikçe Dirac delta fonksiyonuna yaklaşır. Gerçekten,

$$\delta(x-x') = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin T(x-x')}{x-x'} \qquad 6.5$$

$$D_T(x-x') = \frac{T}{\pi} \frac{\sin T(x-x')}{T(x-x')}$$

x' ye çok yakın x değerleri için,

$$\to \frac{T(x-x')}{T(x-x')} \to 1 \Rightarrow D_T(x-x') \approx \frac{T}{\pi}$$

(T büyüdükçe sonsuz.)

: $\delta(0)=\infty$. Öte yandan, x' civarında $D_T(x-x')$ nin genişliği, kabaca, $D_T(x-x')$ nin sıfıra düştüğü noktalar arasındaki uzaklık ile verilir:

$T(x-x') = \pm\pi$, ya da $x-x' = \pm\pi/T$. Genişlik kabaca

$\Delta x = 2\pi/T$ dır. T büyüdükçe $\Delta x \to 0$.

Önceki örnek Dirac-delta fonksiyonunun üçer tanımlı verir:

$$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x-x')t}\, dt.$$

6.1.3. Basamak fonksiyonu:

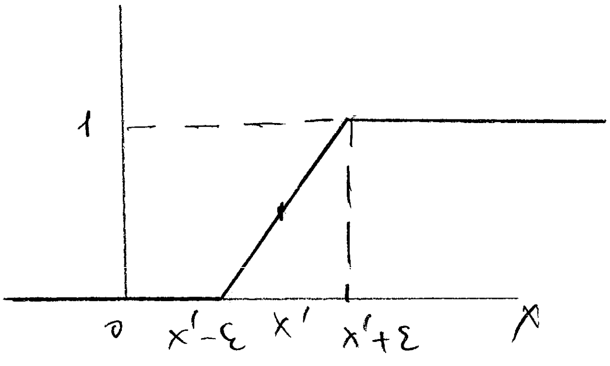
$$\Theta(x-x') \equiv \begin{cases} 0 & x < x' \\ 1 & x > x' \end{cases}$$

$x=x'$ de süreksiz.

Bu basamak fonksiyonunu birçok sürekli fonk.lar ile, $T_\epsilon(x-x')$ gibi, yaklaştırabiliriz:

$$T_\epsilon(x-x') \equiv \begin{cases} 0 & x \le x'-\varepsilon \\ (x-x'+\varepsilon)/2\varepsilon & x'-\varepsilon \le x \le x'+\varepsilon \\ 1 & x \ge x'+\varepsilon \end{cases}$$

BS K



Burada, ϵ, küçük pozitif bir sayıdır.

Açıkça,

$$\Theta(x-x') \equiv \lim_{\epsilon\to 0} T_\epsilon(x-x')$$

$$\frac{d}{dx}T_\epsilon(x-x') = \begin{cases} 0 & x<x'-\epsilon \\ 1/2\epsilon & x'-\epsilon<x<x'+\epsilon \\ 0 & x>x'+\epsilon \end{cases}$$

Dikkat: türev $x=x'\pm\epsilon$ de tanımlanmamıştır, dT_ϵ/dx : x, $(x'-\epsilon, x'+\epsilon)$ aralığında olduğundan, $1/2\epsilon$ ye eşittir. ve $\epsilon\to 0$ iken ∞a gider, bunun dışında her yerde 0'dır. Burada da δ-fonksiyonun özelliklerini görürüz. Gerçekten,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{dT_\epsilon}{dx}\right)dx = \int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon}\left(\frac{dT_\epsilon}{dx}\right)dx = \int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon}\frac{1}{2\epsilon}\,dx = 1$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{dT_\epsilon}{dx}(x-x') = \delta(x-x')$$

Türev ve limit sıralarının değişeceği varsayımından, önemli bir özellik elde ederiz.

$$\frac{d}{dx}\Theta(x-x') = \delta(x-x') \qquad 6.7$$

Şimdi bu sonuçları birkaç sürekli indise genelleriz. n değişkenli fonksiyonlar için, $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ yi, $|x_1,\dots,x_n\rangle$ baz vektörü boyunca soyut bir $|f\rangle$ vektörünün bileşeni olarak bakabiliriz. Bu baz, bir sürekli indisin n ye doğru olan bir genellemesidir. O zaman, $f(x_1\dots x_n)$ $f(x_1,\dots,x_n) = \langle x_1\dots x_n|f\rangle$ olarak tanımlanır. İntegral bölgesi Ω ile gösterilir ve şu kısaltmalar kullanılır ise,

BS K

$\vec{r} \equiv (x_1, \dots, x_n)$ $\qquad d^n x = dx_1 \dots dx_n$

$|x_1 \dots x_n\rangle = |\vec{r}\rangle$ $\qquad \delta(x_1 - x_1') \dots \delta(x_n - x_n') = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$

şunları yazabiliriz:

$$|f\rangle = \int_\Omega d^n x \; f(\vec{r})\, w(\vec{r})\, |\vec{r}\rangle \qquad \int_\Omega d^n x \; |\vec{r}\rangle\, w(\vec{r})\, \langle \vec{r}| = 1$$

$$f(\vec{r}\,') = \int_\Omega d^n x \; f(\vec{r})\, w(\vec{r})\, \langle \vec{r}\,' | \vec{r}\rangle$$

$$\langle \vec{r}\,' | \vec{r}\rangle\, w(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \qquad 6.8.$$

Ele alınan fonk.ların tanım bölgesi birim kürenin yüzeyi ise, $[w(\vec{r}) = 1]$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \; |\theta\phi\rangle\langle\theta\phi| = 1$$

Potansiyel teorisinde: $\nabla^2 \dfrac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = -4\pi\, \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$

6.2. Genelleştirilmiş Fonksiyonlar:

PAM Dirac, delta fonksiyonunu 1928 de keşfetti, türevi

$$\int f(x)\,\delta(x-x')\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int \delta(x-x')\, f'(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(x)}_{u}\, \underbrace{\delta'(x - x')\, dx}_{dv} = - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\, \delta(x - x')\, dx = - f'(x')$$

ile tanımlanır. Ayrıca, herhangi bir fonksiyonun, süreksiz fonk.larda dahil, herhangi bir noktadaki (süreksizlik noktaları da dahil) türevini bu şekilde ile tanımlayabiliriz. Yani, $\varphi(x)$ türevleri bazı noktalarda tanımlanmamış, "kötü" bir fonk. ise ve $f(x)$ "iyi" bir fonk. ise, $\varphi(x)$ in türevi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \varphi'(x)\, dx \equiv - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\, \varphi(x)\, dx$$

ile tanımlayabiliriz. Soldaki integral sağı tanımlar.

DD-fonk.nu ve onun türevleri gibi fonk.lar alışılan anlamda fonk. değildirler. Onların hepsinde ortak olan şey, birçok uygulamada integral içinde görünmeleridir (1. Böl.de, integrallenebilir sürekli fonk.lar uzayı üzerinde bir lineer fonksiyonel olarak ele alınabileceğini gördük) DD-fonk.u gibi fonk.ları lineer fonksiyoneller cinsinden betimlemek bu nedenle doğaldır. Bu fikir 1950 de Laurent Schwartz tarafından ele alındı, ve onun matematiğin yeni bir kolu olan genelleştirilmiş fonk.lar ya da dağılımlar olarak adlandırılanı geliştirdi.

İyi davranışlı bir test fonk.u (n değişkene bağlı varsayılabilir) ile birlikte bir integral içinde görünen bir matematiksel varlık bir dağılımdır, öyleki integrasyon sonucu iyi tanımlı bir sayıdır. Kullanılan test fonk.unun türüne bağlı olarak farklı tipte dağılımlar tanımlanabilir. DD fonk.u, ve tüm mertebeden türevlerini ele almak istersek, o zaman test fonk.lar ∞-kere türetilebilmelidir, yani, bunlar $\mathbb{R}^n$ (ya da $\mathbb{C}^n$) üzerinde C^∞ fonk.lar olmalıdır. Dahası, dağılım teorisinin matematiksel olarak olabilmesi için, tüm test fonk.larının $\mathbb{R}^n$ (ya da $\mathbb{C}^n$) nin bir sonlu "hacmi" dışında sıfır olmalıdır. (Böyle fonk.lara kompakt destekli'dir denir). Böyle fonk.lar için ortak bir notasyon

$$C_F^\infty(\mathbb{R}^n), \quad C_F^\infty(\mathbb{C}^n)$$

finite (sonlu)

kullanılan test fonk.ları $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ üzerinde bir vektör uzay oluşturur.

6.2.1. Tanım Bir dağılım ya da Genelleştirilmiş fonk. $C_F^\infty(\mathbb{R}^n)$ ya da $C_F^\infty(\mathbb{C}^n)$ uzayı üzerinde lineer bir fonksiyonel'dir. ~~Fφ~~, $f \in C_F^\infty$ ∃ ve φ bir dağılım ise o zaman,

$$\varphi[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, f(x)\, d^n x$$

$\langle \varphi / f \rangle$ de kullanılır. $\langle \varphi , f \rangle$

bu daha çekici'dir, çünkü sadece lineer olmak değil $\{ \varphi[\alpha f + \beta g] = \alpha \varphi[f] + \beta \varphi[g]$ anlamında $\}$, keza böyle lineer fonksiyoneller kümesinin bir vektör uzayı oluşturması nedeniyledir; yani φ lerin lineer bileşimi de tanımlıdır. Böylece $\langle \varphi , f \rangle$ her iki φ ve f ile karşılıklı bir dayanağı vardır. İntegralleri hesaplamak yazmanın yolu: δ_a, $\delta(x-a)$ DD fonk.nunu temsil eder ∃ x üzerinden integral alınırsa, o zaman $\langle \delta_a , f \rangle = f(a)$. Benzer şekilde, $\langle \delta_a' | f \rangle = -f'(a)$ ve lineer bileşimler ile,

$$\langle \alpha \delta_a + \beta \delta_a' , f \rangle = \alpha f(a) - \beta f'(a)$$

6.2.2. Örnek: Adi bir sürekli fonk. g, bir dağılımın özel bir durumu olarak düşünülebilir.

$$g : C_F^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad \text{lineer fonksiyoneli şeklinde}$$

$$\langle g , f \rangle \equiv g[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f(x)\, dx \quad \text{olarak tanımlanır.}$$

6.2.3. Örnek: Dağılımlar (GF) ilginç bir uygulaması, yoğunluk kavramı (adeta) kadar yoğunluklar değil, ama nokta-benzeri lineer ve yüzey yoğunlukları da içerecek şekilde genelleştirildiğinde karşımıza çıkar.

BS K

$\rho(\vec r) = q\,\delta(\vec r - \vec r_0)$ $\vec r_0$ da yer alan nokta yük gibi. Lineer fonksiyo-nelleri cinsinden ρ yu bir dağılım olarak yazalım,

$$\rho : C_F^\infty(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$$

keyfi bir f fonk. için

$$\rho[f] = \langle \rho, f \rangle = q\, f(\vec r_0) \text{ verir} \qquad 6.11$$

ρ nun DDF u karakteri bu denklemde sol yanının

$$\int \rho(\vec r) f(\vec r)\, d^3x = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta V_i \to 0}} \sum_{i=1}^{N} \rho(\vec r_i) f(\vec r_i) \Delta V_i$$

olduğu hatırlanarak farkedilebilir. Bu denk.in sağ yanında katkı-da bulunan tek hacim elemanı $\vec r_0$ noktasını içerendir; diğerleri 0 katkı verir. $\Delta V_i \to 0$ iken, sağ yan sıfırdan farklı bir sayı vermeli-nin tek yolu $\rho(\vec r_0) f(\vec r_0)$ ın sonsuz olmasıdır. f iyi davranışlı bir fonk. olduğundan, $\rho(\vec r_0)$ sonsuz olmalıdır ki bu da $\rho(\vec r)$ nin bir delta fonk.u olarak davrandığını söyler. Bu gösterir ki (6.11) tanımı ρ için bir DDF tanımına götürür.

6.2.4. Tanım: $\{\varphi_n(x)\}$ bir fonk.lar dizisi olsun öyleki bütün $f \in C_F^\infty(\mathbb{R})$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) f(x)\, dx \quad \text{mevcuttur.}$$

O zaman, bu dizi

$$\langle \varphi, f \rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) f(x)\, dx \quad \forall f$$

ile tanımlanan φ dağılımına yakınsıyor denir. Bu yakınsaklık $\varphi_n \to \varphi$ ile gösterilir.

Örn., gösterilebilir ki

$$\frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2} \to \delta(x) \quad \text{ve} \quad \frac{1-\cos nx}{n\pi x^2} \to \delta(x) \quad \text{prob.}$$

6.2.5. **tanım**: Bir φ dağılımının **türevi**

$$\langle \varphi', f \rangle = -\langle \varphi, f' \rangle \quad \forall f \in C_F^\infty$$

ile tanımlanan başka bir φ' dağılımıdır.

6.2.6. **Örnek**: θ_n fonk.ları

$$\theta_n(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1/n \\ (nx+1)/2 & -1/n \leq x \leq 1/n \\ 1 & x \geq 1/n \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $\theta_n'(x) \to \delta(x)$ olduğunu göstermek için son iki tanımı birleştirebiliriz.

$$\langle \theta_n', f \rangle = -\langle \theta_n, f' \rangle$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta_n'(x) f(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \theta_n(x) \frac{df(x)}{dx}\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \theta_n(x)\,df$$

$$= -\left\{ \int_{-\infty}^{-1/n} \theta_n(x)\,df + \int_{-1/n}^{+1/n} \theta_n(x)\,df + \int_{1/n}^{\infty} \theta_n(x)\,df \right\}$$

$$= -\left\{ 0 + \int_{-1/n}^{+1/n} \frac{nx+1}{2}\,df + \int_{1/n}^{\infty} df \right\}$$

$$= -\frac{n}{2} \int_{-1/n}^{+1/n} x\,df - \frac{1}{2} \int_{-1/n}^{1/n} df - \int_{1/n}^{\infty} df$$

BS K

$$= -\frac{n}{2}\left\{ x f(x)\Big|_{-1/n}^{+1/n} - \int_{-1/n}^{1/n} f(x)\,dx \right\}$$

$$-\frac{1}{2}\left[f(1/n) - f(-1/n) \right] - f(0) + f(1/n)$$

Büyük n için, $1/n \approx 0$ $\quad f(\mp 1/n) \approx f(0)$. Böylece,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta_n'(x) f(x)\,dx \approx \frac{-n}{2}\left\{ \frac{1}{n} f(1/n) + \frac{1}{n} f(-1/n) - \frac{2}{n} f(0) \right\}$$

$$+ f(0) \approx f(0)$$

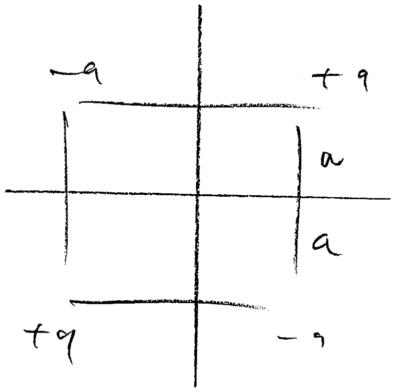
$n \to \infty$ limitinde yaklaşıklık $=$ olur. Böylece,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_n'(x) f(x)\,dx = f(0) = \langle \delta_0 , f \rangle \Rightarrow \theta_n' \to \delta$$

$f(\infty) = 0$: çünkü test fonk.ları, sonlu bir aralık dışında 0 olmalıdır.

BS K

6.2.



$$\rho(\underline{r}) = q\,\delta(x-a)\,\delta(y-a)$$
$$- q\,\delta(x+a)\,\delta(y-a)$$
$$+ q\,\delta(x+a)\,\delta(y+a)$$
$$- q\,\delta(x-a)\,\delta(y+a)$$

6.3.
6.4.

$$\delta[f(x)] = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{|f'(x_k)|}\,\delta(x-x_k)$$

$f(x_k)=0 \quad k=1,2,\dots,m$

$y=f(x)$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\delta[f(x)]\,g(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(y)\, g[x(y)]\,\frac{df}{\left|\frac{df}{dx}\right|}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{g(x(0))}{\left|\frac{df}{dx}\right|_{x=x_k}}$$

6.5.

$$\rho: C_F^{\infty}(\mathbb{R}^3)\to\mathbb{R}$$

$$\langle\rho, f\rangle = \int_S \sigma(\underline{r})\, f(\underline{r})\, d\underline{a}(\underline{r})$$

BS K

6.7.

$$\delta(\underline{r}) = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\, \delta(r - r')\, \delta(\theta - \theta')\, \delta(\varphi - \varphi')$$

$$\delta(x - x')\, \delta(y - y')\, \delta(z - z')\, dx\, dy\, dz \to \delta(\underline{r} - r')\, \delta(\theta - \theta')\, \delta(\varphi - \varphi')$$

6.8. (b)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta(x^2 - \pi^2)}_{\frac{\delta(x-\pi)}{2\pi} + \frac{\delta(x+\pi)}{2\pi}} \cos x \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - \pi) \cos x \, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x + \pi) \cos x \, dx \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\cos\pi + \cos(-\pi) \right) = -1/\pi$$

(e)

$$\int_{0.5}^{\infty} \delta(\sin \pi x) \left(\frac{2}{3}\right)^x dx$$

$\sin \pi x = 0 \Rightarrow \pi x = n\pi \quad n = 0, 1, 2, ..$ $\quad x = n$

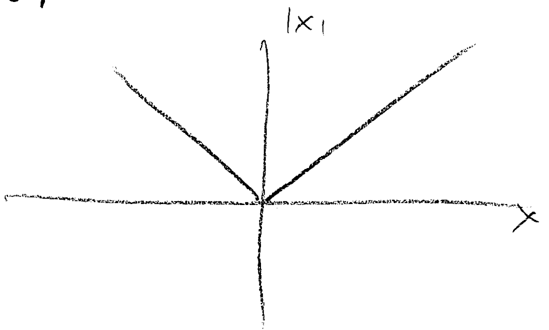
$$\delta(\sin \pi x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta(x - n)}{|\pi \cos \pi x|_{x=n}} = \sum \frac{\delta(x - n)}{(\pi \cos n\pi)} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \delta(x - n)$$

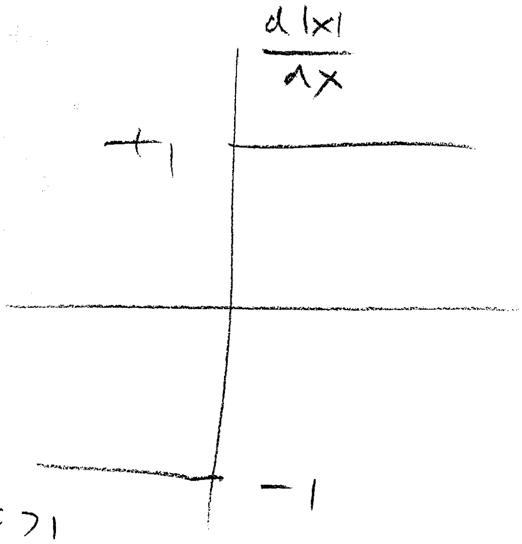
$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1} \int \delta(x - n) \left(\frac{2}{3}\right)^x dx = \frac{1}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{3}\right) \left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots \right] = \frac{2}{3\pi} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{2}{\pi}$$

BS K

6.10.





$$\frac{d|x|}{dx} = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

6.12. (a) $\varphi_n = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2} \underbrace{f(x)}\, dx$$

$$f(0) + \frac{x}{1!} f'(x)\Big|_0 + \cdots$$

$$= \frac{n}{\sqrt{\pi}} f(0) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2x^2}\, dx}_{\frac{\sqrt{\pi}}{n}} + \frac{n}{\sqrt{\pi}} f'(0) \cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} x\, dx\, e^{-n^2x^2}}_{0}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) f(x)\, dx = f(0)$$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \delta(x)$$

BS K