BÖLÜM 14

SOLDE'nin KOMPLEKS ANALİZİ

Seri çözümün yakınsama bölgesi en az katsayılar fonksiyonlarının $(p(x), q(x))$ yakınsama bölgesi kadar büyüktür. p ve q ların tekil noktaları, çözümün tekil noktaları ile nasıl ilişkilidir. Analitiklik ise en iyi kompleks düzlemde incelenir; özellikle analitik süreklilik önemli bir nedendir. $du/dx = u^2$ dif. denk.i $u=-1/x$ ($x \neq 0$ hariç, tüm x ler için) çözümüne sahiptir. $x=0$ noktasını çıkarmakla gerçel ekseni deleriz. Böylece iki tane çözüm vardır; çünkü $u=-1/x$ in tanım bölgesi gerçel düzlemde bağlantılı değildir: $x<0$ ve $x>0$ bölgelerini bağlayamayız. Kompleks düzlemde ise aynı denklem $dw/dz = w^2$, $w=-1/z$ kompleks çözümüne sahiptir ve $z=0$ hariç her yerde analitiktir. Kompleks düzlemi delmek bağlantıyı bozmaz. $x>0$ daki çözüm $x<0$ daki çözüme başlangıç etrafından giderek analitik olarak bağlanabilir.

14.0.1. Önerme: Kompleks düzlemde herhangi bir yol boyunca analitik bir dif. denk.in herhangi bir çözümünün analitik devamı ile elde edilmiş fonk., aynı yol boyunca dif. denk.in analitik devamının bir çözümüdür.

Analitik bir dif. denk., analitik katsayı fonk.ları olandır. Şu örnek katsayı fonk.larının tekilliğinin çözüm davranışını nasıl etkileyeceğini gösteriyor.

14.0.2. Örnek: FODE $w' - \frac{\gamma}{z} w = 0$ $\gamma \in \mathbb{R}$ $p(z) = -\frac{\gamma}{z}$

$\frac{dw}{w} = \frac{\gamma}{z} dz$, $\ln w = \gamma \ln z + \ln c$

$z=0$ da basit kutba sahip. Bu FODE'nin çözümü $w = z^{\gamma}$ dır. γ nın $m>0$, tam ($m \in \mathbb{Z}$) ya da tam olmayan durumuna göre çözüm $z=0$ da düzgün bir nokta, m. mertebeden kutup ya da bir esas

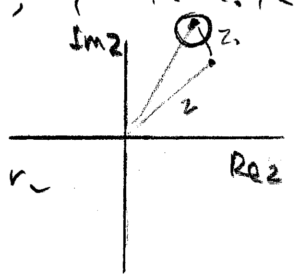
noktasına sahip olur.

14.1. Kompleks DE in Analitik Özellikleri:

14.1.1. Kompleks FOLDE

Homojen FOLDE $\dfrac{dw}{dz}+p(z)w=0$ 14.1

denkleminde $p(z)$'nin sadece ayrık tekil noktalara sahip olduğunu varsayalım. $p(z)$, tekilliği z_0 noktası civarında, $r_1<|z-z_0|<r_2$ halka bölgede Laurent serisine açılabilir:



$$p(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad r_1<|z-z_0|<r_2$$

14.1. denklemin çözümü,

$$w(z)=e^{-\int p(z)\,dz}$$

$$=C\exp\left[-a_{-1}\int\frac{dz}{z-z_0}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int(z-z_0)^n dz-\sum_{n=2}^{\infty}a_{-n}\int(z-z_0)^{-n}dz\right]$$

$$=C\exp\left\{-a_{-1}\ln(z-z_0)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n-1}}{n}(z-z_0)^{-n}\right\}$$

bunu şu şekilde yazabiliriz.

$$w(z)=C(z-z_0)^{\alpha}g(z), \qquad \alpha=-a_{-1}$$

$r_1<|z-z_0|<r_2$ halka bölgede analitik tek değerli bir fonk.dur, çünkü $g(z)$, analitik bir fonk.nun eksponansiyelidir.

BS K

p'nin basit bir kutbu olduğunda, yani tüm $n \geq 2$ için $a_{-n} = 0$ olduğunda, üsteldeki ikinci toplam 0'dır, ve g, z_0 da bile analitik olur. Gerçekte $g(z_0) = 1$ ve $C = 1$ seçerek,

$$w(z) = (z - z_0)^r \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z - z_0)^k \right] \qquad (14.3)$$

yazabiliriz.

$p(z)$'nin z_0 daki tekilliğinin doğasına bağlı olarak, 14.1 denklemi ile verilen çözümler farklı sınıflandırmalara sahiptir. Örneğin,

1) ~~Eğer~~ $p(z)$ kaldırılabilir bir tekilliğe ($a_{-n} = 0 \ \forall n \geq 1$) sahipse, çözüm $C\,g(z)$ dir, ki bu analitiktir. Bu durumda FOLDE'nin z_0 da kaldırılabilir bir tekilliğe sahip olduğunu söyleriz.

2) $p(z)$'nin z_0 da basit bir kutbu ($a_{-1} \neq 0 \quad a_{-n} = 0 \quad \forall n \geq 2$) varsa o zaman genelde çözümün z_0 da bir dal noktası vardır. Bu durumda, FOLDE'nin düzenli bir tekil noktaya sahip olduğunu söyleriz.

3) $p(z)$'nin $m > 1$ mertebe bir kutbu varsa, o zaman çözümün bir esas tekilliği olacaktır. Bu durumda FOLDE'nin düzenli olmayan bir tekil noktası vardır deriz.

14.1.1. Örnek: Bir FOLDE'nin tek bir çözümü vardır. Bir $w(z)$ çözümü verilmiş ise, diğerleri $C\,w(z)$ biçiminde olmalıdır. z_0, $p(z)$'nin bir tekilliği ve $z - z_0 = re^{i\theta}$ olsun. Bir z den başla ve z_0'ı çevrele örneği $\theta \to \theta + 2\pi$ olacak şekilde. $p(z)$ z_0 da basit bir kutba sahip olmasına karşın, çözüm burada bir dal noktasına sahip olabilir.

α tam olmadığında bu açıkça görülür. Böylece,

$\tilde{w}(z) \equiv w(z_0 + r e^{i(\theta+2\pi)})$, $w(z)$ den farklı olabilir. Bu dal noktasını hesaba katmak için (DE yi çözmeksizin) Örnek 14.0.1 kullanılır ve $\tilde{W}(z)$ nin FOLDE ye bir çözüm olduğu sonucu çıkar. Böylece, $\tilde{w}(z)$, $w(z)$ den bir sabit çarpan kadar farkeder: $\tilde{w}(z) = Cw(z)$. α kompleks sayısını $C = e^{2\pi i \alpha}$ ile tanımla. O zaman $g(z) \equiv (z-z_0)^{-\alpha} w(z)$ z_0 civarında tek değerlidir. Gerçekten

$$g(z_0+re^{i(\theta+2\pi)}) = [re^{i(\theta+2\pi)}]^{-\alpha} w(z_0+re^{i(\theta+2\pi)})$$

$$= (z-z_0)^{-\alpha} e^{-2i\pi\alpha} e^{2i\pi\alpha} w(z) = (z-z_0)^{-\alpha} w(z) = g(z)$$

Bu tartışma şunu gösterir: 14.1. deki FOLDE nin bir $w(z)$ çözümü $w(z) = (z-z_0)^{\alpha} g(z)$ olarak yazılabilir, burada $g(z)$ tek değerlidir.

14.1.2. Devre Matrisi

Örnek 14.1.2 de kullanılan yöntem NOLDE için bir benzer sonuç elde etmek amacı ile genelleştirilebilir:

$$L[w] = \frac{d^n w}{dz^n} + p_{n-1}(z)\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}} + \cdots + p_1(z)\frac{dw}{dz} + p_0(z)w = 0 \qquad 14.4$$

burada tüm $p_i(z)$ ler $r_1 < |z-z_0| < r_2$ de analitiktir.

$\{w_j(z)\}_{j=1}^{n}$ 14.4 ün çözümlerinin bir bazı ve $z-z_0 = re^{i\theta}$ olsun. z den başla ve $w_j(z)$ fonksiyonlarını analitik olarak devamla bir tam dönüş ile $\theta+2\pi$ ye git. $\tilde{w}_j(z) \equiv w_j(z_0+re^{i\theta}) \equiv w_j(z_0+re^{i(\theta+2\pi)})$, olsun.

O zaman 14.0.1 önerisinden $\{\tilde{w}_j(z)\}_{j=1}^{n}$ ler sadece çözüm değil, ama lineer bağımsızdırlar da. Bu nedenle, bunlar bir ; özümler bazı oluştururlar. Öte yandan, $\tilde{w}_j(z)$, $w_j(z)$ lerin lineer bileşimi olarak yazılabilir. Böylece,

$$\tilde{w}_j(z) \equiv w_j\left(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, w_k(z)$$

$\underset{\sim}{A} = (a_{jk})$ matrisine NOKTE nın <u>devre matrisi</u> denir. ve terslene-bilir; çünkü bir bazı diğerine dönüştürür. Bu nedenle, sadece <u>sıfırdan</u> farklı özdeğerlere sahiptir. Böyle bir özdeğer λ olsun, $C \equiv \{c_i\}_{i=1}^{n}$ sütun vektörü seçelim ve A nın transpozesi A^t nin özvektörüne karşılık gelsin (A ve A^t aynı özdeğerlere sahip). En azından, böyle bir özvektör daima mevcuttur, çünkü A^t nin karakteristik polinomu, en az bir köke sahiptir. Şimdi,

$$W(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j\, w_j(z)$$

Bu $w(z)$, 14.4 ün bir çözümüdür.

$$\tilde{W}(z) \equiv w\left(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)}\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j\, w_j\left(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, w_k(z) = \sum_{jk} (A^t)_{kj}\, c_j\, w_k(z)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda\, c_k\, w_k(z) = \lambda W(z) \qquad \longleftarrow \; A_{kj} c_j = \lambda \delta_{jk} c_k$$

α yı, $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$ ile tanımlar isek, o zaman

$$W\left(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)}\right) = e^{2\pi i \alpha}\, W(z).$$

Şimdi, $f(z) \equiv (z-z_0)^{-\alpha} w(z)$ yazalım. 14.1.1'deki tartışmayı izleyerek, $f(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)}) = f(z)$ elde ederiz. Yani, $f(z)$, z_0 civarında tek değerlidir. Böylece, şu teoremi elde ederiz:

14.1.2. Teorem: $r_1 < |z-z_0| < r_2$ de analitik katsayı fonksiyonları olan herhangi bir homojen NOLDE,

$w(z) = (z-z_0)^{\alpha} f(z)$ biçiminde bir çözüm kabul eder, burada $f(z)$, $r_1 < |z-z_0| < r_2$ deki z_0 civarında tek değerlidir.

Yakınında, analitik bir $w(z)$ fonk.nun $w(z) = (z-z_0)^{\alpha} f(z)$ olarak yazılabildiği ayrık bir z_0 tekil noktaya $w(z)$ nin basit dal noktası denir, burada, $f(z)$ tek-değerli ve analitik dir. (z_0 ın delik komşuluğunda) Teorem 14.1.2 ye götüren tartışma şunu ima eder: basit bir dal noktalı çözüm, ancak ve ancak $w(z)$ de bileşenleri görünen C vektörü, A^t nin bir özvektörü $\nexists$ mevcuttur. Böylece, A^t nin lineer bağımsız özvektörleri kadar basit dal noktalı çözümleri var olacaktır.

14.2. Kompleks SOLDE

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$$

$w_1(z)$ ve $w_2(z)$ iki lineer bağımsız çözümleri verilmiş iken 2×2 lik $\underset{\sim}{A}$ matrisini oluşturun ve onu köşegenleştirmeye çalışın. Üç olası sonuç vardır:

BS K

1. $\underset{\sim}{A}$ matrisi köşegenleştirilebilir ve iki farklı λ_1 ve λ_2 özdeğerine karşılık gelen iki $F(z)$ ve $G(z)$ özvektörlerini bulabiliriz. Bu demektir ki,

$$F(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)}) = \lambda_1 F(z)$$

$$G(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)}) = \lambda_2 G(z)$$

$\lambda_1 = e^{2\pi i\alpha}$ ve $\lambda_2 = e^{2\pi i\beta}$ tanımlar $\Rightarrow$ T.14.1.2 nin dediği gibi $F(z) = (z-z_0)^\alpha f(z)$ ve $G(z) = (z-z_0)^\beta g(z)$ elde ederiz. $\{F, G\}$ SOLDE nin kanonik bazı olarak adlandırılır.

2. $\underset{\sim}{A}$ matrisi köşegenleştirilebilir ve iki özdeğer aynıdır. Bu durumda F ve G nin ikisi de aynı α sabitine sahiptir:

$$F(z) = (z-z_0)^\alpha f(z) \qquad G(z) = (z-z_0)^\alpha g(z)$$

3. iki özvektör bulamayız. Bu, A nın köşegenleştirilemeyen durumuna karşılık gelir. Mamafih, daima bir özvektör bulabiliriz, böylece A, sadece bir özdeğer, λ ya sahiptir. $w_1(z)$ çözümünü $(z-z_0)^\alpha f(z)$ şeklinde alırız, burada $f(z)$ tek değerli ve $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$ dır.

Böyle bir çözümün varlığı T14.1.2'den garantilenir. $w_2(z)$, diğer lineer bağımsız çözüm olsun. O zaman,

$$w_2(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)}) = a w_1 + b w_2$$

BS K

devre matrisi $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$ olacaktır, bu da λ ve b özdeğerlerine sahiptir. Madem ki A nın sadece bir özdeğeri var, $b = \lambda$ olmalıdır. Bu A yı $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ a & \lambda \end{pmatrix}$ yi indirger, $a \neq 0$. $a \neq 0$ koşulu, bu durumu 2. den (1 durum) ayırt etmek için gereklidir. Şimdi, $h(z) \equiv w_2(z)/w_1(z)$ yi z_0 civarında bir bütün dönü analitik olarak devam ettiririz:

$$h(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)}) = \frac{w_2(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)})}{w_1(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)})} = \frac{a w_1 + \lambda w_2}{\lambda w_1}$$

$$= \frac{a}{\lambda} + \frac{w_2}{w_1} = \frac{a}{\lambda} + h(z)$$

Buradan şu sonuç çıkar:

$$g_1(z) \equiv h(z) - \frac{a}{2\pi i \lambda} \ln(z - z_0)$$

fonk.u $r_1 < |z - z_0| < r_2$ de tek değerlidir. g_1 ve w_2 yi $(2\pi i \lambda / a) g_1$ ve $(2\pi i \lambda / a) w_2$ olarak yeniden tanımlarsak, şunu elde ederiz:

14.2.1. Teorem: $p(z)$ ve $q(z)$, $r_1 < |z - z_0| < r_2$ halka bölgede analitik ise, o zaman SOLDE $w'' + p(z) w' + q(z) w = 0$ z_0 tekil noktasının komşuluğunda $\{w_1, w_2\}$ çözümler bazını kabul eder, burada ya

$$w_1(z) = (z - z_0)^{\alpha} f(z) \qquad w_2(z) = (z - z_0)^{\beta} g(z)$$

ya da, müstesna durumlarda (devre matrisi köşegenleştirilemez olduğunda)

$w_1(z) = (z - z_0)^{\alpha} f(z)$, $w_2(z) = w_1(z) \left[g_1(z) + \ln(z - z_0) \right]$ olur.

$f(z)$, $q(z)$ ve $g_2(z)$ fonk.lar halka bölgede analitik ve tek değerlidir.

Bu teorem z_0 daki noktanın, çözümlerin ortamında çıkarıp almamıza izin verir. Ancak, halka bölgede; f, g, g_2 ler analitik olmama koşullu z_0 da keyfi mertebede kutuplara sahip olabilirler. Bu kutupları da çıkarıp alabilirmiyiz? Genelde yapamayız; ancak, özel durumlarda, aşağıdaki tanımda belirtildiği gibi, yapabiliriz.

<u>14.7.2. Tanım :</u> $0 < |z - z_0| < r$ de analitik olan $w'' + p w' + q w = 0$ biçimindeki bir SOLDE, z_0 da düzenli bir tekil noktaya sahiptir, eğer bu noktada $p(z)$ nin en kötü basit bir kutbu ve $q(z)$ nin en kötü 2. mertebeden bir kutbu var ise.

Düzenli bir tekil z_0 noktasının komşuluğunda, $p(z)$ ve $q(z)$ katsayı fonksiyonları kuvvet serisi açılımına sahiptirler:

$$p(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

$$q(z) = \frac{b_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{b_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{k}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$$

$(z - z_0)^2$ ile çarpalım ve $P(z) = (z - z_0) p(z)$ $Q(z) = (z - z_0)^2 q(z)$ dersek,

BS K

$$P(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_{k-1}\,(z-z_0)^k \qquad Q(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_{k-2}\,(z-z_0)^k$$

elde ederiz. SOLDE yi de $(z-z_0)^2$ ile çarpalım:

$$(z-z_0)^2 w'' + (z-z_0)P(z)\,w' + Q(z)\,w(z)=0 \qquad 14.5$$

bunun çözümü için

$$w(z)=(z-z_0)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty} C_k\,(z-z_0)^k \qquad C_0=1 \qquad 14.6$$

seçeriz. $C_0=1$ olacak şekilde seçtik. Bunu burada yerleştirelim

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+\nu)(n+\nu-1)\,C_n+\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+\nu)\,a_{n-k-1}+b_{n-k-2}\right]C_k\right\}\times(z-z_0)^{n+\nu}=0}$$

$$w(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n\,(z-z_0)^{n+\nu}$$

$$w'=\sum C_n\,(n+\nu)\,(z-z_0)^{n+\nu-1}$$

$$w''=\sum C_n\,(n+\nu)(n+\nu-1)\,(z-z_0)^{n+\nu-2}$$

$$P(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_{k-1}\,(z-z_0)^k \qquad Q(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_{k-2}\,(z-z_0)^k$$

$$\Rightarrow (z-z_0)^2 w'' + (z-z_0)P\,w' + Q\,w=0$$

BS K

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+\nu)(n+\nu-1)(z-z_0)^{n+\nu}$$

$$+\sum_n \sum_k C_n (n+\nu)\, a_{k-1} (z-z_0)^{n+\nu+k}$$

$$+\sum_n \sum_k C_n\, b_{k-2} (z-z_0)^{n+\nu+k} = 0$$

$n+k=m \qquad k=m-n \geq 0 \qquad n \leq m$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+\nu)(n+\nu-1)(z-z_0)^{n+\nu}$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m} C_n\left[(n+\nu)\, a_{m-n-1} + b_{m-n-2}\right](z-z_0)^{m+\nu} = 0$$

$m \to n \qquad n \to k$

indisleme boyutun

$n \to k \qquad m \to n$

$$(n+\nu)(n+\nu-1)\, C_n = -\sum_{k=0}^{n}\left[(k+\nu)\, a_{n-k-1} + b_{n-k-2}\right] C_k \qquad 14.7$$

$n=0$ için indisel denklem (ν üstü için) elde edilir.

$$I(\nu) \equiv \nu(\nu-1) + a_{-1}\nu + b_{-2} = 0$$

bunun köklerine z_0 ın karakteristik üsleri, $I(\nu)$ ye indisel polinom denir. Bu polinom cinsinden 14.7.

$W'' + pW' + qW = 0$ kompleks formu

$$\boxed{I(n+\nu)\, C_n = -\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+\nu)\, a_{n-k-1} + b_{n-k-2}\right] C_k \qquad n=1,2,\ldots} \qquad 14.8$$

olarak yazılabilir.

14.8 denklemi, ν nün mümkün olan değerlerini belirler ve 14.9 denklemi $c_1, c_2, c_3 \ldots$ leri verir, bu da $W(z)$ yi belirler.

İndisel polinom bazı tam $n>0$ sayıları için $n+\nu$ de sıfır olursa yani, ν ye ek olarak $n+\nu$ de indisel polinomun bir kökü:

$I(n+\nu)=0=I(\nu)$ ise,

özel bir dikkat sarf etmemiz gerekir. Eğer, ν_1 ve ν_2 indisel denk.in karakteristik üsleri ve $Re(\nu_1) > Re(\nu_2)$ $\Rightarrow$ o zaman ν_1 için daima bir çözüm mevcuttur. Eğer $\nu_1-\nu_2 \neq n$ ($\forall n>0$ tam) $\Rightarrow$ ν_2 için de bir çözüm vardır. Özellikle, z_0, p ve q nun analitik olduğu bir nokta ise, o zaman 14.9 ile sadece bir çözüm belirlenir ? Bu tartışma aşağıda özetlenmiştir.

14.2.3. Teorem: Eğer $w''+pw'+qw=0$ DD $z=z_0$ da düzenli bir tekil noktaya sahip ise, o zaman (14.6) biçimindeki bir kuvvet serisi formal olarak denklemi çözer. Eğer, ν_1 ve ν_2, z_0'ın karakteristik üsleri $\Rightarrow$ o zaman, $\nu_1-\nu_2$ = tamsayı olmadıkça iki lineer bağımsız formal çözüm vardır.

$$w=(z-z_0)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \qquad c_0=1$$

14.2.4 Örnek:

(a) Bessel DD

$$w''+\frac{1}{z}w'+\left(1-\frac{\alpha^2}{z^2}\right)w=0$$

BS K

$z=0$ düzenli tekil nokta,

$a_{-1}=1$, $b_{-2}=-\alpha^2$ $\qquad a_{-1}$ $\quad b_{-2}$ için

indisel denklem: $\nu(\nu-\cancel{1})+\cancel{\nu}-\alpha^2=0$

$$\nu_1=\alpha \quad \nu_2=-\alpha \qquad \Leftarrow \nu^2=\alpha^2$$

$\nu_1-\nu_2=2\alpha$ tam olmadıkça iki bağımsız çözüm.

(b) $f(r)=\beta/r$ Coulomb pot.'i için radyal denklem

$$w''+\frac{2}{z}w'+\left(\frac{\beta}{z}-\frac{\alpha}{z^2}\right)w=0$$

$z=0$ düzenli tekil nokta $\quad a_{-1}=2 \quad b_{-2}=-\alpha$

$$I(\nu)=\nu^2+\nu-\alpha \rightarrow \begin{cases}\nu_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4\alpha}\\ \nu_2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4\alpha}\end{cases}$$

$\nu_1-\nu_2=\sqrt{1+4\alpha}$ tam olmadıkça iki bağımsız çözüm

pratikte $\alpha=l(l+1)$, l tam $\nu_1-\nu_2=2l+1$ ve sadece bir çözüm elde ederiz. $\qquad 4l^2+4l+1=(2l+1)^2$

(c) Hipergeometrik DD

$$w''+\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)z}{z(1-z)}w'-\frac{\alpha\beta}{z(1-z)}w=0$$

$z=0,1$ düzenli tekil noktalar

$z=0$ da $\quad a_{-1}=\gamma \quad b_{-2}=0$, $I(\nu)=\nu(\nu+\gamma-1)$

$\nu_1=0 \quad \nu_2=1-\gamma \quad$ γ tam olmadıkça iki formal çözüm var.

BS K

$\nu_1 - \nu_2$ tam olmadığı sürece, teorem 14.2.3 ün seri çözümü z_0 ın komşuluğu için yakınsaktır. $\nu_1 - \nu_2$ = tam $\Rightarrow$ ne olur? Uygunluk için koordinat eksenini ötelenerek $z_0 = 0$ yapılır. $n > 0$ tam için $\nu_1 = \nu_2 + n$ kaydım. O zaman, indisel polinomun ν_1 ötesinde yeni herhangi bir sıfırına rastlamak olanaksız olduğundan, indirgeme bağıntısı (14.9), n'nin tüm değerleri için geçerli olacaktır, ve bir çözüm elde ederiz:

$I(n+\nu) =$
$I(\nu) = 0$

$$\omega_1(z) = z^{\nu_1} f(z) = z^{\nu_1}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k z^k\right)$$

bu bazı $r > 0$ için $0 < |z| < r$ bölgesinde yakınsaktır. 2. çözümün olanağı ve doğasını araştırmak için daha küçük karakteristik kök ν_2 için indirgeme bağıntılarını şöyle yazalım:

$$I(\nu_2+1)\, C_1 = \overbrace{-(\nu_2 a_0 + b_{-1})}^{\rho_1 I(\nu_2+1)}\, C_0 \Rightarrow C_1 = \rho_1$$

$$I(\nu_2+2)\, C_2 = -(\nu_2 a_1 + b_0)\, C_0 - [(\nu_2+1)a_0 + b_{-1}]\, C_1$$

$$\Rightarrow C_2 = \rho_2 \qquad 14.10$$

$\vdots$

$$I(\nu_2+n-1)\, C_{n-1} = \rho_{n-1} I(\nu_2+n-1)\, C_0 \Rightarrow C_{n-1} = \rho_{n-1}$$

$$I(\nu_2+n)\, C_n = I(\nu_1)\, C_n = \rho_n C_0 \Rightarrow \rho_n = 0$$

Burada ρ'lar a_k ve b_k'lara (karmaşık bir şekilde) bağlı olan sabitlerdir.

Teorem 14.2.3, $\nu_1-\nu_2$ tam olmadığında, sadece iki kuvvet serisi çözümünü garanti eder. $\nu_1-\nu_2=$ tam olduğunda, 14.10 gösterdiki, 2. bir kuvvet serisinin mevcut olması için ek koşul $f_n=0$ olmasıdır. Bu nedenle, $f_n \neq 0$ olduğunda, 2. çözümü bulmak için diğer yollara başvurmalıyız. 2. çözümü

$$w_2(z) \equiv w_1(z)h(z) = z^{\nu_1} f(z)h(z) \qquad 14.11$$

olarak tanımlayalım ve bunu SOLDE ye koyarak h ye göre bir FOLDE elde edelim, yani,

$$h'' + \left(p + \frac{2w_1'}{w_1}\right)h' = 0$$

ya da $\frac{w_1'}{w_1} = \frac{\nu_1}{z} + \frac{f'}{f}$ koyarak özel FOLDE

$$h'' + \left(\frac{2\nu_1}{z} + \frac{2f'}{f} + p\right)h' = 0 \qquad 14.12$$

olur.

14.2.5 Lemma: 14.12 denklemindeki h' nün katsayısı bir $n+1$ kalana rezidüye sahiptir.

İspat: Kalan z^{-1} in katsayısı idi. h' nün katsayısı için bu kalanı A_{-1} ile gösterelim. $f(0)=1$ olduğundan, f'/f oranı $z=0$ da analitiktir. Böylece, $z=0$ daki basit kutup ayrı iki terimden gelir. $p(z)$ nin Laurent açılımını yerleştirerek,

$$\frac{2\nu_1}{z} + p = \frac{2\nu_1}{z} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$$

BS K

Bu gösterir ki $A_{-1} = 2\nu_1 + a_{-1}$. Öte yandan, indisel polinomun iki versiyonunu karşılaştırarak

$$\nu^2 + (a_{-1} - 1)\nu + b_{-2}$$

$$(\nu - \nu_1)(\nu - \nu_2) = \nu^2 - (\nu_1 + \nu_2) + \nu_1 \nu_2$$

$$\left.\begin{aligned} \nu_1 + \nu_2 &= -(a_{-1} - 1) \\ 2\nu_1 - n &= -(a_{-1} - 1) \end{aligned}\right\} \text{ elde ederiz.}$$

Bu nedenle $A_{-1} = 2\nu_1 + a_{-1} = n + 1$ □

14. 2. 6. **Teorem** : $z = 0$ da düzenli bir tekil noktası olan bir SOLDE nin karakteristik üslerinin ν_1 ve ν_2 olduğunu varsayalım. Üç durum ele alalım:

1. $\nu_1 - \nu_2$ tam değil
2. $\nu_2 = \nu_1 - n$, $n > 0$ tam, ve f_n, 14.10 daki gibi 0 dır.
3. $\nu_2 = \nu_1 - n$, $n > 0$ tam ve f_n, " , 0 değildir.

O zaman, ilk iki durumda,

$$w_i(z) = z^{\nu_i}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(i)} z^k\right) \qquad i = 1, 2$$

biçiminde $\{w_1, w_2\}$ çözümler bazı vardır, 3. durumda çözümler bazı

$$w_1(z) = z^{\nu_1}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k\right), \quad w_2(z) = z^{\nu_2}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k\right) + C w_1(z) \ln z$$

biçimini alır, burada kuvvet seriler $z = 0$'ın komşuluğunda yakınsaktır

İspat: İlk iki durum önceden gösterildi. 3. durum için Lemma 14.2.5 kullanılır ve

$$\frac{2\nu_1}{z}+\frac{2f'}{f}+p=\frac{n+1}{z}+\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

yazarsak, h'ye göre FOLDE için çözüm,

$$h'=z^{-n-1}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k\right) \quad \text{olur.}$$

$n=0$ için, yani, indisel pol. çifte köke sahip ise, bu

$$h'(z)=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{k-1} \quad \text{ve de} \quad h(z)=\ln z+g_1(z)$$

verir, burada $g_1(z)$ $z=0$ ın komşuluğunda analitiktir.

$n\neq 0$ için $$h'(z)=\frac{b_n}{z}+\sum_{k\neq n}^{\infty} b_k z^{k-n-1}$$

elde ederiz ve integrali ile,

$$h(z)=b_n\ln z+\sum_{k\neq n}\frac{b_k}{k-n}z^{k-n}$$

$$=b_n\ln z+z^{-n}\sum_{k\neq n}^{\infty}\frac{b_k}{k-n}z^k$$

$$=b_n\ln z+z^{-n}g_2(z)$$

burada $g_2(z)$, $z=0$ ın komşuluğunda analitiktir. h'yi 14.11 denk. de yazar ve $\nu_2=\nu_1-n$ olduğunu kullanırsak, teoremin sonucunu buluruz. □

$$w_2(z)=w_1(z)h(z)=w_1(z)\left[b_n\ln z+z^{-n}g_2(z)\right]$$

BS K

14.3. Fuchsian DE

Fiziksel açıdan, bir SOLDE nin çözümünün sonsuzdaki davranışı önemlidir. Örneğin, Q.M. de parçacıkların olasılık genliklerini tasvir eden, Schrödinger denkleminin bağlı durum çözümleri, bağlanma kuvvetinin merkezden olan uzaklığı artarken sıfıra gitmelidir.

Gördük ki, bir çözümün davranışı katsayı fonksiyonlarının davranışı ile belirlenir. Sonsuzdaki davranışı belirlemek için SOLDE de $z = 1/t$ koyarız.

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + p(z)\frac{dw}{dz} + q(z)\,w(z) = 0 \qquad 14.13.$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \left[\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}r(t)\right]\frac{dv}{dt} + \frac{1}{t^4}s(t)\,v = 0 \qquad 14.14.$$

burada $v = w(1/t)$, $r(t) = p(1/t)$, $s(t) = q(1/t)$

Açıkça $z \to \infty$ iken, $t \to 0$. Böylece, 14.14 ün $t=0$ daki davranışı ile ilgileniriz. Varsayalım ki $s(t)$ ve $r(t)$, $t=0$ da analitiktir. 14.14 den görülür ki $v(t)$ çözümü $t=0$ da tekilliklere sahiptir.

Varsayalım ki sonsuz, 14.13 ün düzenli bir tekil noktasıdır. Bu nedenle, $r(t)$ ve $s(t)$ nin Taylor açılımındaki $r(t)$ nin ilk (sıfır) terimi ve $s(t)$ nin ilk iki terimi sıfır olmalıdır.

Böylece,

$$r(t) = a_1 t + a_2 t^2 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k$$

$$s(t) = b_2 t^2 + b_3 t^3 + \ldots = \sum_{k=2}^{\infty} b_k t^k$$

BS K

Tanımlar gereği, bu iki denklem, $p(z)$ ve $q(z)$ için $|z|$ nin büyük değerlerinde

$$p(z) = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} \qquad 14.15$$

$$q(z) = \frac{b_2}{z^2} + \frac{b_3}{z^3} + \dots = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_k}{z^k}$$

biçiminde olmaları gerektiğini söyler. ∞ 14.13 ün düzenli bir tekil noktası, ya da örnek olarak, 0 14.14 " " " olduğundan teorem 14.3.6 ya göre

$v_1(t) = t^{\alpha}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k t^k\right)$ biçiminde en az bir çözüm vardır, ya da z cinsinden,

$$w_1(z) = z^{-\alpha}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z^k}\right) \qquad 14.16$$

burada α, 14.14 ün $t=0$ daki karakteristik üslerinden biri, bunun indisel polinomu $\alpha(\alpha-1) + (2-a_1)\alpha + b_2 = 0$ dır.

14.3.1. Tanım: Tek değerli analitik katsayılı fonk.lardan homojen bir DE, Fuschian DE olarak adlandırılır eğer genişletilmiş kompleks düzlemde (∞ dahi noktayı içeren kompleks düzlem) sadece düzenli tekil noktalara sahip ise.

Özel tipte bir FDE, mat. fizikte rastlanan elementer olmayan geniş bir fonk.lar sınıfını teşkil eder. Bunlar, genişletilmiş kompleks düzlemdeki tek tekillikleri rasyonel fonk. olan $(P(z)/Q(z))$ fonk.lardır.

BS K

z_1 ve z_2 de iki düzenli tekil noktası olan denklemi ele alalım. $\xi(z) = (z-z_1)/(z-z_2)$ yeni değişkeni olsun. z_1 ve z_2 deki düzenli tekil noktalar, karşılık olarak, $\xi_1 = \xi(z_1) = 0$ ve $\xi_2 = \xi(z_2) = \infty$ noktalarına gönderilir. 14.13. denklemi

$$\frac{d^2U}{d\xi^2} + \Phi(\xi)\frac{dU}{d\xi} + \Theta(\xi)U = 0$$

olur; burada U, Φ, Θ 'ler ξ nin fonksiyonudur ve $w(z)$, $p(z)$ ve $q(z)$ de z, ξ cinsinden ifade edildiğindeki sonuçlardır. 14.15 ve $\xi = 0$, $\Phi(\xi)$ nin en fazla basit bir kutbudur olgusundan $\Phi(\xi) = a_1/\xi$ elde ederiz. Benzer şekilde $\Theta(\xi) = b_2/\xi^2$. Böylece, iki düzenli tekil noktalı bir SOFDE

$$w'' + \frac{a_1}{z}w' + \frac{b_2}{z^2}w = 0 \qquad \text{DE ye özdeştir.}$$

z^2 ile çarparsak,

$$z^2w'' + a_1 z w' + b_2 w = 0 \qquad \underline{\text{2. mertebeden Euler denk.:}}$$

Genel bir n. mertebeden Euler denk.i, sbt katsayılı bir NOLDE ye özdeştir. Böylece, 2. mertebeden FDE (SOFDE) (2 düzenli tekil noktası olan) sabit katsayılı bir SOLDE ye özdeştir ve yeni bir şey vermez.

BS K

Çözümleri elemanter olmayan fonk.lar içerenlen en basit SAFDE z_1, z_2, z_3 ve üç düzenli tekil noktası olan bir fonk. dur.

$$\zeta(z) = \frac{(z-z_1)(z_3-z_2)}{(z-z_2)(z_3-z_1)} \quad \text{(homografik transf.)}$$

dönüşümü ile z_1, z_2 ve z_3 leri $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2 = \infty$ ve $\zeta_3 = 1$ üstüne göndeririz. Böylece, varsayarsak, üç düzenli tekil nokta $z=0$, $z=1$ ve $z=\infty$ dadır. Gösterilebilir ki, en genel $p(z)$ ve $q(z)$

$$p(z) = \frac{A_1}{z} + \frac{B_1}{z-1} \quad \text{ve} \quad q(z) = \frac{A_2}{z^2} + \frac{B_2}{(z-1)^2} - \frac{A_3}{z(z-1)}$$

Böylece şu teoremi elde ederiz:

<u>14.3.2. ~~teorem~~</u> : Üç düzenli tekil noktası olan en genel 2. mertebe Fuchsian DE

$$w'' + \left(\frac{A_1}{z} + \frac{B_1}{z-1} \right) w' + \left[\frac{A_2}{z^2} + \frac{B_2}{(z-1)^2} - \frac{A_3}{z(z-1)} \right] w = 0$$

biçimine dönüştürülebilir; burada, A_1, A_2, A_3, B_1 ve B_2 ler sbt. lar. Bu denkleme Riemann DE. denir. Bu denklemi $0, 1, \infty$ tekil noktalarına ait olan (λ_1, λ_2) (μ_1, μ_2) ve (ν_1, ν_2) karakteristik üsleri çiftleri cinsinden yazabiliriz. indirgel denklemler :

$$\lambda^2 + (A_1 - 1)\lambda + A_2 = 0$$

$$\mu^2 + (B_1 - 1)\mu + B_2 = 0$$

$$\nu^2 + (1 - A_1 - B_1)\nu + A_2 + B_2 - A_3 = 0$$

$$w = P\left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 & z \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 & \end{matrix} \right\}$$ Riemann P simgesi

indisel denklemleri $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=0$ olarak yazıp, katsayıları karşılaştırırsak;

$$A_1 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \qquad A_2 = \lambda_1\lambda_2$$

$$B_1 = 1 - \mu_1 - \mu_2 \qquad B_2 = \mu_1\mu_2$$

$$A_1 + B_1 = \nu_1 + \nu_2 + 1 \qquad A_2 + B_2 - A_3 = \nu_1\nu_2$$

Bu denklemler kolaylıkla Riemann özdeşliğini verir:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2 + \nu_1 + \nu_2 = 1 \qquad 14.19$$

Bu sonucu 14.18 de koyarsak şu sonuca elde ederiz.

14.3.3. teorem: Genişletilmiş kompleks düzlemde üç düzenli tekil noktası olan 2. mertebe bir FDE, Riemann DE ne özdeştir.

$$w'' + \left(\frac{1-\lambda_1-\lambda_2}{z} + \frac{1-\mu_1-\mu_2}{z-1}\right)w' + \left[\frac{\lambda_1\lambda_2}{z^2} + \frac{\mu_1\mu_2}{(z-1)^2} + \frac{\nu_1\nu_2-\lambda_1\lambda_2-\mu_1\mu_2}{z(z-1)}\right]w = 0 \qquad 14.20$$

BS K

bu, her tekil noktada karakteristik üsler yardımı ile tek olarak belirlenir. Karakteristik üs " Riemann özdeşliğini sağlar.

RDE nin tekliği bize dönüşümler için özdeşlikler türetmeye ve 14.20 nin bağımsız parametrelerini 5 den 3 e indirgemeye olanak verir:

$$w'' + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{1-\gamma+\alpha+\beta}{z-1} \right) w' + \frac{\alpha\beta}{z(z-1)}\, w = 0$$

Bu önemli denklem,

$$z(z-1)w'' + \left[\gamma - (1+\alpha+\beta) z \right] w' - \alpha\beta w = 0 \qquad 14.21$$

olarak yazılır ve hipergeometrik DE (HGDE) olarak adlandırılır.

$$P \left\{ \begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \alpha & 0 & z \\ 1-\gamma & \beta & \gamma-\alpha-\beta & \end{matrix} \right\}$$

BS K

14.4. Hipergeometrik Fonksiyon

$F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ fonksiyonu

$$1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}z+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!}+\dots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k}\frac{z^k}{k!}$$

serisine hipergeometrik seri denir. İsmini şu olgudan alır. $\alpha=1$ ve $\gamma=\beta$ alırsak seri elementer geometrik seriye indirgenir

$$1+z+z^2+\dots=\sum_{k=0}^{\infty}z^k$$

Serideki genel terimi $U_k(z)$ ile gösterir ve oran testini uygularsak;

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{U_{k+1}}{U_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(\alpha)_{k+1}(\beta)_{k+1}z^{k+1}}{(\gamma)_{k+1}\cancel{(k+1)!}_{(k+1)}}\cdot\frac{(\gamma)_k\cancel{k!}}{(\alpha)_k(\beta)_k z^k}\right|$$

$$=|z|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(\alpha+k)(\beta+k)}{(\gamma+k)(k+1)}\right|=|z|$$

Son adımda, α, β, ya da γ lardan hiç birinin sıfır ya da negatif tamsayı olmadığı varsayımı yapılarak, Pochhammer sembolünün şu özellikleri kullanıldı: __________

BS K

$$(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1) \qquad k=1,2,3,\dots$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} \qquad k=0,1,2,3,\dots$$

$$(\alpha)_0 = 1$$

yazım kolaylığı için bazen $(\alpha)_k \to (\alpha,k)$ kullanılır.

Teorem: (özellikler)

(i) $(1)_n = n!$

(ii) $(\alpha+k)(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)_k$

(iii) $\binom{-\alpha}{k} = \frac{(-1)^k}{k!}(\alpha)_k$

(iv) $(\alpha)_{n+k} = (\alpha)_k(\alpha+k)_n = (\alpha)_n(\alpha+n)_k$

(v) $(\alpha)_{k-n} = (-1)^n (\alpha)_k / (1-\alpha-k)_n$

(vi) $(\alpha)_{2n} = 2^{2n}\left(\frac{\alpha}{2}\right)_n\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_n$

İspat: (ii) $(\alpha+k)(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)(\alpha+k)$

$$= \alpha(\alpha+1)_k$$

(iii) $$\binom{-\alpha}{k} = \frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\cdots(-\alpha-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{(-1)^k}{k!}\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1) = \frac{(-1)^k}{k!}(\alpha)_k$$

BS K

α parametresi pozitif ya da negatif olabilir, ancak, $\alpha \neq 0$ dır. Özel olarak $(0)_0 = 1$ dir. α negatif tamsayı ise,

$$(-n)_k = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k \, n!}{(n-k)!} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

negatif indisli POCHHAMMER simgesinin özelliği (v) de $k=0$ alarak,

$$(\alpha)_{-n} = \frac{(-1)^n}{(1-\alpha)_n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

bulunur.

Örnek:

$$\binom{\alpha+k-1}{n} = \frac{(-1)^n (1-\alpha)_n (\alpha)_k}{n! \, (\alpha-n)_k} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Çözüm: (iii) ve (v) den

$(-1)^n (\alpha)_k / (\alpha)_{k-n}$ (v) den

$$\binom{\alpha+k-1}{n} = \frac{(-1)^n}{n!} (1-\alpha-k)_n = \frac{(\alpha)_k}{n! \, (\alpha)_{k-n}}$$

özellik (iv) de $n \to -n$

$$(\alpha)_{k-n} = (\alpha)_{-n} (\alpha-n)_k = \frac{(-1)^n (\alpha-n)_k}{(1-\alpha)_n}$$

$$= \frac{(-1)^n (1-\alpha)_n (\alpha)_k}{n! \, (\alpha-n)_k}$$

BS K

buna göre seri $|z|<1$ için yakınsar, $|z|>1$ için ıraksar. $|z|=1$ için serinin yakınsaması için yeter koşulun $\gamma-\alpha-\beta>0$ olması gerektiği gösterilebilir.

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k}\frac{z^k}{k!} \qquad |z|<1 \qquad \text{(I)}$$

Hipergeometrik fonk.

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)\equiv F(\alpha,\beta;\gamma;z)$$

pay ve paydadaki argümanları gösterir

; pay, payda ve argümanları ayırır.

$\gamma=0$ ve negatif tamsayılar için seri mevcut değildir.

Elemanter Özellikler:

1) Simetri Özelliği:

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=F(\beta,\alpha;\gamma;z)$$

2) I denklemi türetilir

$$\Rightarrow \frac{d}{dz}F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k}\frac{z^{k-1}}{(k-1)!}$$

$k\to k+1 \longrightarrow$

BS K

$$\frac{d}{dz}F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\sum_{k=0}\frac{(\alpha)_{k+1}(\beta)_{k+1}}{(\gamma)_{k+1}}\frac{z^k}{k!}$$

$$=\frac{\alpha\beta}{\gamma}\sum\frac{(\alpha+1)_k(\beta+1)_k}{(\gamma+1)_k}\frac{z^k}{k!}$$

$$=\frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;z)$$

bunu k defa uygularsak;

$$\frac{d^k}{dz^k}F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k}F(\alpha+k,\beta+k;\gamma+k;z)$$

$k=1,\ldots$

3.) <u>İndirgeme bağıntıları:</u> Parametreleri ±1 değiştirilmek ile 6 adet (contiguous) bitişik fonk. elde edilir.

$F(\alpha\pm1,\beta;\gamma;z)$
$F(\alpha,\beta\pm1;\gamma;z)$
$F(\alpha,\beta;\gamma\mp1;z)$

bunların herhangi ikisi ve $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ arasında katsayıları en fazla z ye göre lineer olan $\binom{6}{2}=15$ adet bağıntı vardır (indirgeme bağıntıları)

$\frac{6!}{2!\,4!}=\frac{6\cdot5}{2}=15$

<u>bunlardan birisi:</u>

$$z\frac{d}{dz}F(\alpha,\beta;\gamma;z)+\alpha F(\alpha,\beta;\gamma;z)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k}\frac{kz^k}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k}\frac{z^k}{k!}$$

BS K

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+k)(\alpha)_k \, (\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{z^k}{k!}$$

$$= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1)_k \, (\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{z^k}{k!} = \alpha F(\alpha+1, \beta; \gamma; z)$$

simetri özelliğinden, benzer şekilde,

$$x \frac{d}{dx} F(\alpha, \beta; \gamma; z) + \beta F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \beta F(\alpha, \beta+1; \gamma; z)$$

bu ikisinin farkı,

$$(\alpha-\beta) F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \alpha F(\alpha+1, \beta; \gamma; z) - \beta F(\alpha, \beta+1; \gamma; z)$$

<u>Integral Gösterimleri</u>:

$$B(n+\beta, \gamma-\beta) = \int_0^1 dt \; t^{n+\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} \qquad \gamma > \beta > 0$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\frac{(\beta)_n}{(\gamma)_n} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 dt \; t^{n+\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1}$$

bu sonucu F de yerleştirirsek,

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} z^n \int_0^1 dt \; t^{n+\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1}$$

BS K

$$\frac{(\alpha)_n}{n!} = \binom{-\alpha}{n}(-1)^n$$ kullanılırsa, (iii) devam.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!}(zt)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{n}(-zt)^n = \underbrace{(1-zt)^{-\alpha}}_{|zt|<1}$$

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 dt\, t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-zt)^{-\alpha}$$

$\gamma>\beta>0$

bu sonuç $|xt|<1$ için bulunmasına rağmen, integral $z=1$ de yakınsar.

<u>Teorem</u>: $\gamma \neq 0,-1,-2,\ldots$ ve $\gamma-\beta-\alpha>0$ için

$$F(\alpha,\beta;\gamma;1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

<u>İspat</u>: son bulunan ifade de $z=1$ konulursa,

$$F(\alpha,\beta;\gamma;1) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\underbrace{\int_0^1 dt\, t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-t)^{-\alpha}}_{\int_0^1 dt\, t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta-1}}$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\cancel{\Gamma(\beta)}\Gamma(\gamma-\beta)}\cdot\frac{\Gamma(\gamma-\beta-\alpha)\cancel{\Gamma(\beta)}}{\Gamma(\gamma-\alpha)} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

Hipergeometrik Denklem

$$z(1-z)w'' + [\gamma - (1+\alpha+\beta)z]w' - \alpha\beta w = 0 \qquad 14.21$$

Bu SOLDE Gauss'un HGD i olarak adlandırılır.

$$w_1(z) \equiv F(\alpha,\beta;\gamma;z) \qquad \gamma \neq 0,-1,-2,\dots$$

bu denklemin bir çözümüdür. $z=0$ ve 1 tekil noktalarıdır. Seri çözümü ararsak indisel denklemin kökleri $(0$ ve $1-\gamma)$ olarak bulunurdu. Bu yönteme başvurmadan 2. çözüm bulunabilir.

$W = z^{1-\gamma} y$ değişimi yapalım.

$$w' = z^{1-\gamma} y' + (1-\gamma) z^{-\gamma} y$$

$$w'' = z^{1-\gamma} y'' + 2(1-\gamma) z^{-\gamma} y' - \gamma(1-\gamma) z^{-\gamma-1} y$$

burada yerleştir.

$$z(1-z)y'' + [2-\gamma-(\alpha+\beta-2\gamma+3)z]y' - (1+\alpha-\gamma)(1+\beta-\gamma)y = 0$$

$$\Rightarrow y = F(1+\alpha-\gamma, 1+\beta-\gamma; 2-\gamma; z) \qquad \gamma \neq 2,3,\dots$$

$$\Rightarrow w_2 = z^{1-\gamma} F(1+\alpha-\gamma, 1+\beta-\gamma; 2-\gamma; z) \qquad //$$

2. lineer bağımsız çözüm olur.

BS K

$\gamma = 2,3,4,\dots$ leri kapsayan durum, 2. türden HGF tanımlar. Bunları ele almayacağız. Toplam olarak, ω_1 ve ω_2 ye benzer 24 çözüm vardır. Kummer çözümleri.

Diğer fonksiyonlar ile ilişkisi:

Birçok elemanter ve özel fonk. HGF ların özel durumlarıdır.

Örnek:

(1) $$F(1,\beta;\beta;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n}{n!} x^n = \sum_0^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

(2) $$\ln(1-x) = -x\, F(1,1,2;x)$$

(3) $$\arcsin x = x\, F(1/2, 1/2; 3/2; x^2)$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!\, x^{2n+1}}{2^{2n}(n!)^2 (2n+1)}$$

in katsayıları PHM simgesi ile ifade edelim

$$(2n)! = 2^{2n} (1/2)_n\, n!$$

$$(2n+1) = \frac{(2n+1)!}{(2n)!} = \frac{(3/2)_n}{(1/2)_n}$$

$$(\alpha)_{2n} = 2^{2n} \left(\frac{\alpha}{2}\right)_n \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_n$$

$$(2)_{2n} = (2n+1)! = 2^{2n} (3/2)_n\, n!$$

$$= x \sum_0^{\infty} \frac{(1/2)_n (1/2)_n}{(3/2)_n} \frac{x^{2n}}{n!} = x F(1/2, 1/2; 3/2; x^2)$$

4) $$1 = F(0,\beta;\gamma;x)$$

BS K

5) $P_n(x) = F\left(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2}\right)$

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2} = \left[(1-t)^2 - 2t(x-1)\right]^{-1/2}$$

$$= (1-t)^{-1}\left[1 - \frac{2t(x-1)}{(1-t)^2}\right]^{-1/2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n = (1-2xt+t^2)^{-1/2}$$

$$(a+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

$$= (1-t)^{-1}\left[1 - \frac{2t(x-1)}{(1-t)^2}\right]^{-1/2}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-1)^k \frac{(2t)^k (x-1)^k}{(1-t)^{2k+1}}$$

RHS in t nin kuvveti cinsinden yazacağız. bunun için Binom serisine açarız:

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{-1/2}{k}\binom{-2k-1}{m} (-1)^{m+k}\, 2^k (x-1)^k\, t^{k+m}$$

$$m+k=n \Rightarrow n-k=m$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{-1/2}{k}\binom{-2k-1}{n-k} (-1)^n\, 2^k (x-1)^k\, t^n$$

(iii) özellik $\Rightarrow$ $\binom{-\alpha}{n} = \frac{(-1)^n}{n!} (\alpha)_n$

$$\binom{-1/2}{k}\binom{-2k-1}{n-k} = \frac{(-1)^k (1/2)_k}{k!}\,\frac{(-1)^{n-k}(2k+1)_{n-k}}{(n-k)!} = (-1)^n \frac{(1/2)_k (2k+1)_{n-k}}{k!\,(n-k)!}$$

BS K

$$\left.\begin{aligned}(n+k)! &= n!\,(n+1)_k\\ (2n)! &= 2^{2n}\,(1/2)_n\, n!\end{aligned}\right\} \Rightarrow (2k+1)_{n-k} = \frac{(n+k)!}{(2k)!} = \frac{(n+1)_k\, n!}{2^{2k}\,(1/2)_k\, k!}$$

$$(\alpha)_{k-n} = \frac{(-1)^n\,(\alpha)_k}{(1-\alpha-k)_n} \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow (k-n)! = \frac{(-1)^n\, k!}{(-k)_n}$$

$$k \leftrightarrow n \Rightarrow (n-k)! = \frac{(-1)^k\, n!}{(-n)_k}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Bigg\{ \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\,(n+1)_k}{(1)_k\, k!} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k}_{F\left(-n,\, n+1;\, 1;\, \frac{1-x}{2}\right)} \Bigg\}\, t^n$$

6) $(1-x)^{-\alpha} = F(\alpha, \beta; \beta; x)$

7) $(1+x)(1-x)^{-2\alpha-1} = F(2\alpha, \alpha+1; \alpha; x)$

8) $\ln \dfrac{1+x}{1-x} = 2x\, F(1/2, 1; 3/2; x^2)$

9) $\arctan x = x\, F(1/2, 1; 3/2; -x^2)$

10) $\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^{1-2\alpha} = F(\alpha - 1/2, \alpha; 2\alpha; x)$

BS K

Seri toplamı ve integral hesabı:

1) $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{\alpha+k}{m} = (-1)^n \binom{\alpha}{m-n} \qquad m=0,1,2,\dots$$

formülünü ispatlayınız.

teorem 1 (iii) den, $\binom{-\alpha}{n} = \frac{(-1)^n}{n!}(\alpha)_n$ ve $\binom{n}{k} = \frac{(-1)^k}{k!}(-n)_k$

Örnekten; $$\binom{\alpha+k}{m} = \frac{(-1)^m (-\alpha)_m (\alpha+1)_k}{m! \, (\alpha+1-m)_k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{\alpha+k}{m} = \frac{(-1)^m (-\alpha)_m}{m!} \sum_{k=0} \frac{(-n)_k (\alpha+1)_k}{(\alpha+1-m)_k \, k!}$$

$$= \frac{(-1)^m (-\alpha)_m}{m!} F(-n, \alpha+1; \alpha+1-m; 1)$$

teorem 2 den $$F(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

ve $$F(-n, \alpha+1; \alpha+1-m; 1) = \frac{\Gamma(\alpha+1-m)\Gamma(n-m)}{\Gamma(\alpha+1+n-m)\Gamma(-m)} = \frac{(-1)^n \, m!}{(m-n)! \, (\alpha+1-m)_n}$$

burada $$\frac{\Gamma(k-n)}{\Gamma(-n)} = \begin{cases} \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!} & 0 \le k \le n \quad \text{nonnegative integers.} \\ 0 & k > n \end{cases}$$

teorem 1 (v) den $(-\alpha)_m = (-1)^n (-\alpha)_{m-n} (\alpha+1-m)_n$

ve $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{\alpha+k}{m} = \frac{(-1)^m}{(m-n)!}(-\alpha)_{m-n} = (-1)^n \binom{\alpha}{m-n}$$

BS K

2) $q > -1$ için

$$I = \int_0^\infty x^q \left[L_p^{(q)}(x) \right]^2 e^{-x}\, dx = \frac{\Gamma(p+q+1)}{p!} \qquad p = 0, 1, 2, \ldots$$

$$L_p^{q}(x) = \sum_{n=0}^{p} (-1)^n \binom{p+q}{p-n} \frac{x^n}{n!} \Bigg/ \frac{(p+q)!}{(p-n)!\,(q-n)!}$$

$$= \binom{p+q}{p} \sum_{n=0}^{p} \frac{(-p)_n}{(q+1)_n} \frac{x^n}{n!}$$

$$I = \binom{p+q}{p}^2 \sum_{n=0}^{p} \frac{(-p)_n}{(q+1)_n\,(n!)} \sum_{k=0}^{p} \frac{(-p)_k}{(q+1)_k\, k!} \underbrace{\int_0^\infty x^{q+n+k} e^{-x}\, dx}$$

$$\Gamma(q+n+k+1) = \Gamma(q+n+1)\,(q+n+1)_k$$

$$= \Gamma(q+1)\,(q+1)_n\,(q+n+1)_k$$

$$= \binom{p+q}{p}^2 \Gamma(q+1) \sum_{n=0}^{p} \frac{(-p)_n}{n!} \sum_{k=0}^{p} \frac{(-p)_k\,(q+n+1)_k}{(q+1)_k\, k!}$$

$$= \binom{p+q}{p}^2 \Gamma(q+1) \sum_{n=0}^{p} \frac{(-p)_n}{n!} \underbrace{F(-p, q+n+1; q+1; 1)}$$

$$= \binom{p+q}{p}^2 \Gamma(q+1) \frac{(-p)_p\,(-1)^p\, p!}{(q+1)_p\; p!} \qquad = \begin{cases} 0 & 0 \le n \le p-1 \\ \dfrac{(-1)^p\, p!}{(q+1)_p} & n = p \end{cases}$$

$$= \binom{p+q}{p}^2 \frac{\Gamma(q+1)\, p!}{(q+1)_p} = \Gamma(q+p+1)/p!$$

Jacobi Fonksiyonları:

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2}+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\frac{du}{dx}+\lambda(\lambda+\alpha+\beta+1)u=0 \qquad (14.32)$$

$x=1-2z$ değişimi HGDE nin yeni parametreleri

$\alpha_1=\lambda \qquad \beta_1=\lambda+\beta+1+\alpha \qquad \gamma_1=1+\alpha$

Çözümleri 1. türden Jacobi fonksiyonları

$$P_\lambda^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{\Gamma(\lambda+\alpha+1)}{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(\alpha+1)}\,F\left(-\lambda,\lambda+\alpha+\beta+1;1+\alpha;\frac{1-z}{2}\right)$$

$\lambda=n$ pozitif tam $\Rightarrow$ bu bir polinoma dönüşür.

$$x=1-2z \Rightarrow z=0 \text{ ve } 1 \Rightarrow x=1,\,-1$$

14.5. Konfluent HGF lar:

$x=1-2z$ dönüşümü HGDE in düzenli tekil noktalarını sadece bir miktar kaydırır. Sonuç olarak yeni fonksiyonlar, kompleks düzlemde $z=\pm1$ iki düzenli tekil noktaya sahiptir. Bazı fiziksel problemlerde sadece başlangıç (küresel koord.larda $r=0$) tekil noktadır. Buna uyan bir DE elde etmek için $z=1$ deki tekil noktayı ∞ a iteriz. Bu $t=rz$ ve sonra $r\to\infty$ limiti

BS K

alınarak gerçekleştirilir.

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \left(\frac{\gamma}{t} + \frac{1-\gamma+\alpha+\beta}{t-r} \right) \frac{dw}{dt} + \frac{\alpha\beta}{t(t-r)} w = 0$$

$r \to \infty$ alır iken, γ yı sbt tutarken α, β yı de ∞ a götürürüz.

$\beta = r \to \infty$ alınır.

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \left(\frac{\gamma}{t} - 1 \right) \frac{dw}{dt} - \frac{\alpha}{t} w = 0$$

$$z w''(z) + (\gamma - z) w'(z) - \alpha w(z) = 0 \qquad \text{CHGDE}$$

$z=0$ düzenli tekil nokta. Bu nokta civarında açılım elde edilebilir. Karakteristik üsler : $0, 1-\gamma$

$$\Phi(\alpha;\gamma;z) = \lim_{\beta\to\infty} F(\alpha,\beta;\gamma;z/\beta)$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\gamma+k)} z^k$$

$$= \lim_{\beta\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{(z/\beta)^n}{n!} = \sum \frac{(\alpha)_n z^n}{(\gamma)_n\, n!} \lim_{\beta\to\infty} \frac{(\beta)_n}{\beta^n}$$

$$= \frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\beta^n} \xrightarrow{\beta\to\infty} 1$$

Not ; Φ yerine bazen $M(\alpha;\gamma;z)$ ya da ${}_1F_1(\alpha;\gamma;z)$ de kullanılır.

BS K

Diğer fonksiyonlarla ilişkisi

1) $e^{x} = \Phi(\alpha;\alpha;x)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\alpha)_n} \frac{x^n}{n!} = \sum \frac{x^n}{n!} = e^{x}$$

2) $H_{2n}(x) = (-1)^n \dfrac{(2n)!}{n!} \Phi(-n;1/2;x^2)$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2n)!}{k!\,(2n-2k)!} (2x)^{2n-2k} = (-1)^n (2n)! \sum_{s=0}^{n} \frac{(-1)^s (2x)^{2s}}{(n-s)!\,(2s)!}$$

$n-k=s$

$= 2^{2s} (1/2)_s\, s!$

$(-1)^s n! \,/\, (-n)_s$

$$= (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \sum_{s=0}^{n} \frac{(-n)_s}{(1/2)_s} \frac{x^{2s}}{s!}$$

$$= (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \Phi(-n;1/2;x^2)$$

3) $L_n(x) = \Phi(-n;1;x)$

BS K

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \, n! \, x^k}{(k!)^2 \, (n-k)!}$$

$$k! = (1)_k$$

$$(n-k)! = \frac{(-1)^k \, n!}{(-n)_k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k}{(1)_k} \frac{x^k}{k!} = \Phi(-n; 1; x)$$

b) $e^{-x^2} = \Phi(1/2 \,;\, 1/2 \,;\, -x^2)$

BS K

14.5.2. Örnek: Merkezcil bir $V(r)$ pot. için SD:

$$-\frac{1}{2}\nabla^2\psi + V\psi = E \qquad \hbar = m = 1$$

H benzeri durumda $V(r) = -Ze^2/r$

$$\nabla^2\psi + \left(2E + \frac{2Ze^2}{r}\right)\psi = 0$$

bu denk. in radyal kısmı,

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left[2E + \frac{2Ze^2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R = 0$$

$U = rR \qquad \lambda = 2E \qquad a = 2Ze^2 \qquad b = l(l+1)$

$r = kz$

$$\frac{d^2U}{dz^2} + \left(\lambda k^2 + \frac{ak}{z} - \frac{b}{z^2}\right)U = 0$$

$\lambda k^2 = -1/4$ seçelim ve $\alpha = a/2\sqrt{-\lambda}$ alalım.

$$\Rightarrow \frac{d^2U}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{z} + \frac{b}{z^2}\right)U = 0$$

$$U(z) = z^{\mu} e^{-\nu z} f(z)$$

alır $\Rightarrow$ CHGDE ye dönüşür.

$$\frac{d^2f}{dz^2} + \left(\frac{2\mu}{z} - 2\nu\right)\frac{df}{dz} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\mu(\mu-1)}{z^2} - \frac{2\mu\nu}{z} + \frac{\alpha}{z} - \frac{b}{z^2} + \nu^2\right]f = 0$$

BSK

$\nu^2 = 1/4$ ve $\mu(\mu-1) = b$ seçersek bu denk.

$$f'' + \left(\frac{2\mu}{z} - 2\nu\right) f' - \frac{2\mu\nu - \alpha}{z} f = 0$$

fiziksel nedenlerden, $z \to \infty$ iken $U(z) \to 0$ gelmelidir. bu nedenle $\nu = 1/2$ olur. Benzer şekilde, $\mu(\mu-1) = b = l(l+1)$ ile $\mu = -l$ $\mu = l+1$ elde ederiz. Yine fiziksel nedenlerden dolayı $U(0)$ ın sonlu olmasını isteriz. bu $\mu = l+1$ verir.

$$f'' + \left[\frac{2(l+1)}{z} - 1\right] f' - \frac{l+1-\alpha}{z} f = 0$$

$$z f'' + [2(l+1) - z] f' - (l+1-\alpha) f = 0$$

$$\Phi(l+1-\alpha, 2l+2; z)$$

Çözüm;

$$U(z) = C z^{l+1} e^{-z/2} \Phi(l+1-\alpha, 2l+2; z)$$

temsil eden kummet serisi bir yerde kesilmezse $\to \infty$ olur, Bunun için

$$l+1-\alpha = -N \quad (N \geq 0 \text{ almalıdır.})$$

BS K

Bu durumda Laguerre pol. larını elde ederiz.

$$L_N^{j} \equiv \frac{\Gamma(N+j+1)}{\Gamma(N+1)\Gamma(j+1)} \mathcal{F}(-N, j+1; z)$$

$j = 2l+1$

$l+1-\alpha = -N \Rightarrow$ H benzeri atomun enerji düzeyleri için kuantumlama kuralı.

$n = N + l + 1$

$$E = -\frac{Z^2 m e^4}{2\hbar^2 n^2} = -Z^2 \left(\frac{mc^2}{2}\right) \alpha^2 \frac{1}{n^2}$$

$e^2/\hbar c \sim 1/137$

$$R_{n,l}(r) = \frac{u_{n,l}(r)}{r} = C r^l e^{-Zr/na_0} \mathcal{F}\left(-n+l+1, 2l+2; \frac{2Zr}{na_0}\right)$$

BS K