BÖLÜM 13

2. DERECEDEN LİNEER DİF. DENKLEMLER

En genel ODE (ADD),

$$F\left(x, y, \underbrace{\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}}_{n}\right) = 0$$

$F : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$, $n+2$ gerçel değişkenli gerçel değerli bir fonksiyon. F, açıkca önemsiz olmayan (açıkca olmaya) bir şekilde $\frac{d^ny}{dx^n}$ ye bağlı ise n. mertebeden ODE denir.

Eğer, F nin y ve türevlerini içeren kısmı y'ye göre lineer ise, ODE ye lineer denir

$$p_0(x)y + p_1(x)\frac{dy}{dx} + \cdots + \underbrace{p_n(x)}_{\neq 0}\frac{d^ny}{dx} = q(x) \qquad (13.2)$$

$q(x) = 0 \Rightarrow$ homojen

$q(x) \neq 0 \Rightarrow$ inhomojen

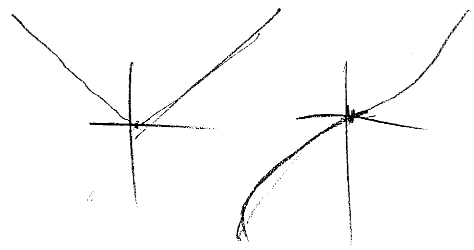
$$L \equiv p_0(x) + p_1(x)\frac{d}{dx} + \cdots + p_n(x)\frac{d^n}{dx^n} \qquad p_n(x) \neq 0$$

$$L[y] = q(x)$$

13.2 nin bir çözümü, tek değerli bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonudur, öyleki $F(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)) = 0$, ya da $L[f] = q(x)$, fnin tanım bölgesindeki tüm x'ler için. Bir dif. denk.in çözümü çok fazla kısıtlama konulur ise, mevcut olmayabilir. Örneğin, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nin çok fazla türetilmesini istersek, bir çözüm bulamayız.

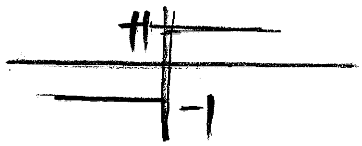
13.1.1. Örnek: $x=0$ da sıfır olan $\frac{dy}{dx} = |x|$ in en genel çözümü

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}x^2 & x \leq 0 \end{cases}$$



Bu fonk. ve türevi $f'(x) = |x|$, $x=0$ da sürekli, ikinci türevinin de sürekli olmasını istersek, bir çözüm bulamayız, zira

$$f''(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$ ise



Az kısıtlama yapılırsa, bir hayli çok çözüm bulunur. Bu ikisi arasındaki denge, çözümler arzu edildiği kadar türetilebilir olma ve başlangıç koşulları ile sağlanır.

13.1.2. Teorem: (Kapalı Fonk. Teor.)

$G(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}$ ile verilen, $G: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^{n+1}$ deki bir $P_0 = (r_1, r_2, \ldots, r_{n+1})$ noktasının bazı komşuluğunda k. mertebeye kadar sürekli parçalı türevlere sahip olsun. O zaman, P_0 daha küçük komşuluğunda sürekli olarak k defa türetilebilen tek bir $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır, öyle ki P_0 ın bir komşuluğunda tüm $P = (x_1, \ldots x_{n+1})$ noktaları için

$$x_{n+1} = F(x_1, \ldots, x_n) \text{ ve } G(x_1, \ldots x_n, F(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = 0$$ dır.

BS K

Bu teorem (13.1.) denklemine uygulanır ise,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$$

denklemine götürür.

13.2. FODE için varlık ve teklik

Genel bir FODE : $G(x, y, y') = 0$, $\frac{\partial G}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \neq 0$ ise

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

olarak yazılır. Buna normal FODE denir. Eğer, $F(x, y)$ y'ye göre lineer ise,

$$p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_0(x)\, y = q(x)$$

en genel FODE elde edilir.

13.2.1. Teorem: $p_0(x)$, $p_1(x)$ ve $q(x)$ ler (a, b) aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere $p_1(x)\, y' + p_0(x)\, y = q(x)$ şeklindeki herhangi birinci mertebeden lineer DE nin

$$y = f(x) = \frac{1}{\mu(x)\, p_1(x)}\left[C + \int_{x_1}^{x} \mu(t)\, q(t)\, dt\right]$$

şeklinde bir çözümü vardır; C keyfi bir sbt. 'tir ve

$$\mu(x) = \frac{1}{p_1(x)} \exp\left[\int_{x_0}^{x} \frac{p_0(t)}{p_1(t)}\, dt\right].$$

$x_0, x_1 \in (a, b)$ aralığında keyfi noktalar.

BS K

İspat: $p_1 y' + p_0 y = q$

$q = 0 \Rightarrow \quad p_1 \dfrac{dy}{dx} = -p_0 y$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{p_0}{p_1} dx \Rightarrow \ln y = \text{sbt} - \int_{x_0}^{x} \frac{p_0}{p_1} dt$$

$$y = e^{\text{sbt}} \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{p_0}{p_1} dt}$$

$$y e^{\int_{x_0}^{x} \frac{p_0(t)}{p_1(t)} dt} = e^{\text{sbt}}$$

$$\frac{d}{dy}\left[\quad \right] = 0 = y' e^{\int_{x_0}^{x_1} \frac{p_0}{p_1} dt} + y \frac{p_0}{p_1} e^{\int_{x_1}^{x_1} \frac{p_0}{p_1} dt} = 0$$

$$= \left(y' + y \frac{p_0}{p_1}\right) e^{\int_{x_0}^{x} \frac{p_0}{p_1} dt}$$

$q(x) \neq 0 \Rightarrow$

$$\frac{d}{dx}\left[y e^{\int_{x_0}^{x} \frac{p_0}{p_1} dt} \right] = \frac{q}{p_1} e^{\int_{x_0}^{x} \frac{p_0}{p_1} dt}$$

$$y e^{\int_{x_0}^{x} \frac{p_0}{p_1} dt} = C + \int_{x_1}^{x} \frac{q(t)}{p_1(t)} e^{\int_{x_0}^{t} \frac{p_0}{p_1} dt} dt$$

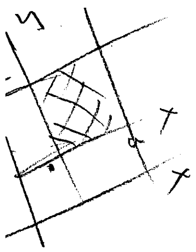
$$\mu(x) = \frac{1}{p_1(x)} \exp \int_{x_0}^{x} \frac{p_0(t)}{p_1(t)} dt$$

$$y = \frac{1}{e^{\int_{x_0}^{x} \frac{p_0}{p_1} dt}} \left[C + \int_{x_1}^{x} q(t) \mu(t)\, dt \right]$$

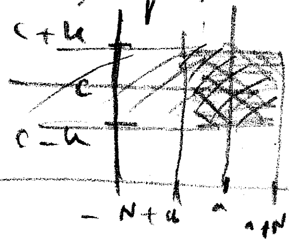
$\mu(x) p_1(x)$

BS K

13.2.2. Peano Varlık Teoremi: Eğer $F(x,y)$ fonksiyonu, $|y-c| \leq K$ ve $|x-a| \leq N$ ile tanımlanan dikdörtgen içindeki ve üstündeki noktalar için sürekli ve orada $|F(x,y)| \leq M$ ise, o zaman $y' = F(x,y)$ dif. denk.'i en az bir $y = f(x)$ çözümüne sahiptir, bu $|x-a| \leq \min(N, K/M)$ için tanımlıdır ve $f(a)=c$ başlangıç koşulunu sağlar.



$$-K < y-c < +K$$
$$-K+c < y < K+c$$



İspat:

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y)$$ verilmişken, bunun herhangi bir çözümü

$$y(x) = C + \int_a^x F(y(t), t)\, dt$$ ile verilir ve $y(a) = c$ başlangıç koşulunu sağlar. Şimdi bu integral denklemin bir çözümünün olduğunu ispatlayacağız.

$N_1 = \min(N, K/M)$ olsun. Varsayım ($a=0$ ve aralığı $0 \leq x \leq N_1$ seçebiliriz) Bu aralıkta $y^n(x)$ fonksiyonlar dizisi kurabiliriz:

$0 \leq x \leq N_1/n$ için $y^n(x) = c$ olsun.

$\frac{N_1}{n} < x \leq N_1$ için $y^n(x)$ fonksiyonunu

$$y^n(x) = C + \int_0^{x - N_1/n} F(y^n(t), t)\, dt$$

formülü ile tanımlayalım.

BS K

13.2.3. Tanım : Bir $F(x,y)$ fonksiyonu, $D \subset \mathbb{R}^2$ bölgesinde **Lipschitz** koşulunu sağlar, eğer bazı sonlu sbt L (Lip. sbt.) için bu fonksiyon D deki tüm (x,y_1) ve (x,y_2) noktaları için,

$$|F(x,y_1) - F(x,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

eşitsizliğini sağlarsa.

13.2.4. Teklik Teoremi Bir D bölgesindeki $y' = F(x,y)$, FODE nin herhangi iki çözümü $f(x)$ ve $g(x)$ olsun, burada F, L Lipschitz sabitli bir Lipschitz koşulunu sağlasın. O zaman,

$$|f(x) - g(x)| \leq e^{L|x-a|}\,|f(a) - g(a)|$$

olur. Özellikle, FODE, $(a,c) \in D$ noktasından geçen en fazla bir çözüm eğrisine sahiptir.

F nin türetilebilirliği ve $f(a) = g(a) = c$ gerekirimi ile bu teorem şunu söyler:

$y' = F(x,y)$ ye $y = f(x)$ şeklinde bir çözüm var ise, ve $f(a) = c$ sağlıyor ise, o zaman bu aranan çözümdür.

13.2.5. Örnek : $\dfrac{dy}{dx} = e^{y}$ $\quad e^{-y}dy = dx \Rightarrow -e^{-y} = x + C$

$x=0$ için $y=b \Rightarrow C = -e^{-b}$ ve çözüm $e^{-y} = -x + e^{-b}$

$$y = -\ln(e^{-b} - x)$$

BS K

böylece çözüm $-\infty < x < e^{-b}$ için tanımlıdır, yani,

bir çözümün tanım aralığı başlangıç değeri ile değişir.

13.2.6. Genel varlık ve teklik teoremi: Varsayalım ki, $F(x,y)$ fonksiyonu $|y-c| \le K$, $|x-a| \le N$ dikdörtgeninde tanımlı ve sürekli ve burada bir L koşulunu sağlıyor. Bu dikdörtgende $M = \max|F(x,y)|$ olsun. O zaman $y' = F(x,y)$ DD nin $f(a)=c$ sağlayan tek bir $y=f(x)$ çözümü vardır ve $|x-a| \le \min(N, K/M)$ aralığı üzerinde tanımlıdır.

13.3. SOLDE nin genel özellikleri:

$$p_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_0(x)y = p_3(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x) \qquad 13.10$$

(normal biçim.)

$p_2(x)=0 \Rightarrow$ dif. denk. in tekil noktaları.

13.3.1. Tanım: SOLDE nin normal biçimi, Denk. 13.10 x-ekseninin bir $[a,b]$ aralığında düzenlidir, eğer p, q ve r ler $[a,b]$ üzerinde sürekli ise. Normal bir SOLDE nin çözümü, $[a,b]$ nin her noktasında SOLDE'yi sağlayan, iki defa türetilebilen bir $y=f(x)$ fonksiyonudur.

BS K

Daha yüksek mertebeden türetilebilirlik gereği çok kısıtlayıcıdır.

<u>Operatör biçimi</u>: $L \equiv p_2 \frac{d^2}{dx^2} + p_1 \frac{d}{dx} + p_0$ ile

$L[y] = p_3$ ← lineer bir op.

α ve β sabitleri için $L[\alpha y_1 + \beta y_2] = \alpha L[y_1] + \beta L[y_2]$

eğer, y_1 ve y_2 iki çözüm ise, $L[y_1 - y_2] = 0$

$y_1 - y_2$ homojen denk. in ($p_3 = 0$) çözümüdür.

13.3.2. <u>Lemma</u>: ~~Eğer~~, $L[u] = r(x)$, $L[v] = s(x)$,

α ve β sbt.'ler ve $w = \alpha u + \beta v$ ise, o zaman

$L[w] = \alpha r(x) + \beta s(x)$ olur.

13.3.3. <u>Lemma</u> $[a,b]$ aralığında tanımlı $y'' + py' + qy = 0$

homojen denkleminin tek $g(x)$ çözümü [$g(a) = 0 = g'(a)$

sağlayan], $g = 0$ aşikar çözümüdür.

<u>İspat</u>: negatif olmayan $u = [g(x)]^2 + [g'(x)]^2$ alalım ve

bunu türetelim.

$g'' = -pg' - qg$

$u'(x) = 2gg' + g'g'' = 2g'(g + g'')$

$= 2g'(g - pg' - qg) = -2pg'^2 + 2(1-q)gg'$

$(g \pm g')^2 \geq 0$ olduğundan $2|gg'| \leq g^2 + g'^2$ olur.

$(g^2 + g'^2 \pm 2gg') \geq 0 \Rightarrow \mp 2gg' \leq g^2 + g'^2$

BS K

Böylece,

$$2(1-q)gg' \le 2|(1-q)gg'| = 2|(1-q)||gg'|$$
$$\le |(1-q)|(g^2+g'^2) \le (1+|q|)(g^2+g'^2)$$

$$u'(x) \le |u'(x)| = |-2pg'^2+2(1-q)gg'|$$
$$\le 2|p|g'^2 + (1+|q|)(g^2+g'^2)$$
$$= [1+|q|]g^2 + [1+|q|+2|p|]g'^2$$

$K = 1+\max[|q(x)|+2|p(x)|]$ olsun   max $[a,b]$ üzerinde alınır..

$$u'(x) \le K(g^2+g'^2) = KU(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

prob 1. den, tüm $x \in [a,b]$ için $u(x) \le U(a)e^{k(x-a)}$

Bu denk. + $u(a)=0$ + $U(x) \ge 0 \Rightarrow U(x) = g^2+g'^2 = 0$

Sonuç $g(x)=0=g'(x)$ tüm $x \in [a,b]$ için □

prob 13.1: $U'(x) \le kU(x)$ $x \in [a,b]$

$U'(x)e^{-kx} \le kU(x)e^{-kx}$ $U'(x)e^{-kx} - kU(x)e^{-kx} \le 0$

$$\frac{d}{dx}\Big[\underbrace{U(x)e^{-(kx)}}_{\text{non increasing fonk.}}\Big] \le 0$$

$$U(x)e^{-kx} \le U(a)e^{-ka}$$

$$U(x) \le U(a)e^{k(x-a)}$$ ✓

BS K

13.3.4. Teorem (Teklik teoremi)

Eğer p ve q, $[a,b]$ üzerinde sürekli ise, o zaman denk. 13.10 nun en fazla bir çözümü $f(a)=C_1$ ve $f'(a)=C_2$ başlangıç koşullarını sağlayabilir; burada C_1 ve C_2 ler sbt.lerdir keyfi

13.3.5 Teorem

f_1 ve f_2, $y''+py'+qy=0$ HSOLDE denkleminin iki çözümü olsun; burada p ve q, $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonk.lardır. Eğer, $(f_1(a), f_1'(a))$ ve $(f_2(a), f_2'(a))$ lar $\mathbb{R}^2$ de lineer bağımsız vektörler ise, o zaman bu HSLODE nin her $g(x)$ çözümü f_1 ve f_2 nin lineer bileşimine $g(x)=C_1 f_1(x)+C_2 f_2(x)$ eşittir, C_1 ve C_2 katsayılar olmak üzere.

İspat:

$$f_1''+pf_1'+qf_1=0$$
$$f_2''+pf_2'+qf_2=0$$

$$\vec{v}_1=(f_1(a), f_1'(a))$$
$$\vec{v}_2=(f_2(a), f_2'(a))$$
$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$$

$g(x)$ diğer bir çözüm olsun.

$(g(a), g'(a))$ vektörü $\vec{v}_1$ ve $\vec{v}_2$ nin lineer bileşimi olarak yazılabilir.

$$g(a)=C_1 f_1(a)+C_2 f_2(a)$$

$$g'(a)=C_1 f_1'(a)+C_2 f_2'(a)$$

Şimdi $u(x) \equiv g(x) - C_1 f_1(x) - C_2 f_2(x)$ fonk.nunu alalım.

Bu, $u'' + pu' + qu = 0$ denk.ni sağlar ve başlangıç koşulları $U(a) = U'(a) = 0$ dır. Lemma 13.3.3 den $U = 0$ olmalı ya da

$$g(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x).$$

13.4. Wronskian. $y'' + py' + qy = 0$ ın iki çözümü f_1 ve f_2. HSOLDE nin temel çözümleri olarak adlandırılırlar. Baz çözümleri olması için, f_1 ve f_2 lineer bağımsız olmalıdırlar. Lineer bağımsızlık;

$$\{f_i\}_{i=1}^{n} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eğer $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}$ bulunabilirse, öyle ki,

$$\alpha_1 f_1(x_0) + \alpha_2 f_2(x_0) + \dots + \alpha_n f_n(x_0) = 0 \qquad x_0 \in [a,b]$$

olsun. ancak bu yeterli değildir. Lineer bağımsızlık için bu ifade bütün $x \in [a,b]$ için geçerli olmalıdır:

$$\alpha_1 f_1(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) = 0 \quad \text{fonk.}$$

13.4.1. Tanım: Herhangi iki $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ türetilebilir fonk.nun Wronskian'ı,

$$W(f_1, f_2; x) = f_1(x) f_2'(x) - f_2(x) f_1'(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_1'(x) \\ f_2(x) & f_2'(x) \end{pmatrix}$$

13.4.2. Önerme $y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$ denk.nin herhangi iki çözümünün Wronskian'ı

$$W(f_1, f_2; x) = W(f_1; f_2; c)\, e^{-\int_c^x p(t)\,dt}$$

Sağlar. c, $[a,b]$ aralığında keyfi sayı.

Önemli! (13.12) dif. denk.nin herhangi iki çözümünün W sı $[a,b]$ arasında işaret değiştirmez. Özellikle, eğer W, $[a,b]$ içinde bir noktada "0" ise, bütün noktalarda sıfırdır.

13.4.3. Teorem: iki türetilebilir f_1 ve f_2 fonksiyonu lineer bağımlıdır iff $W=0$

İspat: f_1 ve f_2 lineer bağımlı $\Rightarrow$ $f_1 = Cf_2$, $C=$ sbt.

$\Rightarrow W=0$

tersine, $W=0 \Rightarrow f_1 f_2' - f_2 f_1' = 0 \Rightarrow f_1\, d f_2 = f_2\, d f_1$

$\Rightarrow f_2 = C f_1 \Rightarrow$ lineer bağımlı

13.4.4. Örnek: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = |x|$ $x \in [-1,1]$ için,

olsun. Bu iki fonk. lineer bağımsızdır?, çünkü

$\alpha_1 x + \alpha_2 |x| = 0$ tüm x için iff $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

$$W(f_1, f_2; x) = x \frac{d|x|}{dx} - |x| \frac{dx}{dx} = x \frac{d|x|}{dx} - |x|$$

$$= x \frac{d}{dx} \begin{cases} x \\ -x \end{cases} - \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x - x = 0 & x > 0 \\ -x - (-x) = 0 & x < 0 \end{cases}$$

13.4.5. Örnek:

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonlarının Wronskian'ı

BS K

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n; x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_1'(x) & \ldots & f_1^{n-1}(x) \\ f_2(x) & f_2'(x) & \ldots & f_2^{n-1}(x) \\ \vdots & & & \\ f_n(x) & f_n'(x) & \ldots & f_n^{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

fonk.-lar lineer bağımlı $\Rightarrow W=0$. Örn., e^x e^{-x} ve sinh x lineer bağımlıdırlar.

$$W(e^x, e^{-x}, \sinh x; x) = \det \begin{pmatrix} e^x & e^x & e^x \\ e^{-x} & -e^{-x} & e^{-x} \\ \sinh x & \cosh x & \sinh x \end{pmatrix} \to 0$$

13.4.1. ~~HESOLDE~~ nin ikinci bir çözümü $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ ın bir çözümünü, f_1, bilirsek ikincisini bulunuz:

$$f_1(x) f_2'(x) - f_2(x) f_1'(x) = W(x) = W(c)\, e^{-\int_c^x p(t)\,dt}$$

Her iki yanın türetip sonucu, f_1^2 ye bölelim:

$$f_1 f_2'' - f_2 f_1'' = -W(c)\, p(x)\, e^{-\int_c^x p(t)\,dt}$$

$$\frac{f_1 f_2'' - f_2 f_1''}{f_1^2} = -W(c) \frac{p(x)}{f_1^2} e^{-\int_c^x p(t)\,dt}$$

$$\left.\begin{aligned} f_2 f_1'' + p f_2 f_1' + \cancel{f_2 q f_1} &= 0 \\ f_1 f_2'' + p f_1 f_2' + q \cancel{f_2 f_1} &= 0 \end{aligned}\right\} f_1 f_2'' - f_2 f_1'' = -p(x)(f_1 f_2' - f_2 f_1')$$

BS K

$$\frac{f_1 f_2' - f_2 f_1'}{f_1^2} = W(c)\,\frac{1}{f_1^2}\, e^{-\int_c^x p(t)\,dt}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = W(c)\,\frac{1}{f_1^2}\, e^{-\int_c^x p(t)\,dt}$$

$$f_2(x) = f_1(x)\left\{ C + K \int_\alpha^x \frac{ds}{f_1^2(s)}\, e^{-\int_c^s p(t)\,dt} \right\}$$

"0" almak adettendir.

13.4.6. Örnek:

(a) $y'' - k^2 y = 0$ ye bir çözüm e^{kx} dir. İkincisini bulalım. $C=0$, $K=1$, $p(x)=0$

$$f_2(x) = e^{kx}\left[0 + \int_\alpha^x \frac{ds}{e^{2ks}}\right] = \frac{-1}{2k}\, e^{-kx} + \frac{e^{-2k\alpha}}{2k}\, e^{kx}$$

1. çözüm ile orantılı

ignore it.

e^{-kx} 2. çözüm

(b) $y'' + k^2 y = 0$ $\quad f_1 = \sin kx$

$C=0$, $\alpha = \frac{\pi}{2k}$ $\quad K=1$

$$f_2(x) = \sin kx\left(0 + \int_{\pi/2k}^x \frac{ds}{\sin^2 ks}\right) = -\sin kx \cot ks \Big|_{\pi/2k}^x$$

$$= -\cos kx$$

BS K

(c) (a) için $W(x) = -2k$ } her ikisi de sbt.

(b) " $W(x) = -k$

Genel olarak $y'' + q(x)y = 0$ ın iki lineer bağımsız çözümünün

W.ni sbt.dir.

13.4.7. Örnek: $y'' - \frac{2x}{1-x^2} y' + \frac{n(n+1)}{1-x^2} y = 0$

$p(x)$ $q(x)$

Bir çözümü $P_n(x)$ 2. sini bulalım. $C=0 = c$

$$Q_n(x) = K P_n(x) \int_\alpha^x \frac{1}{P_n^2(s)} \exp\left[\int_0^s \frac{2t}{1-t^2} dt\right] ds$$

$$= K P_n(x) \int_\alpha^x \frac{1}{P_n^2(s)} \frac{1}{1-s^2} ds$$

$$= A_n P_n(x) \int_\alpha^x \frac{ds}{(1-s^2) P_n^2(s)} \qquad \alpha \in [-1, +1]$$

$P_0(x) = 1$ $\quad Q_0(x) = A_0 \int_\alpha^x \frac{ds}{1-s^2} = A_0 \left[\frac{1}{2} \ln \left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{2} \ln \left|\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right|\right]$

$A_0 = 1$ ve $\alpha = 0$ için standart Q_0 bulunur: $Q_0 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$P_1(x) = x$ bulunur $\Rightarrow$ $Q_1(x) = A_1 x \int_\alpha^x \frac{ds}{s^2(1-s^2)} = Ax + Bx \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$

$A = 0$ $B = 1/2$ $C = -1$ için (standartlaştırılırsa) $\qquad |x| < 1$

$$Q_1(x) = \frac{1}{2} x \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 1$$

BS K

13.4.2. ISOLDE nin genel çözümü:

Green fonk.ları cinsinden 20. Böl. tartışılacak.

!. sağlar!

$$L[y] = y'' + py' + qy = r(x) \qquad (13.14)$$

denkleminin bir özel çözümü $g(x)$ olsun; herhangi bir diğer çözümü de $h(x)$ olsun. $h(x) - g(x)$, $L[y]=0$ denklemini sağlar; bu da $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ temel çözümlerin lineer bileşimi olarak yazılabileceğinden

$$h(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + g(x)$$

genel çözüm olur.

Sabitler değişimi yöntemi: ISOLDE'nin özel çözümünü bulmak.

f_1 ve f_2 HSOLDE çözümleri olsun. $g(x)$ de (13.14)de çözüm olsun. $g(x) = f_1(x)\, v(x)$ alır, (13.14) de kullanarak $v(x)$ için SOLDE elde ederiz:

$$v'' + \left(p + \frac{2f_1'}{f_1}\right) v' = \frac{r}{f_1}$$

v' ye göre 1. mertebeden DE dir. Çözümü, (13.2.1 den)

$$\boxed{v' = \frac{W(x)}{f_1^2(x)} \left[C + \int_a^x \frac{f_1(t)\, r(t)}{W(t)}\, dt \right]}$$

burada $W(x)$, 13.14 ün Wronskian'ı.

$$\frac{W(x)}{f_1^2(x)} = \frac{f_1 f_2' - f_2 f_1'}{f_1^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$$

BS K

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{f_2}{f_1}\right)\int_a^x \frac{f_1(t)\,r(t)}{W(t)}\,dt \qquad C=0 \text{ aldık.}$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{f_2}{f_1}\int_a^x \frac{f_1 r}{W}\,dt\right] - \frac{f_2(x)}{\cancel{f_1(x)}}\underbrace{\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f_1 r}{W}\,dt}_{\frac{\cancel{f_1}(x)\,r(x)}{W(x)}}$$

$$v(x) = \frac{f_2(x)}{f_1(x)}\int_a^x \frac{f_1(t)\,r(t)}{W(t)}\,dt - \int_a^x \frac{f_2(t)\,r(t)}{W(t)}\,dt$$

bu şu özel çözüme yol açar:

$$g(x) = f_1(x)\,v(x) = f_2(x)\int_a^x \frac{f_1(t)\,r(t)}{W(t)}\,dt$$

$$- f_1(x)\int_a^x \frac{f_2(t)\,r(t)}{W(t)}\,dt \qquad (13.16)$$

Bunu ispatladık!

13.4.8. Öneri ISOLDE ye karşılık gelen homojen denklemin tek bir çözümü $f_1(x)$ verilmiş iken, homo. denk.in 2. çözümü $f_2(x)$ i bulmak için Denk. 13.13 $[f_2(x)]$ ve özel çözümü $g(x)$ i bulmak için Denk. 13.16 kullanılabilir. O zaman, en genel $h(x)$ çözümü

$$\boxed{h(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + g(x)}$$

ile verilecektir.

13.4.3. Ayırma ve Karşılaştırma Teoremleri

13.4.9. Ayırma teoremi: Bir HSOLDE nin iki lineer bağımsız çözümünün sıfırları, almaşık olarak belirir.
alternately

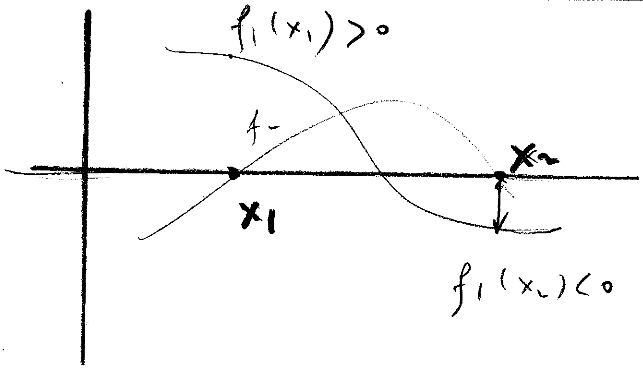
BS K

İspat: $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ denkleminin iki bağımsız çözümü $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ olsun. f_1'in bir sıfırının f_2 nin iki sıfırı arasında olduğunu göstermek zorundayız. f_1 ve f_2 lineer bağımsız $\Rightarrow$ herhangi $x\in[a,b]$ için $W(f_1,f_2;x)\neq 0$. $x_i\in[a,b]$, f_2'nin bir sıfırı olsun. O zaman,

$$0\neq W(f_1,f_2;x_i)=f_1(x_i)f_2'(x_i)-\cancel{f_2(x_i)}f_1'(x_i)$$

$$=\underbrace{f_1(x_i)}_{\neq 0}\,\underbrace{f_2'(x_i)}_{\neq 0}$$ olur.

Varsayalım ki x_1 ve x_2 $(x_2>x_1)$ ler f_2 nin ardışık iki sıfırı olsun. f_2, $[a,b]$ aralığında sürekli ve $f_2'(x_1)\neq 0$ olduğundan, f_2 ya artan $[f_2'(x_1)>0]$ ya da azalan $[f_2'(x_1)<0]$ olmak zorundadır. x_2 de f_2 nin sıfırı olması için (x_2 sonraki nokta) $f_2'(x_2)$, $f_2'(x_1)$den ters işarete sahip olmalıdır.



$[a,b]$ içinde W nin işaretinin değişmediğini gördük. O zaman yukarki denklem, $f_1(x_1)$ ve $f_1(x_2)$ ters işaretlere sahip olduğunu söyler. f_1 in sürekliliği $\Rightarrow$ f_1, x-eksenini x_1 ve x_2 arasında bir yerde keser. Benzer bir tartışma f_2 nin f_1 in iki sıfırı arasında bir sıfırının olduğunu söyler. □

Örnek: $y''+y=0$'ın lineer bağımsız çözümleri $\cos x$, $\sin x$ bunların sıfırları almaşık olarak gelir: $\cos x \to \pi/2$ nin tek katlarında
$\sin x \to \pi/2$ nin çift "

13.4.11. <u>Karşılaştırma Teoremi</u> (Birkhoff, p.47)

· f ve g sırasıyla $u''+p(x)u=0$ ve $v''+q(x)v=0$ ın aşikar olmayan çözümleri olsun; burada tüm $x\in[a,b]$ için $p(x)\geq q(x)$ dir. O zaman, $p=q$ ve f, g'nin bir sbt katı olmadıkça, f, g'nin herhangi iki sıfırı arasında en az bir kere sıfır olur.

<u>İspat:</u> x_1 ve x_2, $g(x)$ in ardışık iki sıfırı olsun, öyleki

$g(x_1)=g(x_2)=0$. Varsayın ki $f(x)$, $x_1<x<x_2$ arasında sıfır olmasın. f ve/veya g'yi negatifi ile değiştirerek, gerekirse $x_1<x<x_2$ üzerinde pozitif olan f ve g'nin çözümlerini bulabilirdik. Bu şunu yapacaktı:

$W(f,g;x_1)=f(x_1)g'(x_1)\geq 0$ ve $W(f,g;x_2)=f(x_2)g'(x_2)\leq 0$

öte yandan, $f>0$, $g>0$ ve $p\geq q$ ($x_1<x<x_2$ üstünde) olduğundan

$$\frac{d}{dx}\left[W(f,g;x)\right]=fg''-gf''=(p-q)fg\geq 0$$

böylece, W azalan değildir,

$(p-q)\equiv W(f,g;x)=0$ olmadıkça bir çelişkiye neden olur. Bu olayda $f\equiv kg$ dir ve ispatı tamamlar.

13.4.12. <u>Örnek:</u> $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ denklemi uygun fonksiyonel dönüşümle $\underbrace{u''+S(x)u=0}$ biçimine sokulabilir.

$y=w(x)u$ tanımlayalım.

$$(u'w+uw')'+p(u'w+w'u)+quw=0$$

$$wu''+\underbrace{(2w'+pw)}u'+(qw+pw'+w'')u=0$$

bunu w'ya böl

olabilmesi için $\to 0$ olmalı! $2w'+pw=0$ $u''+S(x)u=0$

$$w(x) = C \exp\left[-\frac{1}{2}\int_a^x p(t)\,dt\right]$$

$-\frac{1}{2}p$

13.17 den $u'' + S(x)u = 0$ $\quad S(x) = q + p\frac{w'}{w} + \frac{w''}{w}$

$S(x) = \frac{u''}{u}$ $\quad = q - \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p'$

13.4.13. Sonuç: Tüm $x \in [a,b]$ için $q(x) < 0 \Rightarrow$ o zaman,

$v''(x) + q(x)v(x) = 0$ DD nin aşikar olmayan hiç bir çözümü birden fazla sıfıra sahip olamaz.

13.4.14. Örnek: $v'' + qv = 0$ ın çözümlerinin salınımları $q(x)$ in işareti ve büyüklüğü ile belirlenir. $q(x) \leq 0$ için hiç salınım yoktur; yani, birden fazla işaret değiştiren hiç bir çözümü yoktur. Şimdi gerçel k için $q(x) \geq k^2 > 0$ varsayalım. O zaman, teorem 13.4.11 den $v'' + qv = 0$ ın herhangi bir çözümü, $u'' + k^2 u = 0$ ın $\sin kx$ çözümünün herhangi ardışık iki sıfırının arasında en az bir sıfıra sahip olmalıdır. Bu demektir ki, $v'' + q(x)v = 0$' ın herhangi çözümü, $q(x) \geq k^2 > 0 \Rightarrow$ herhangi π/k uzunluk aralığında bir sıfıra sahip olmalıdır.

Bunu Bessel DD ne uygulayalım:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0$$

y için $v/\sqrt{x}$ alır $\Rightarrow$ $v'' + \left(1 - \frac{4n^2-1}{4x^2}\right)v = 0$ olur.

$n=0$ için bu denklemi $u = \sin x$ çözümüne sahip olan $u'' + u = 0$ ile karşılaştıralım. Şu sonuca varırız: pozitif x-ekseninin π uzunluğundaki her aralığı Bessel DD nin ($n=0$ için) herhangi bir çözümünün en az bir sıfırını içerir. Böylece, $J_0(x)$, x-ekseninin bir π-uzunluk aralığında bir sıfırı vardır. Öte yandan, $4n^2 - 1 > 0$, ya da $n > 1/2$ için $1 > \left[1 - \frac{4n^2-1}{4x^2}\right]$ elde ederiz. Bu şunu söyler: $\sin x$, $n > 1/2$ olan $J_n(x)$ in herhangi ardışık iki sıfırı arasında en az bir sıfıra sahiptir. Böyle bir Bessel fonksiyonu, $\sin x$ in herhangi ardışık iki sıfırı arasında en çok bir sıfıra sahip olamaz.

BS K

~~13~~.5. Adjoint Dif. Operatörler:

13.5.1. Tanım: Ikinci mertebeden SOLDE, $L[y] \equiv p_2 y'' + p_1 y' + p_0 y = 0$ (13.18)

tamdır denir, eğer tüm $f \in C^2[a,b]$ ve bazı $A, B \in C^1[a,b]$ için, eğer

2. türeve sahip $[a,b]$ kapalı aralığındaki reel değerli tüm fonk. lar.

$$L[f] \equiv p_2(x) f'' + p_1(x) f' + p_0(x) f$$

$$= \frac{d}{dx}[A(x) f' + B(x) f] \quad \text{ise} \qquad (13.18)$$

ise. $L[y]$ için bir integralleme çarpanı, bir $\mu(x)$ fonk.dur öyle ki $\boxed{\mu(x) L[y]}$, tamdır. Eğer, bir integralleme çarpanı mevcut ise, o zaman (13.18) denklemi

$$\frac{d}{dx}[A(x) y' + B(x) y] = 0 \Rightarrow A(x) y' + B(x) y = C$$

sbt homojen olmayan terimli bir FOLDE'ye indirgenir. (13.18) ve karşılık gelen ISOLDE bile çözülebilir, çünkü,

$$\boxed{\mu(x) L[y]} = \mu(x) r(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}[A(x) y' + B(x) y] = \mu(x) r(x)$$

$$\Rightarrow A(x) y' + B(x) y = \int_{\alpha}^{x} \mu(t) r(t)\, dt$$

genel bir FOLDE dir. Böylece, bir integral sbt nin varlığı SOLDE yi tamamiyle çözer. Bu nedenle, bir SOLDE nin bir integral çarpanını kabul edip etmemesi önemlidir.

BS K

$L[y] \equiv p_2 y'' + p_1 y' + p_0 y = 0$

13.5.2. **Öneri:** (13.18) denkleminin SOLDE'si tamdır.

$\Leftrightarrow$ $p_2'' - p_1' + p_0 = 0$ ise.

$L[f] = \frac{d}{dx}\left[A(x) f'(x) - B(x) f(x)\right]$

İspat: SOLDE, tam $\Rightarrow$ o zaman (13.19) tüm f için geçerlidir.

$\Rightarrow p_2 = A$, $p_1 = A' + B$ ve $p_0 = B'$

buradan, $p_2'' = A''$, $p_1' = A'' + B'$ ve $p_0 = B'$ çıkar ki, bu da

$$p_2'' - p_1' + p_0 = 0$$ verir.

Tersine olarak, $p_2'' - p_1' + p_0 = 0 \Rightarrow$ 13.18.'i solunda

$$p_0 = -p_2'' + p_1'$$

koyar $\Rightarrow$

$$p_2 y'' + p_1 y' + p_0 y = p_2 y'' + p_1 y' + (-p_2'' + p_1')y$$

$$= p_2 y' - p_2'' y + (p_1 y)' = (p_2 y' - p_2' y)' + (p_1 y)'$$

$$= \frac{d}{dx}\left(p_2 y' - p_2' y + p_1 y\right)$$

elde ederiz ve DE, tamdır. $\square$

Açıkça, genel bir SOLDE tam değildir. Bir integrelleme çarpanı ile çarparak onu tam yapabilir miyiz? ✓

13.5.3 **Öneri** Bir μ fonksiyonu, 13.18 denkleminin bir integrelleme çarpanıdır $\Leftrightarrow$ o μ SOLDE

$$M[\mu] \equiv (p_2\mu)'' - (p_1\mu)' + p_0\mu = 0 \qquad (13.20)$$

nın bir çözümü ile

13.20 denklemini açalım.

$$p_2\mu'' + (2p_2' - p_1)\mu' + (p_2'' - p_1' + p_0)\mu = 0$$

BS K

$$M \equiv p_2 \frac{d^2}{dx^2} + (2p_2' - p_1)\frac{d}{dx} + (p_2'' - p_1' + p_0)$$

ile tanımlanan M ye L op.nün adjointi denir ve $M = L^+$ ile gösterilir.

$$(L^+)^+ = L$$

Bu demektir ki, eğer v, $L[u]$ nun bir integralleme çarpanı ise, o zaman u, $M[v] \equiv L^+[v]$ nin bir integralleme çarpanı olacaktır.

$$v L[u] = v p_2 u'' + v p_1 u' + v p_0 u$$

$$u M[v] = u (p_2 v)'' + u (p_1 v)' + u p_0 v$$

$$v L[u] - u M[v] = (v p_2) u'' - u (p_2 v)'' + v p_1 u' + u (p_1 v)'$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\underbrace{p_2 v u' - (p_2 v)' u + p_1 u v}\right] \qquad 13.23$$

$$\int_a^b [v L[u] - u M[v]]\, dx = [\quad / \quad]_a^b \qquad 13.24.$$

(13.23-24 Lagrange özdeşlikleri.)

u ve v leri soyut vektörler $|u\rangle$ ve $|v\rangle$

$$\langle u | v \rangle = \int_a^b u^*(x)\, v(x)\, dx \qquad \text{iç çarpım}$$

olarak alınırsa $\Rightarrow$ (13.24)

$$\langle v | L | u \rangle - \langle u | M | v \rangle = \langle u | L^+ | v \rangle^* - \langle u | M | v \rangle$$

$$= \left[p_2 v u' - (p_2 v)' u + p_1 u v \right]_a^b$$

RHS sıfır $\Rightarrow$ $\langle u | L^+ | v \rangle^* = \langle u | M | v \rangle$ $\forall$ $|u\rangle, |v\rangle$ ve tüm bu ... fonk.lar geçerli olduğundan $L^+ = M$

sonlu boyutlu vektör uzaylarında olduğu gibi, self-adjoint op. özel ilgi gerektirir.

$M[v] \equiv L^{+}[v]$ nin L ye eşit olması için

$2p_2' - p_1 = p_1$ ve $p_2'' - p_1' + p_0 = p_0$ olmalıdır.

İlki $p_2' = p_1$ verir ki bu 2. siniride verir. Bu koşul geçerli ise, (13.48) şöyle yazılabilir:

$$L[y] = p_2 y'' + p_2' y' + p_0 y$$

$$L[y] = \frac{d}{dx}\left[p_2(x) \frac{dy}{dx} \right] + p_0(x) y = 0$$

Tüm SOLDE leri self-adjoint yazabilir miyiz? 13.48 in her iki yanını $h(x)$ ile çarpalım.

$$h(x) p_2(x) y'' + h(x) p_1(x) y' + h(x) p_0(x) y = 0$$

denk. nin self-adjoint olmasını istiyorum. Bu ancak, $h(x)$; $h p_1 = (h p_2)'$ ya da $p_2 h' + h(p_2' - p_1) = 0$ olacak şekilde seçersek mümkündür. Bu da integrallenir ise,

$$h(x) = \frac{1}{p_2} \exp\left[\int^{x} \frac{p_1(t)}{p_2(t)} dt \right] \text{ verir.}$$

Bu söylenenleri bir teorem olarak ifade edebiliriz.

13.5.4. <u>Teorem</u>: $L[y] \equiv p_2 y'' + p_1 y' + p_0 y = 0$ SOLDE si self-adjoint tir. <u>ancak ve ancak</u> $p_2' = p_1$ ise; bu durumda DE

$$\frac{d}{dx}\left[p_2(x) \frac{dy}{dx} \right] + p_0(x) y = 0 \quad \text{şeklini alır.}$$

self-adjoint değil $\Rightarrow$ $h(x) = \frac{1}{p_2} \exp\left[\int^{x} \frac{p_1(t)}{p_2(t)} dt \right]$ ile çarpılarak böyle yapılabilir.

13.5.5. örneği inceleyin!

BS K

17.6.1 SOLDE lerin seri çözümleri

17.6.1. Frobenius Yöntemi

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$$

gerçel ve analitik ise bu denklemdeki p ve q lar (a,b) aralığında yakınsak kuvvet serisi ile temsil edilebilir.

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad , \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \qquad y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$$

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k C_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) . C_{k+1} x^k$$

$$y'' = \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) C_{k+1} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) C_{k+2} x^k$$

$$\rightarrow p(x)\, y' = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m (k+1) C_{k+1} x^k$$

$$= \sum_k \sum_m (k+1) a_m C_{k+1} x^{k+m}$$

$$k+m = n \qquad k = n-m \geq 0 \Rightarrow m \leq n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (\overbrace{n-m}^{k}+1)\, a_m C_{\underbrace{n-m}_{k}+1}\, x^{n}$$

$$q(x)\, y = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} b_m C_{n-m} x^n$$

bunları DE de yerine koyarsak :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+1)(n+2)C_{n+2}+\sum_{m=0}^{n}\left[(n-m+1)a_m C_{n-m+1}+b_m C_{n-m}\right]\right\}x^n=0$$

• x in her kuvvetinin katsayısı sıfır olmalıdır.

$$(n+1)(n+2)C_{n+2}=-\sum_{m=0}^{n}\left[(n-m+1)a_m C_{n-m+1}+b_m C_{n-m}\right] \quad n\geq 0 \text{ için}$$

ya da $n\to n-1$

$$n(n+1)C_{n+1}=-\sum_{m=0}^{n-1}\left[(n-m)a_m C_{n-m}+b_m C_{n-m-1}\right] \quad n\geq 1 \text{ için}$$

C_0 ve C_1'i bilirsek (örneğin ~~sınır~~ koşullarından) 13.29 dan $n\geq 2$ için C_n katsayılarını tek olarak bulabiliriz. Bu da sırasıyla y için tek bir seri açılımı verir ve şu teoremi elde ederiz. (13.29)

13.6.2. __Varlık teoremi__: 13.28 in ilk iki denklemi ile verilen analitik katsayı fonksiyonları olan $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ biçimindeki herhangi bir SOLDE için, tek bir kuvvet serisi mevcuttur; bu C_0 ve C_1 in herbir seçimi için formal olarak SOLDE yi sağlayan $y=\sum_{k=0}^{\infty}C_k x^k$ ile verilir. (teorem serinin varlığını gösterir, yakınsaması hakkında bir şey söylemez)

13.6.3. __Örnek__:

$$x^2y'-y+x=0$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^n \qquad y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)C_{n+1}x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)C_{n+1}x^{n+2}-\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^n+x=0$$

BS K

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) C_{n+1} x^{n+2} - C_0 - C_1 x - \sum_{n=2}^{\infty} C_n x^n + x = 0$$

$C_0 = 0$, $C_1 = 1$ $n \geq 0$ için $(n+1) C_{n+1} = C_{n+2}$

$n \geq 1$ için $n C_n = C_{n+1}$ $C_n = (n-1)!$

$$y = x + x^2 + (2!) x^3 + (3!) x^4 + \dots + (n-1)! x^n + \dots$$

$x \neq 0$ için bu seri yakınsak değildir.

13.6.4 **Örnek:**

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2} y' + \frac{\lambda}{1-x^2} y = 0$$

$p(x)$ $q(x)$

$|x| < 1$ için p ve q onun her ikisi de analitiktir.

$$p(x) = -2x \sum_{m=0}^{\infty} (x^2)^m = \sum_{m=0}^{n} (-2) x^{2m+1} \qquad \sum a_k x^k$$

$$q(x) = \lambda \sum_{m=0}^{\infty} (x^2)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda x^{2m} \qquad \sum b_k x^k$$

13.28

$$a_m = \begin{cases} 0 & (m \text{ çift}) \\ -2 & (m \text{ tek}) \end{cases} \qquad b_m = \begin{cases} \lambda & m \text{ çift} \\ 0 & m \text{ tek} \end{cases}$$

$$n(n+1) C_{n+1} = -\sum_{m=0}^{n-1} [(n-m) a_m C_{n-m} + b_m C_{n-m-1}] \quad n \geq 1$$

13.29 dan C_{n+1} bulunur: (i) n tek olsun: $n = 2r+1$

$$(2r+1)(2r+2) C_{2r+2} = \sum_{m=0}^{r} (4r - 4m - \lambda) C_{2(r-m)}$$

$r \to r+1$ alırsak

$$(2r+3)(2r+4) C_{2r+4} = \sum_{m=0}^{r+1} (4r+4-4m-\lambda) C_{2(r+1-m)}$$

BS K

$$= (4r+4-\lambda)\, C_{2(r+1)} + \sum_{m=1}^{r+1} (4r+4-4m-\lambda)\, C_{2(r+1-m)}$$

$$= (4r+4-\lambda)\, C_{2r+2} + \sum_{m=0}^{r} (4r-4m-\lambda)\, C_{2(r-m)}$$

baştaki ifade!

$$= (4r+4-\lambda)\, C_{2r+2} + (2r+1)(2r+2)\, C_{2r+2}$$

$$= \left[-\lambda + (2r+3)(2r+2)\right] C_{2r+2} \quad \left(= (2r+3)(2r+4)\, C_{2r+4} \right)$$

$2r+2 \equiv k$ dersek

$$(k+1)(k+2)\, C_{k+2} = \left[k(k+1) - \lambda\right] C_k$$

$$C_{k+2} = \frac{k(k+1)-\lambda}{(k+1)(k+2)}\, C_k \qquad \text{çift } k\text{'lar için.}$$

(b) n çift olsun $n=2r$

bunun için aynı $C_{k+2} = \dots C_k$ denklemini tek k için elde ederiz. Böylece,

$$C_{n+2} = \frac{n(n+1)-\lambda}{(n+1)(n+2)}\, C_n$$

keyfi C_0 ve C_1 için iki bağımsız çözüm elde ederiz. Biri x in tek diğeri çift kuvvetleri. Genelleştirilmiş oran testi gösterir ki pozitif tam l için $\lambda = l(l+1)$ olmadıkça seri ıraksar.

* böyle l seri polinom olur.

BS K

13.6.5. **Örnek** : $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$

$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$; E → top. enerji

$$\psi'' - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0 \qquad \begin{cases} \psi(x) = H(x)\, e^{-m\omega x^2/2\hbar} \\ x = \sqrt{\dfrac{\hbar}{m\omega}}\, y \end{cases}$$

$$\Leftarrow$$

$$H'' - 2yH' + \lambda H = 0 \qquad \lambda = \frac{2E}{\hbar\omega} - 1$$

$$H(y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n y^n \qquad H' = \sum_{n=1} n C_n y^{n-1} = \sum_{n=0} (n+1) C_{n+1} y^n$$

$$H'' = \sum_{n=1} n(n+1) C_{n+1} y^{n-1} = \sum_{n=0} (n+1)(n+2) C_{n+2} y^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)C_{n+2} + \lambda C_n\right] y^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)C_{n+1}y^{n+1} = 0$$

$$2C_2 + \lambda C_0 + \sum_0^{\infty}\left[(n+2)(n+3)C_{n+3} + \lambda C_{n+1} - 2(n+1)C_{n+1}\right] \times y^{n+1} = 0$$

$$C_2 = -\frac{\lambda}{2} C_0$$

$$C_{n+3} = \frac{2(n+1) - \lambda}{(n+2)(n+3)} C_{n+1} \qquad n \geq 0$$

$n \to n-1$

$$C_{n+2} = \frac{2n - \lambda}{(n+1)(n+2)} C_n \qquad n \geq 1$$

Tüm y'ler için seri yakınsar. Fiziksel nedenlerden dolayı $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

olmalı, seri bir yerde kesilmeli. Bu ancak bazı tam l için $\lambda = 2l$ de olur. Bu durumda Hermite polinomu elde edilir. Böylece bir kesmenin sonucu HO ün enerjisi kuantumlanır.

$$2l = \lambda = \frac{2E}{\hbar w} - 1 \Rightarrow E = \left(l + \frac{1}{2}\right)\hbar w$$

C_0 ve C_1 sonuçlar HSOLDE nin genel çözümünü belirler.

13.7. Sabit katsayılı SOLDE : En genel sabit katsayılı n. mertebeden lineer dif. denklem NOLDE

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = r(x)$$

Buna karşılık gelen HNOLDE, $r(x) = 0$ alınarak çözülür.

$y = e^{\lambda x}$ alınarak,

$$L[e^{\lambda x}] = \underbrace{(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0)}_{p(\lambda) \equiv} e^{\lambda x} \doteq 0$$

~~Eğer~~ λ, $p(\lambda) \equiv$ karakteristik polinomun bir kökü ise, bu denklem geçerlidir. Cebirin temel teoreminden

$$p(\lambda) \equiv (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}$$

olarak yazılabilir. λ_j ler $p(\lambda)$ nın farklı kökleridir ve k_j katlılığı vardır.

13.7.1 Teorem: Genel HNOLDE'nin karakteristik polinomunun kökleri $\{\lambda_j\}_{j=1}^{m}$ olsun ve karşılık gelen kökle

$\{k_j\}_{j=1}^{m}$ katlılığa sahip olsun. O zaman,

$$\{\underbrace{e^{\lambda_j x},\ x e^{\lambda_j x},\ \ldots,\ x^{k_j-1} e^{\lambda_j x}}\}_{j=1}^{m}$$

fonksiyonları, HOLDE nin baz çözümleridir. λ kompleks ise, buna karşılık gelen çözümler trigonometrik fonksiyonlar ile yazılır.

İspat: $x^r e^{\lambda_r x}$ $(r=0, \ldots, k_j-1$

$$(D-\lambda)[e^{\lambda x} f(x)] = e^{\lambda x} f'(x)$$

İndüksiyon ile $(D-\lambda)^k [e^{\lambda x} f(x)] = e^{\lambda x} f^{(k)}(x)$ $f \in C^k$

$k > r$ olduğunda x^r nin k. türevi sıfır olacağından,

$$(D-\lambda)^k [x^r e^{\lambda x}] = 0 \quad k > r \text{ ise.}$$

Dahası, $(D-\lambda_j)^{k_j}$ "permutable" olduğundan

Lemma: "permutable": Sbt katsayılı lineer op. ler "permutable" dır. Herhangi a_j, b_k sbt. leri için $p(D) = \sum a_j D^j$ ve $q(D) = \sum b_k D^k \Rightarrow p(D)q(D) = \sum a_j b_k D^{j+k}$

Herhangi bir j için, $L[y] = \underbrace{q_j(D)}_{\prod_{i \neq j} (D-\lambda_i)^{k_i}} (D-\lambda_j)^{k_j}$ yazarız.

$\therefore$ $L(x^r e^{\lambda_j x}) = 0$ $\forall \lambda_j$ ve $r = 0, 1, \ldots, k_j - 1$ için olur.

BS K

13.7.2. <u>Örnek</u> Mekanik ve devre teorisinden,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = 0 \qquad a, b > 0$$

$p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ karakteristik pol.

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-a \mp \sqrt{a^2-4b}\right)$$

(a) $a^2 > 4b$ (<u>overdamped</u>)

λ_1 ve λ_2 farklı iki gerçel kök, katlılıklar

$k_1 = k_2 = 1$

$\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b}$ der isek en genel çözüm,

$$y(t) = e^{-at/2}\left(c_1 e^{\gamma t} + c_2 e^{-\gamma t}\right)$$

$a > 2\gamma$ olduğundan, çözüm $t=0$ da $y = c_1 + c_2$ den başlar, sürekli olarak azalır; $t \to \infty$ iken $y(t) \to 0$ olur.

(b) $a^2 = 4b$ (<u>kritik olarak damped</u>) $e^{\lambda_1 x}$, $xe^{\lambda_1 x}$

bu durumda 2. dereceden $(k_1 = 2)$ bir katlı köke sahibiz;
bu nedenle x in kuvveti "0" ya da "1" $(r_1 = 0, 1)$ olur.
Genel çözüm,

$$y(t) = c_1 t e^{-at/2} + c_0 e^{-at/2}$$

Bu çözüm $t=0$ da $y(0) = c_0$'da başlar, $t = \frac{2}{a} - \frac{c_0}{c_1}$ de bir maks. (min) a erişir ve sonuç olarak, üstel olarak 0 a azalır (atar).

BS K

(c) $a^2 < 4b$ (underdamped) iki farklı kök katsayıları 1 ($k_1 = k_2 = 1$) olur; bu nedenle her iki çözüm için x'in kuvvetleri sıfırdır ($r_1 = r_2 = 0$)

$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$ olsun. O zaman $\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{a}{2} + i\omega \\ \lambda_2 = \lambda_1^* \end{cases}$

En genel çözüm,

$$y(t) = e^{-at/2}\left(C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t\right)$$

$$= A e^{-at/2} \cos(\omega t + \alpha)$$

Bu çözüm, azalan genlikli $A e^{-at/2}$ bir harmonik titreşimdir. $a = 0 \Rightarrow$ genlik bozulmaz. Bu nedenle (damping) çarpanı adını alır.

Mekanik → Vizkoz bir akışkanda salınan bir mekanik sistem.

Elektrik → RLC devresi

$$a = R/L \qquad b = 1/LC$$

$$\omega = \sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$R \geq 2\sqrt{L/C}$ için devre salınmaz.

Sürücü kuvvetin yokluğundaki davranışı NOLDE ile tasvir edilen fiziksel bir sistem, sürücü kuvvet varsa inhomojen bir NOLDE'ye uyar. Sürücü kuvvet basitçe NOLDE'nin inhomojen terimidir. Böyle bir denklem en iyi Fourier dönüşümü ya da Green fonk.'u kullanmak yardımı ile çözülür. Özel olarak, inhomojen terim polinom ya da üstellerin çarpımı olduğunda, çözüm kapalı biçimde bulunabilir.

<u>Lemma 1</u>: $L[y]=r(x)$ Eğer $r(x)$, s. nci dereceden bir polinom ise, o zaman $(D-\lambda)[y]=e^{\lambda x}r(x)$, $y=e^{\lambda x}q(x)$ şeklinde bir çözüme sahiptir; $q(x)$ $(s+1)$. dereceden bir pol. dur.

<u>Lemma 2</u>: Eğer $r(x)$, s. nci dereceden bir polinom ve $\lambda\neq\lambda_1$ ise, o zaman $(D-\lambda_1)[y]=e^{\lambda x}r(x)$ $y=e^{\lambda x}q(x)$ şeklinde bir çözüme sahiptir; burada $q(x)$, s. dereceden bir pol. dur.

Bu iki lemma ardarda uygulanırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

13.7.3 <u>Teorem</u>: HOLDE $L[y]=e^{\lambda x}S(x)$ (S bir pol.) $e^{\lambda x}q(x)$ özel çözümüne sahiptir, $q(x)$ de bir polinomdur. $\lambda=\lambda_i$, L nin karakteristik polinomunun bir kökü olmadıkça $q(x)$ in derecesi $S(x)$ ile eşittir. $\lambda=\lambda_i$, $P_L(\lambda)$ nın k_i katlı bir kökü ise, $q(x)$ in derecesi $S(x)$ inkinin k_i kadar artar.

13.7.4. <u>Örnek</u>: $y(0)=0$ ve $y'(0)=1$ başlangıç koşuluna uyan en genel çözümleri aşağıdaki DE için bul.

(a) $y''+y=xe^{x}$ $\lambda=1$

$S(x)$

$\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda_1=i,\ \lambda_2=-i$

BS K

çözümle sağa $[\cos x, \sin x]$ $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2$

özel çözüm $q(x)e^x$ $q(x) = Ax + B$

$q(x)$ $S(x)$ ile aynı derecedendir ; 1.

$U = (Ax+B)\, e^x$ dif. denk. e koyalım.

$2Axe^x + (2A+2B)e^x = xe^x$

$2A = 1$ $2A+2B = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{2} = -B$

$' : Ae^x + (Ax+B)e^x$

$'' : Ae^x + Ae^x + (Ax+B)e^x$

$2Ae^x + (Ax+B)e^x + (Ax+B)e^x$

en genel çözüm;

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}(x-1)e^x$$

$$0 = y(0) = C_1 - \frac{1}{2} \qquad 1 = y'(0) = C_2$$

$$y = \frac{1}{2}\cos x + \sin x + \frac{1}{2}(x-1)e^x$$

(b) $y'' - y = xe^x$

$p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ $\{e^x, e^{-x}\}$

$S(x) = x$ $\lambda = 1 = \lambda_1$ tekrarlı.? $\Rightarrow q(x)$, 2. dereceden alınır.

$q(x) = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow U = (Ax^2 + Bx + C)e^x$

$4A = 1$ $A + B = 0 \Rightarrow A = -B = 1/4$

en genel çözüm : $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + (\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + C)e^x$

$Ce^x + C_1 e^x$ içine atıldılar.

$$y = \frac{5}{4}\sinh x + \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x$$

BS K

13.8. WKB yöntemi :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\,y = 0 \qquad (13.44)$$

x e göre yavaş bir şekilde değişiyor, q sonsuz yavaş değişse idi, yani sbt olsa idi 13.44 ün çözümü sanal üstel olacaktı. Bu nedenle çözüm için $y = e^{i\phi(x)}$ düşünelim:

$$y' = i\phi' y$$

$$(\phi')^2 + i\phi'' - q = 0 \qquad y'' = i i\phi'' y - \phi'^2 y \Rightarrow (\phi')^2 - i\phi'' - q = 0$$

varsayalım ki ϕ'' küçük (q ya kıyasla) öyleki y çok büyük bir şekilde salınmaz. DE ye yaklaşık bir çözüm bulabiliriz:

$$\phi' = \pm\sqrt{q} \Rightarrow \phi = \pm\int \sqrt{q(x)}\,dx \qquad 13.46.$$

varsayımımızın geçerlilik koşulu

$$\phi'' = \pm\frac{1}{2}\frac{q'}{\sqrt{q}}$$

$$|\phi''| \simeq \frac{1}{2}\left|\frac{q'}{\sqrt{q}}\right| \ll |q|$$

Sonuç: $\frac{1}{\sqrt{q}} \sim \left(\frac{1}{2\pi}\right) \times$ (y. çözümünde bir dalga boyu)

Bu nedenle, bu yaklaşıklık, bir dalga boyundaki q daki değişimi $|q|$ ya kıyasla küçük $\Rightarrow$ geçerlidir. Bu yaklaşıklık 13.46 türevi DE ye yerleştirilerek ve yeni bir ϕ için çözerek geliştirilebilir.

$$(\phi')^2 \simeq q \pm \frac{i}{2}\frac{q'}{\sqrt{q}} \Rightarrow \phi' \simeq \pm\left(q \pm \frac{i}{2}\frac{q'}{\sqrt{q}}\right)^{1/2}$$

ya da

$$\phi' \simeq \pm\sqrt{q}\left(1 \pm \frac{i}{2}\frac{q'}{q^{3/2}}\right)^{1/2} = \pm\sqrt{q}\left(1 \mp \frac{i}{4}\frac{q'}{q^{3/2}}\right)$$

$$= \pm\sqrt{q} + \frac{i}{4}\frac{q'}{q} \Rightarrow \phi(x) \simeq \pm\int\sqrt{q}\,dx + \frac{i}{4}\ln q$$

İki seçim, farklı iki çözüm verir, bunların lineer birleşimi en genel çözümü verir. Böylece,

$$y \simeq \frac{1}{\sqrt[4]{q(x)}}\left\{C_1 e^{i\int\sqrt{q}\,dx} + C_2 e^{-i\int\sqrt{q}\,dx}\right\} \qquad 13.27$$

Bu sonuç geçerlilik koşulunun sağlandığı bölgede yaklaşık bir çözümdür. (1°) q hızlı değişir ise ve (2°) bölgenin bazı noktalarında sıfır ise bu yöntem çalışmaz. Bu ikincisi ciddi bir zorluktur, çünkü $q>0$ olduğu bölgedeki bir çözümü $q<0$ olan bir bölgedeki çözüme birleştirmek isteyebiliriz. $q(x)=0$ olduğu noktanın her iki yanındaki çözümlerin C_1 ve C_2 sabitlerini bağlayan "bağlantı formülleri"ni türetmek için genel bir yöntem vardır.

Varsayalım ki, q, x_0 da sıfırdan geçsin, ve x_0 ın sağ ve solundaki her iki bölgede geçerlilik koşulu sağlansın. Dahası, DE nin çözümünün x_0 ın soluna doğru üstel olarak azaldığını varsayalım. Bu koşullar altında, soldaki çözüm,

$$\frac{1}{\sqrt[4]{q(x)}}\exp\left[-\int_x^{x_0}\sqrt{-q(x)}\,dx\right] \qquad 13.28$$

biçiminde

BS K

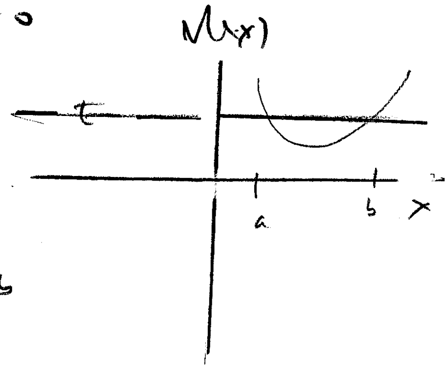
sağdaki

$$\approx \frac{1}{\sqrt[4]{q(x)}} \cos\left[\int_{x_0}^{x} \sqrt{q(x)}\, dx - \frac{\pi}{4} \right] \qquad (13.49)$$

şeklinde alacaktır.

13.8.1 Örnek:

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] \psi = 0 \qquad q(x)$$



$$q(x) = \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] \begin{cases} > 0 & a < x < b \\ < 0 & x < a,\ x > b \end{cases}$$

a'nın soluna sınırlı çözüm üstel olarak azalmalıdır. Bu nedenle (a,b) aralığındaki yaklaşık çözüm, (13.49)dan

$$\psi(x) = \frac{A'}{(E-V)^{1/4}} \cos\left[\int_a^x \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))}\, dx - \frac{\pi}{4} \right]$$

keyfi

b nin sağına sınırlı olan çözüm de üstel olarak azalmalıdır.

Böylece, $a < x < b$ için genel çözüm

$$\psi(x) = \frac{B}{(E-V)^{1/4}} \cos\left[\int_x^b \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))}\, dx - \frac{\pi}{4} \right]$$

Bu iki ifade, aynı bölgede aynı fonksiyonu verdiğinden eşit olmalıdırlar. Böylece $A = B$ ve daha önemlisi

$$\cos\left[\int_a^x \sqrt{}\, dx - \frac{\pi}{4} \right] = \cos\left[\int_x^b \sqrt{}\, dx - \frac{\pi}{4} \right]$$

BS K

$$\int_a^b \sqrt{2m[E-V(x)]}\, dx = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\hbar$$

Bohr – Sommerfeld kuantumlanması.

13.8.1 Schrödinger Denkleminin Klasik Limiti

(klasik limit $\hbar \to 0$)

$\psi(\vec r,t)$ kompleks olduğundan,

$$\psi(\vec r,t) = A(\vec r,t)\, e^{\frac{i}{\hbar} S(\vec r,t)} \qquad (13.50)$$

şeklinde yazılabilir. A ve S ler gerçel değerli fonksiyonlardır. (13.50) Schrödinger D.ne konulur ve, gerçel ve sanal kısımlar eşitlenirse

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\vec\nabla S\cdot\vec\nabla S}{2m} + V = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 A}{A} \qquad 13.51$$

$$m\frac{\partial A}{\partial t} + \vec\nabla S\cdot\vec\nabla A + \frac{A}{2}\nabla^2 S = 0$$

Bu iki denklem tamamıyla Schrödinger denklemine eşdeğerdir. 2. denklemin direkt bir fiziksel anlamı vardır:

$$\rho(\vec r,t) = A^2(\vec r,t) = |\psi(\vec r,t)|^2$$

$$j(\vec r,t) = A^2(\vec r,t)\frac{\vec\nabla S}{m} = \rho\,\vec v \quad \text{olarak akım yoğunluğu}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec\nabla\cdot\vec j = 0 \quad \text{süreklilik denklemi}$$

BS K

$\hbar \to 0$ iken 13.51 in ilki ilginç şu sonucu verir:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} m v^2 + V = 0$$

bunun gradienti alınırsa

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right) m\vec{v} + \vec{\nabla} V = 0 \qquad \left|\ \vec{v} = \frac{\vec{\nabla} S}{m}\right.$$ hızıyla klasik bir akışkanın hareket denklemi)

17.8.2. Öneri: Klasik limitte, Schrödinger denkleminin çözümü $V(\vec{r})$ potansiyelinde bulunan m kütleli etkileşmeyen klasik parçacıklar bir akışkanını (istatistiksel karışım) tasvir eder. Bu akışkanın yoğunluk ve akım yoğunluğu, karşılık olarak, kuantum parçacığın olasılık yoğunluğu $\rho = |\psi|^2$ ve olasılık akım yoğunluğu $\vec{J}$ 'dir.