7. Ortogonal Polinomlar

7.1. Genel Özellikler

7.1.1. Teorem : $n = 0, 1, 2, \ldots$ için $\boxed{F_n(x) = \frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n}\left[w(x)\, s^n(x)\right]}$

fonksiyonlarını alalım, burada

1. $F_1(x)$, x e göre 1. dereceden polinom,
2. $s(x)$, x " " derecesi ≤ 2 olan, gerçel katlı polinom
3. $w(x)$, kesin pozitif bir fonk, (a, b) aralığında integrallenebilir ve $w(a)\, s(a) = 0 = w(b)\, s(b)$ sınır koşullarını sağlar.

O zaman, $F_n(x)$, x e göre n. dereceden polinom ve derecesi $k < n$ olan herhangi bir $P_k(x)$ polinomuna diktir, yani

$$\int_a^b P_k(x)\, F_n(x)\, w(x)\, dx = 0 \qquad k < n$$

Bu polinomlar toplu olarak klasik dik polinomlar olarak adlandırılırlar. Teoremin ispatından önce 2 lemma görelim:

7.1.2. Lemma :

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(w\, s^n P_{\leq k}\right) \equiv w\, s^{n-m} P_{\leq k+m} \qquad m \leq n$$

özdeşliği geçerlidir. prb. 7.1

BS K

7.1.3. **Lemma**: Tüm $\frac{d^m}{dx^m}(ws^n)$ türevleri, $m<n$ in tüm değerleri için $x=a$ ve $x=b$ de sıfırdır.

İspat: Önceki lemma'nın özdeşliğinde $k=0$ koy $P_{\leq 0}=1$ al.

$$\frac{d^m}{dx^m}(ws^n) = ws^{n-m} P_{\leq m}$$ sağ yan teoremdeki 3. koşul-dan dolayı $x=a,b$ de sıfırdır.

Lemma 7.1.2 ispat: prs. 7.1 $n=1$ için tanımdan, $s\frac{dw}{dx}+w\frac{ds}{dx}=wF_1(x)$

$$s\frac{dw}{dx} = w\left(F_1(x) - \frac{ds}{dx}\right)$$

lem 7.1.2 bunu al ve x e göre türet.

$$\frac{d}{dx}(ws^nP_{\leq k}) = \frac{dw}{dx}s^nP_{\leq k}\frac{s}{s}$$

$$+nws^{n-1}\frac{ds}{dx}P_{\leq k}+ws^n\frac{dP_{\leq k}}{dx}$$

$$= ws^{n-1}\left[\left\{F_1(x)+(n-1)\frac{ds}{dx}\right\}P_{\leq k}+s\frac{dP_{\leq k}}{dx}\right]$$

$$= ws^{n-1}P_{\leq k+1}$$

türevi ötelenerek ispat tamamlanır (m defa tekrarla)

Teoremin ispatı: Önce dikliği ispatlayalım.

$$\int_a^b p_k(x)\, F_n(x)\, w(x)\, dx = \int_a^b p_k(x) \frac{1}{\cancel{w}} \left[\frac{d^n}{dx^n} (w s^n) \right] \cancel{w}(x)\, dx$$

$$= \int_a^b \overbrace{p_k(x)}^{u}\, \overbrace{\frac{d}{dx} \left[\underbrace{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (w s^n)}_{v} \right] dx}^{dv}$$

$$= \underbrace{p_k(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (w s^n) \Big|_a^b}_{\text{Lem. 7.1.3. den } = 0} - \int_a^b \frac{dp_k}{dx} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (w s^n)\, dx$$

k-defa kısmi integrasyondan sonra, (k. mertebeden)

$$\int_a^b p_k(x)\, F_n(x)\, w(x)\, dx = (-1)^k \int_a^b \frac{d^k p_k}{dx^k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (w s^n)\, dx$$

$$= C \int_a^b \frac{d}{dx} \left[\frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}} (w s^n) \right] dx$$

$$= C \frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}} (w s^n) \Big|_a^b = 0 \quad \underline{\text{Dik!}}$$

k. dereceden p_k polinomunun k defa türevi bir sbt. dir _ C.
k < n olduğundan $n-k-1 \geq 0$ dır, öyleki son satır iyi tanımlıdır.
Teoremin ilk kısmını ispat etmek için, $\underline{k=0}$ ve $\underline{m=n}$ ile Lem 7.1.2 kullanırız, öyle ki

$$\frac{d^n}{dx^n} (w s^n) = w P_{\leq n} \quad \text{ya da} \quad F_n(x) = \frac{1}{w} \left(\frac{d^n}{dx^n} (w s^n) \right) = P_{\leq n}$$

BS K

$F_n(x)$ in derecesi n ye eşit bir polinom olduğunu ispatlamak için

$$F_n(x) = P_{\le n-1}(x) + a_n x^n$$

yazar, her iki yanı $w(x)F_n(x)$ ile çarparız, ve (a,b) üzerinden integre ederiz:

$k<n$ → 0 diklikten

$$\int_a^b [F_n(x)]^2 w(x)\,dx = \int_a^b P_{\le n-1} F_n(x) W(x)\,dx$$

$$+ a_n \int_a^b x^n F_n(x) W(x)\,dx$$

$w(x)$ ve $[F_n(x)]^2$ ler pozitif olduklarından, **LHS** pozitiftir, RHS daki ilk integral → 0 olur. Bu nedenle RHS daki 2. terim "**0**" olamaz. Özellikle $a_n \neq 0$ ve $F_n(x)$, n. derecedendir. ∎

$F_n(x)$ in tanımında bir normalizasyon sbt.ni sunmak adettendir ve

$$F_n(x) = \frac{1}{K_n W} \frac{d^n}{dx^n}(W s^n)$$

yazılır. Buna genelleştirilmiş Rodrigues formülü adı verilir.

Teorem 1.1. den açıkça görülür ki $F_0(x), F_1(x), \ldots$ polinomları dizisi, ağırlık fonk.u $w(x)$ olan $[a,b]$ üzerinde dik polinomlar kümesi oluşturur.

BS K

Klasik dik polinomların tüm çeşitleri, dif denkl.in çözümleridir. Tüm F_n ler tarafından sağlanan Jenerik bir dif. denk. verelim:

7.1.4. Öneri. k_1, F_1 deki x in katsayısı ve σ_2, s deki x^2 nin katsayısı olsun. O zaman, F_n dik polinomları

$$(w s F_n')' = w \lambda_n F_n(x) \qquad \text{Sturm-Liouville -18(19)}$$

dif. denkl.ni sağlar, burada $\lambda_n = K_1 k_1 n + \sigma_2 n(n-1)$ dir.

7.2. Sınıflandırma: $s(x)$ in çeşitli seçimlerinin sonuçlarını araştıralım. $F_1(x)$ ile başlayalım:

RF'den

$$F_1(x) = \frac{1}{K_1 w} \frac{d}{dx}(ws) \quad \text{ya da} \quad \frac{1}{ws}\frac{d}{dx}(ws) = \frac{K_1 F_1(x)}{s}$$

integre edilirse,

$$ws = A\, e^{\int K_1 F_1(x)\,dx / s}$$

bulunur; burada A bir sbt. dir. 1. derece bir pol. olduğundan, $F_1(x)$,

$$F_1(x) = k_1 x + k_1'$$

olarak yazılabilir.

$$ws = A\, e^{\int \frac{K_1(k_1 x + k_1')}{s} dx} = A\, e^{\int (2\alpha x + \beta)\,dx}$$

$$= A\, e^{\alpha x^2 + \beta x + C} = B\, e^{\alpha x^2 + \beta x}$$

BS K

(a,b) aralığı, $w(a)\,s(a) = 0 = w(b)\,s(b)$ ile belirlenir, bu da $B e^{\alpha a^2 + \beta a} = 0 = B e^{\alpha b^2 + \beta b}$ verir. Bu eşitliğin sağlanması için tek yol, a ve b nin sonsuz olmasıdır. $a < b$ olduğunda $a = -\infty$ ve $b = +\infty$ olmalıdır, bu durumda $\alpha < 0$:

$$y = \sqrt{|\alpha|}\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right) \text{ ile ve } B = s\, e^{\beta^2/4\alpha} \text{ seçerek}$$

$w(y) = e^{-y^2}$ buluruz. s sabitini de 1 alırız. Bu daima, B gibi sabitlerin uygun seçimi ile mümkündür.

Buradan

$$w(x)\,s(x) = A\, e^{\int \frac{k_1(k_2 x + k_1')}{s} dx} \qquad 2.7$$

$$w(a)\,s(a) = w(b)\,s(b) = 0$$

(a) $s(x)$ bir sabit olsun, o zaman 2.7 denk. i kolaylıkla integre edilebilir.

(b) s nin derecesi 1 ise o zaman $s(x) = \sigma_1 x + \sigma_0$ ve

$$w(x)\,(\sigma_1 x + \sigma_0) = A\, e^{\int \frac{k_1(k_2 x + k_1')}{\sigma_1 x + \sigma_0} dx}$$

$$= A\, e^{\int \left(\frac{k_1 k_1}{\sigma_1} + \underbrace{\frac{k_1 k_1' - k_1 k_1 \sigma_0/\sigma_1}{\sigma_1 x + \sigma_0}}_{\rho}\right) dx}$$

$$\frac{k_1 k_1(\sigma_1 x + \cancel{\sigma_0}) + k_1 k_1' \sigma_1 - k_1 \cancel{k_1 \sigma_0} = (k_1 k_1 x + k_1 k_1')\cancel{\sigma_1}}{\cancel{\sigma_1}(\sigma_1 x + \sigma_0)}$$

$$= B\,(\sigma_1 x + \sigma_0)^{\rho}\, e^{\gamma x}$$

burada $\gamma = k_1 k_1/\sigma_1$, $\rho = k_1 k_1 \sigma_0/\sigma_1^2$, B Anın integral sbt. i ile değiştirilmişidir.

BS K

Bu son denk. a ve b de sınır koşullarını sağlamalıdır:

$$B(\sigma, a+\sigma_0)^{\rho} e^{\gamma a} = 0 = B(\sigma, b+\sigma_0)^{\rho} e^{\gamma b}$$

bu da $a = -\sigma_0/\sigma_1$, $\rho > 0$ $\gamma < 0$ ve $b = +\infty$ verir.

Değişkenlerin ve parametrelerin uygun tanımı ile $w(y) = y^{\nu} e^{-y}$, $\nu > -1$, ve $s(x) = x$, $a = 0$, $b = +\infty$ yazabiliriz.

(c) Benzer şekilde, $s(x)$, 2. dereceden olduğunda ağırlık fonk.u ve integrasyon aralığını elde ederiz. Sonuçlar:

7.2.1. Öneri: teor. 7.1.1. in koşulları sağlanırsa, o zaman

(a) 0. dereceden $s(x)$ için; $w(x) = e^{-x^2}$, $s(x) = 1$, $a = -\infty$ ve $b = +\infty$ elde ederiz, elde edilen polinomlara Hermite pol. adı verilir $H_n(x)$.

(b) 1. dereceden $s(x)$ için; $\nu > -1$, $s(x) = x$, $a = 0$ ve $b = +\infty$ ile $w(x) = x^{\nu} e^{-x}$ elde ederiz, Sonuç, Laguerre pol. ve $L_n^{\nu}(x)$

(c) 2. dereceden $s(x)$ için; $\mu, \nu > -1$, $s(x) = 1 - x^2$ $a = -1$, $b = +1$ $w(x) = (1-x)^{\mu}(1-x)^{\nu}$ elde ederiz.

Sonuç Jacobi pol. ve $P_n^{\mu,\nu}(x)$

[illegible] ve

μ ve ν nün değerlerine göre alt sınıflara ayrılır

BS K

μ	ν	$r(x)$	polinom
0	0	1	Legendre $P_n(x)$
$\lambda-1/2$	$\lambda-1/2$	$(1-x^2)^{\lambda-1/2}$	Gegenbauer, $C_n^{\lambda}(x)$, $\lambda>-1/2$
$-1/2$	$-1/2$	$(1-x^2)^{-1/2}$	1. türden Chebyshev, $T_n(x)$
$1/2$	$1/2$	$(1-x^2)^{1/2}$	2. " " , $U_n(x)$

7.3. İndirgeme Bağıntıları:

5.17. denk.-i ile başlayalım.

$$F_{n+1} = (\alpha_n x+\beta_n)F_n + \gamma_n F_{n-1} \qquad 7.4.$$

bir sonraki sayfada :)

iki defa türetiriz), 2. türev için 7.1.4 önergeyi kullanalım; sonuçta,

$$2ws\alpha_n F_n' + \left[\alpha_n \frac{d}{dx}(ws) + w\lambda_n(\alpha_n x+\beta_n)\right]F_n$$

$$- w\lambda_{n+1}F_{n+1} + w\gamma_n\lambda_{n-1}F_{n-1} = 0 \qquad 7.5.$$

bu son iki denk.-den F_{n+1} leri yok eder isek,

$$2ws\alpha_n F_n' + \left[\alpha_n \frac{d}{dx}(ws) + w(\lambda_n-\lambda_{n+1})(\alpha_n x+\beta_n)\right]F_n$$

$$+ w\gamma_n(\lambda_{n-1}-\lambda_{n+1})F_{n-1} = 0 \qquad 7.6$$

BS K

$\therefore$ $F_{n+1}' = \alpha_n F_n + (\alpha_n x + \beta_n) F_n' + \gamma_n F_{n-1}'$

$F_{n+1}'' = 2\alpha_n F_n' + (\alpha_n x + \beta_n) F_n'' + \gamma_n F_{n-1}''$

ws ile çarp!

$(w s F_n')' = w \lambda_n F_n$ Önerı 7.1.4.

$w' s F_n' + w s' F_n' + w s F_n'' = w \lambda_n F_n$ (I)

$\Rightarrow w s F_n'' = w \lambda_n F_n - w' s F_n' - w s' F_n'$ (III)

bunu burada koy

$w s F_{n+1}'' = 2\alpha_n w s F_n' + (\alpha_n x + \beta_n) w s F_n'' + \gamma_n w s F_{n-1}''$ (II)

$w \lambda_{n+1} F_{n+1} - w' s F_{n+1}' - w s' F_{n+1}' = w s F_{n+1}''$ = (I)

I $\to n+1$

$= 2\alpha_n w s F_n' + (\alpha_n x + \beta_n) w \lambda_n F_n - (\alpha_n x + \beta_n) w' s F_n'$

+

$- (\alpha_n x + \beta_n) w s' F_n'$ (III)

$+ \gamma_n w \lambda_{n-1} F_{n-1} - \gamma_n w' s F_{n-1}' - \gamma_n w s' F_{n-1}'$ (I) $n \to n-1$

$- \alpha_n w' s F_n^{*} + \alpha_n w' s F_n^{*}$

+

$- \alpha_n w s' F_n + \alpha_n w s' F_n$

+

$2\alpha_n w s F_n' + \left[\alpha_n \frac{d}{dx}(w s) + w \lambda_n (\alpha_n x + \beta_n)\right] F_n$

$- w \lambda_{n+1} F_{n+1} + \gamma_n w \lambda_{n-1} F_{n-1} = 0$ (7.5)

BS K

Diğer iki indirgeme bağıntısı,

$$2w\alpha_n\lambda_n F_n + \frac{d}{dx}\left\{\left[\alpha_n \frac{d}{dx}(ws) + w(\lambda_n - \lambda_{n-1})(\alpha_n x+\beta_n)\right]F_n\right\}$$

$$+ (\lambda_{n-1}-\lambda_{n+1})\frac{d}{dx}(wF_{n+1}) = 0 \qquad 7.7$$

$$A_n(x)F_n - \lambda_{n+1}(\alpha_n x+\beta_n)\frac{dw}{dx}F_{n+1} + \gamma_n\lambda_{n-1}\frac{dw}{dx}F_{n-1}$$

$$+ B_n(x)F_{n+1}' + \gamma_n D_n(x)F_{n-1}' = 0 \qquad 7.8$$

burada,

$$A_n(x) = (\alpha_n x+\beta_n)\left[2w\alpha_n\lambda_n + \alpha_n\frac{d^2}{dx^2}(ws) + \lambda_n(\alpha_n x+\beta_n)\frac{dw}{dx}\right]$$

$$- \alpha_n^2\frac{d}{dx}(ws)$$

$$B_n(x) = \alpha_n\frac{d}{dx}(ws) - w(\alpha_n x+\beta_n)(\lambda_{n+1}-\lambda_n)$$

$$D_n(x) = w(\alpha_n x+\beta_n)(\lambda_{n-1}-\lambda_n) - \alpha_n\frac{d}{dx}(ws)$$

Hermite ve Legendre pol.ı için <u>7.6</u> denk.i

$$H_n' = 2nH_{n-1} \quad \text{ve} \quad (1-x^2)P_n' + nxP_n - nP_{n-1} = 0$$

verir. 7.7 Legendre pol. için

$$P_{n+1}' - xP_n' - (n+1)P_n = 0$$

$$7.8 \rightarrow \quad P_{n+1}' - xP_n' - (2n+1)P_n = 0$$

7.4. Klasik Dik Polinomların Örnekleri

Dört parametre K_n, k_n, k_n' ve h_n polinomların tüm özelliklerini belirler. Bir kez K_n tespit edilir ise, diğerleri de belirlenir: k_n ve k_n' genelleştirilmiş Rodrigues formülü ile verilir, ve h_n aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$h_n = \int_a^b F_n^2(x)\,w(x)\,dx = \int_a^b (k_n x^n + \dots)\,F_n(x)\,w(x)\,dx$$

$$= k_n \int_a^b w\,x^n \boxed{\frac{1}{K_n w}\frac{d^n}{dx^n}(w s^n)}\,dx = \frac{k_n}{K_n}\int_a^b x^n \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(w s^n)\right]dx$$

$$= \underbrace{\cancel{\frac{k_n}{K_n} x^n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(w s^n)\Big|_a^b}}_{0\text{'dır.}} - \frac{k_n}{K_n}\int_a^b \frac{d}{dx}(x^n)\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(w s^n)\,dx$$

kısmi integrasyon devam eder ise, türev x^n ye kayar ve

$\frac{d^0}{dx^0}(w s^n) = w s^n$ ve $\frac{d^n}{dx^n}x^n = n!$ olduğu gözönüne alınarak,

$$h_n = \frac{(-1)^n k_n\, n!}{K_n}\int_a^b w\, s^n\, dx$$ elde ederiz.

7.4.1. Hermit Polinomları:

Hermit pol.ı, $K_n = (-1)^n$ alınarak standartlaştırılır.

Böylece, 7.2 Rod. formülü ve önceki (7.2.1) $\equiv$ $w(x) = e^{-x^2}$ / $s(x) = 1$ / $a = -\infty$ $b = +\infty$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) \qquad 7.13$$

verir. e^{-x^2}, n defa türetilir $\Rightarrow$ $\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = (-2x)^n e^{-x^2}$

$$(-1)^n e^{x^2} (-2x)^n e^{-x^2} = 2^n x^n \Rightarrow k_n = 2^n \text{ verir.}$$

k_n — x^n nin katsayısı.

k_n yi elde etmek için pol. un tek ya da çift durumlarında olduğunu bulalım: 7.13 $x \to -x$ konulursa $\Rightarrow$ $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$ elde edilir ki bu da $n \to$ çift (tek) $\Rightarrow$ $H_n \to$ çift (tek) bir pol. olduğunu, yani x in sadece çift ya da tek kuvvetlerine sahip olduğunu gösterir. Her iki durumda da, H_n de x in sonraki en yüksek kuvveti $n-1$ değil $n-2$ olduğundur. Böylece, H_n için x^{n-1} in katsayısı sıfırdır, ve $k_n' = 0$ bulunur. h_n yi 7.12. den $h_n = \sqrt{\pi}\, 2^n n!$ olarak bulunur. (5.12) indirgeme bağıntı

$$h_n = \frac{\cancel{(-1)^n}\, 2^n n!}{\cancel{(-1)^n}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \quad \sqrt{\pi}$$

$$\alpha_n = 2, \quad \beta_n = 0, \quad \gamma_n = -2n$$

$$H_{n+1} = 2x H_n - 2n H_{n-1}$$

dizgeleri de benzer şekilde bulunur. H_n nin dif. denk. i

$$K_1 = -1 \quad \sigma_1 = 0 \quad F_1 = 2x \Rightarrow k_1 = 2 \Rightarrow \lambda_n = -2n$$

$$\frac{d^2 H_n}{dx^2} - 2x \frac{dH_n}{dx} + 2n H_n = 0$$

BS K

7.4.2. Laguerre Polinomları:

$K_n = n!$ $\quad w(x) = x^{\nu} e^{-x}$ (7.2.1.a prop.) $\quad s(x) = x$

$$L_n^{\nu}(x) = \frac{1}{n!\, x^{\nu} e^{-x}} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{\nu} e^{-x} x^n\right)$$

$$= \frac{1}{n!} x^{-\nu} e^{x} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+\nu} e^{-x}\right) \qquad 7.16$$

k_n yi bulmak için, e^{-x}'in türevi x'in kuvvetini değil, (-1) çarpanı oluşturur x in en yüksek kuvveti $x^{n+\nu}$ yalnız bırakılıp, e^{-x} türetilerek elde edilir:

$$\frac{1}{n!} x^{-\nu} e^{x} x^{n+\nu} (-1)^n e^{-x} = \frac{(-1)^n}{n!} x^n \Rightarrow k_n = \frac{(-1)^n}{n!}$$

k_n' ; x in sonraki en yüksek kuvveti şöyle bulunur:

$x^{n+\nu}$ nın ilk türevini n defa topla ve sonucu $(-1)^{n-1}$ ile çarp!

$$\frac{1}{n!} x^{-\nu} e^{x}\left[(-1)^{n-1} n(n+\nu) x^{n+\nu-1} e^{-x}\right] = \frac{(-1)^{n-1}(n+\nu)}{(n-1)!} x^{n-1}$$

$$k_n' = (-1)^{n-1} \frac{(n+\nu)!}{(n-1)!}$$

$$h_n = \frac{(-1)^n\left[(-1)^n/n!\right] n!}{n!} \int_0^{\infty} x^{\nu} e^{-x} x^n \, dx = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x^{n+\nu} e^{-x} dx$$

$$= \frac{\Gamma(n+\nu+1)}{n!} = \frac{\Gamma(n+\nu+1)}{\Gamma(n+1)}$$

BS K

$$\alpha_n = -\frac{1}{n+1} \qquad \beta_n = \frac{2n+\nu+1}{n+1} \qquad \gamma_n = -\frac{n+\nu}{n+1}$$

$$(n+1)\,L_{n+1}^{\nu} = (2n+\nu+1-x)\,L_n^{\nu} - (n+\nu)\,L_{n-1}^{\nu}$$

$$k_1 = -1 \qquad \sigma_2 = 0 \Rightarrow \lambda_n = -n$$

$$x\,\frac{d^2 L_n^{\nu}}{dx^2} + (\nu+1-x)\,\frac{d L_n^{\nu}}{dx} + n\,L_n^{\nu} = 0$$

Hermite note:

$$\delta = 1, \quad a = -\infty \qquad b = +\infty \qquad w = e^{-x^2}$$

$$k_n = 2^n \quad k_n' = 0 \qquad h_n = \sqrt{\pi}\,2^n\,n!$$

$$F_{n+1} = (\alpha_n x + \beta_n)\,F_n + \gamma_n F_{n-1} \qquad (\mathrm{I})$$

$$\alpha_n = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \qquad \sigma_2 = 0 \qquad F_1 = 2x \Rightarrow k_1 = 2$$

$$H_{n+1} = 2x\,H_n - 2n\,H_{n-1}$$

$$\gamma_n = -\frac{h_n}{h_{n-1}}\,\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = -\frac{2^n\,n!}{2^{n-1}\,(n-1)!}\,\frac{2}{2} = -2n$$

$$\left(e^{-x^2} H_n'\right)' = e^{-x^2}(-2n)\,H_n \Rightarrow H_n'' - 2x\,H_n' + 2n\,H_n = 0$$

BS K

(I) dan

$$\alpha_n = \frac{k_{n+1}}{k_n}\ , \quad \beta_n = \alpha_n \left(\frac{k'_{n+1}}{k_{n+1}} - \frac{k'_n}{k_n} \right)$$

$$\gamma_n = -\frac{h_n}{h_{n-1}} \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}$$

$$h_n = \int_a^b [F_n(x)]^2 w(x) dx$$

2.5. Dik Polinomlar cinsinden Açılım:

Herhangi keyfi bir $f \in \mathcal{L}^2_w(a,b)$, bu polinomlar cinsinden seriye açılabilir. Dik pol. ların tam kümesini $|C_k\rangle$ ile ve verilen fonk. u $|f\rangle$ ile gösterirsek

$$|f\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k |C_k\rangle$$

yazabiliriz; burada a_k lar şöyle bulunur:

$$\langle C_i|f\rangle = \sum_k a_k \langle C_i|C_k\rangle = a_i \langle C_i|C_i\rangle$$

$$\Rightarrow \quad a_i = \frac{\langle C_i|f\rangle}{\langle C_i|C_i\rangle}$$

$$= \frac{\int_a^b C_i^*(x) f(x) w(x) dx}{\int_a^b C_i^*(x) C_i(x) dx\, w(x)}$$

2.23 ün her iki yanını $\langle x|$ ile çarparak.

BS K

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k C_k(x)$$

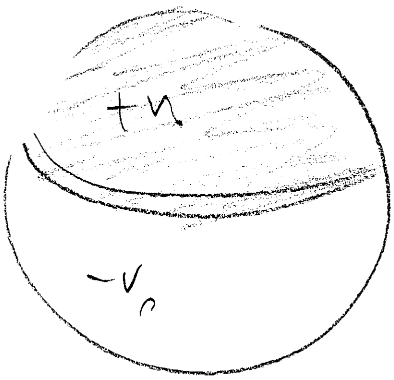
bulunur.

azimutal açıdan

7.5.1 **Örnek:** Azimut açısından bağımsız küresel sim. elektrostatik problemlerde Laplace denk.nin çözümü:

$$\Phi(r,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{b_k}{r^{k+1}}+C_k r^k\right)P_k(\cos\theta)$$

ile verilir. Şekildeki durumda kürenin dışında herhangi bir noktada pot. bulunması isteniyor:



$C_k=0$ olmalı. $\qquad X=\cos\theta$

$$\Phi(a,X)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{a^{k+1}}P_k(x)$$

$$\Phi(a,x)=\begin{cases} +V & 0<x< \\ -V_0 & -1<x<0 \end{cases}$$

$$\frac{b_k}{a^{k+1}}=\frac{\int_{-1}^{+1}P_k(x)\,\Phi(a,x)\,dx}{\int_{-1}^{1}|P_k|^2\,dx}=\frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{+1}P_k\,\Phi(a,x)\,dx$$

$$=\frac{2k+1}{2}V_0\left[-\int_{-1}^{0}P_k\,dx+\int_{0}^{1}P_k\,dx\right]$$

$$= \frac{2k+1}{2} V_0 \left[1-(-1)^k\right] \int^1 dx\, P_k(x)$$

$$= (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{(2k+1)\,(k-1)!}{2^k \left(\frac{k+1}{2}\right)! \left(\frac{k-1}{2}\right)!} V_0 \quad k \text{ tek.}$$

$$\Phi(r,\theta) = V_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(4m+3)(2m)!}{2^{2m+1}\, m!\, (m+1)!} \left(\frac{a}{r}\right)^{2m+2} P_{2m+1}(\cos\theta)$$

2.5.2. Örnek : $\delta(x)$ Dirac Delta Fonk.unun Legendre pol.u cinsinden seriye açalım

$$\delta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} P_n(x)\, \delta(x)\, dx = \frac{2n+1}{2} P_n(0)$$

$$P_{2n+1}(0) = 0 \qquad P_{2n}(0) \neq 0$$

$$\delta(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4m+1}{2} (-1)^m \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} P_{2m}(x)$$

7.6 Doğuran Fonk lar :

$$g(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n F_n(x)$$

$$\left.\frac{\partial^n g}{\partial t^n}\right|_{t=0} = A F_n(x)$$

Legendre pol. için.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n'$$

$$P_{n+1}' - P_{n-1}' - (2n+1) P_n = 0$$

$$P_n' - P_{n-2}' - (2n-1) P_{n-1} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left[P_{n-2}' - (2n-1) P_{n-1} \right]$$

$$\Rightarrow t^2 \frac{\partial g}{\partial x} = \sum t^{n+2} \left[P_{n-2}' - (2n-1) P_{n-1} \right]$$

$$(1-t^2) \frac{\partial g}{\partial x} = \sum_n \left\{ P_{n-2}' (t^n - t^{n+2}) - (2n-1)(t^n - t^{n+2}) P_{n-1} \right\}$$

$$(1-t^2) \frac{\partial g}{\partial x} + tg = \sum_{n=0} \cdots$$

BS K