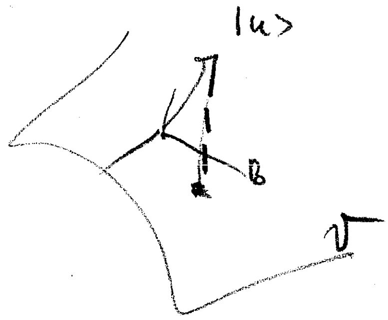
BÖLÜM 16

OPERATÖR TEORİSİ



16.1. İntegral ve Dif. Operatörler:

N boyutlu bir V vektör uzayında $A|u\rangle = |v\rangle$ vektör op. denklemini çözmek isteyelim. Bunun için bir $B=\{|a_i\rangle\}_{i=1}^{N}$ bazı seçer, denklemi matris biçiminde yazar, N lineer denklem sist.imi çözeriz. Bu $|u\rangle$'nın B bazındaki bileşenlerini verir. Matris denklemini elde etmenin standart bir yolu vardır. V için ortonormal bir $B=\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{N}$ bazı seçip, tüm bileşenleri buna bağlamak uygundur. Bunun için şunu yaparız:

$$\langle e_i|A|u\rangle = \langle e_i|v\rangle \qquad i=1,2,\ldots,N$$

$$1 = \sum_{j=1}^{N} |e_j\rangle\langle e_j|$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\langle e_i|A|e_j\rangle}_{A_{ij}} \underbrace{\langle e_j|u\rangle}_{u_j} = \underbrace{\langle e_i|v\rangle}_{v_i}$$

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij} u_j = v_i \qquad 16.1$$

Bu denklem N adet $\{u_j\}_{1}^{N}$ bilinmeyenli N lineer denklem sistemidir.

BS K

$A_{ij} = \delta_{ij} \lambda_j$

Uygun bir baz, A nın köşegen bir matris diag $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ile temsil edilemiz. O zaman op. denklem $\lambda_i v_i = \sigma_i$ basit şeklini alır ve çözümü hemen elde edilir. Bu süreci aynen sonsuz boyutlu vektör uzaylarına, özellikle sürekli indis durumu için uygulayalım.

$K|u\rangle = |f\rangle$ 'nin çözümünü bulmak istiyoruz.

$$\langle x | K \left\{ \int_a^b |y\rangle w(y) \langle y| dy \right\} |u\rangle =$$

$$\int_a^b \langle x|K|y\rangle w(y) \langle y|u\rangle dy = \langle x|f\rangle$$

$$\int_a^b K(x,y)\, w(y)\, u(y)\, dy = f(x) \qquad (16.2)$$

Int. op. — Int. op.ün matris elemanı.

Kesikli durumlarda, verilen bir bazda A köşegen yapıldı; aynı şeyi (16.2) için düşünelim: yani, x ve y ler K için indislerdir ve $x \neq y$ için $K(x,y) = 0$ olduğunu varsayalım. Böyle operatörlere yerel op. ler denir. Böyle op. ler için integrale katkı, $x = y$ olan noktadan gelir. Eğer $K(x,y)$ bu noktada sonlu olursa ve $w(y)$ ve $u(y)$ fonk. lar orada iyi davranışlıdır, 16.2 nin LHS $\to 0$ olur ve tutarsızlık ortaya çıkar. Bunu aşmak için,

$$K(x,y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \text{ ise} \\ \infty & x = y \text{ ise} \end{cases}$$

BS K
Ø olmalı diyorum.

$K(x,y) \to \delta$-fonk.u dav[redacted]. $K(x,y) = \delta(x-y)\, L(x)/w(x)$

alır ve 16.7 ye koyarsak,

$$L(x)\, U(x) = f(x)$$

bulunur. Kesikli durumda di indislenmiş bir sayının sürekli benzerinde, $L(x)$ bir fonk.u temsil eder. Ancak x in sürekli değişken olması $L(x)$ için başka olanaklar doğurur; örneğin, $L(x)$ bir dif. op. olabilir. Türev, komşu noktalar içeren bir limit süreci olmasına karşılık, bir yerel op. dür. Böylece bir fonk.un bir noktada türevinden bahsederiz. Kesikli durumda U_i i den $i+1$ e ve tekrar i ye kayarlar. Böyle bir süreç yerel değildir; bu sadece i'yi değil $i+1$ i de içerir. i noktası (sonsuz yakın) bir komşuya sahip değildir.

Kesikli ve sürekli op. ler arasındaki esas fark bu sonuncusunu uygulamalar açısından daha zengin kılar. Özellikle $L(x)$ bir DO olarak alınırsa, $L(x)U(x) = f(x)$ denklemi Dif Denk. teorisinin verimli alanına götürür.

16.2. Hilbert Uzayında Sınırlı Operatörler

Sonlu boyutlu vektör uzaylarında, operatörler ve matrisler arasında 1-1 karşı gelme vardır. Böylece, bir anlamda, operatörlerin incelenmesi matrislerin incelenmesine indirgenir. Matris ile kernel arasında benzerlik kurmaya çalışırken, yeni sorular ortaya çıkar;

K(x,y) nin her iki argümana göre sürekliliği,
x ve y nin K nın tanımlandığı aralığın uç noktalarına yaklaşırken K(x,y) nin limiti, K nın simetrikliği, kompaktlığı
vs gibi.

<u>4.7.1. Örnek</u>: $\mathbb{C}^\infty$, $|a\rangle = \{\alpha_i\}_1^\infty$ diziler kümesi ya da $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\infty)$ ∞ <u>tuple</u> kümesi olsun; ve $\sum_1^\infty |\alpha_i|^2 < \infty$ yakınsaklık gereği sağlansın. Bu, $\langle a|b\rangle = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i^* \beta_i$ ile tanımlı iç çarpım olan bir Hilbert uzayıdır, burada $|e_i\rangle$, i. bileşeni 1 diğerleri sıfırdır.

O zaman $|a\rangle = \sum_{j=1}^\infty \alpha_j |e_j\rangle$

— <u>Sağ-kaydırma op. ü.</u> T_r

$$T_r|a\rangle = T_r\left(\sum_1^\infty \alpha_j|e_j\rangle\right) = \sum_{j=1}^\infty \alpha_j |e_{j+1}\rangle$$

Diğer bir deyimle, T_r, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ yi $\to (0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ ye dönüştürür. T_r bir lin. op. dür. (göster!)

$\mathcal{L}(V,W)$ lineer dönüşümler kümesi, kendi başına bir vektör uzayı idi. Bu uzayda op. ler vektörler olduğundan, op. lerin incelenmesi, V ve W sonsuz boyutlu olduğunda $\mathcal{L}(V,W)$ üzerinde <u>bir norm kurulmasını gerektirir.</u>

BS K

16.2.2. Tanım : $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$ normları $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ olan iki Hilbert uzayı olsun. Herhangi bir $\underset{\sim}{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ için

$\max\left\{ \dfrac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1} \,\middle|\, |x\rangle \neq 0 \right\}$ sayısı (eğer var ise) $\underset{\sim}{T}$ nin op. normu olarak adlandırılır, ve $\|T\|$ ile gösterilir. Normu sonlu olan lineer bir dön. sınırlı lineer dön. olarak adlandırılır. Bir Hilbert uzayından kendisine sınırlı bir lineer dönüşüme sınırlı op. denir. Tüm sınırlı lineer dönüşümler topluluğu $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ ile gösterilecektir ve $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ nin bir alt kümesidir, ve eğer $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$ ise $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ile gösterilecektir.

Dikkat: $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normları, $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$ nin iç çarpımları ile sınırlı. ($\|x\|_1$ ile bölerek) $\|T\|$ normunun genişleme olanağını uygun bir vektör seçerek elimine ediyoruz. $|x\rangle$ in uzunluğunu sınırlayarak, uzunlukla bölme için gerekliliği elimine edebiliriz. Gerçekte norm, özdeş olarak,

$$\|T\| = \max\{\|Tx\|_2 \mid \|x\|_1 = 1\} = \max\{\|Tx\|_2 \mid \|x\|_1 \leq 1\} \quad 16.3.$$

şeklinde tanımlanabilir.

16.2.3. Önerme : Bir T op. i sınırlıdır ⟺ sonlu normlu vektörleri sonlu normlu vektörlere gönderir ise.

İspat: Eğer T sınırlı ⟹ $\|Tx\|$ sonlu norma sahiptir. Tersine olarak, $\|Tx\|_2$ tüm $|x\rangle$ ler (birim uzunluklu) için sonlu ⟹ $\max\{\|Tx\|_2 \mid \|x\|_1 = 1\}$ de sonludur ve T sınırlıdır.

Bu tanımın bir sonucu,

$$\|T x\|_2 \leq \|T\| \|x\|_1 \quad \forall |x\rangle \in \mathcal{H}_1 \qquad 16.4$$

$|x\rangle$ yerine $|x\rangle - |y\rangle$ seçersek $T|x\rangle \to T|y\rangle$ çıkar. Bu sürekli fonk.ları karakterize eden özelliktir.

<u>16.2.4 Öner</u> : $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ sınırlı op. ü $\mathcal{H}_1$ den $\mathcal{H}_2$ ye sürekli bir fonk. dur. Bu tanımın diğer bir sonucu,

<u>16.1.5</u> $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ nin bir vekt. altuzayıdır, ve $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$ için $\mathbb{1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ vardır ve $\|\mathbb{1}\| = 1$ dir

* <u>Continuity</u>.

$\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ normlanmış vekt. uzaylar $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ üzerindeki aşağıdaki koşullar özdeştir.

(a) T süreklidir

(b) T, başlangıçta süreklidir şu anlamda: $|x_n\rangle \to 0 \Rightarrow T|x_n\rangle \to 0$

(c) $\forall |x\rangle \in \mathcal{H}_1$ için $\|T|x\rangle\| \leq K\|x\|$ özelliğinde olan gerçel bir $K > 0$ sayısı vardır.

(d) $S = \{ |x\rangle \mid \|x\| \leq 1 \}$, $\mathcal{H}_1$ içinde kapalı birim küre ise o zaman görüntüsü $T(S)$, $\mathcal{H}_2$ içinde sınırlı bir kümedir

BS K

16.2.7 örnek: $D = d/dx$ türev op.-ü karesi integrallenebilir $\mathcal{L}^2(a,b)$ Hilbert uzayı üzerinde sınırlı bir op. değildir. $f(x) = \sqrt{x-a}$ benzeri bir fonk. ile

$$\|f\|^2 = \int_a^b (x-a)\,dx = \frac{1}{2}(b-a)^2 \Rightarrow \|f\| = \frac{b-a}{\sqrt{2}}$$

halbuki

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x-a}} \rightarrow \|Df\|^2 = \frac{1}{4}\int_a^b \frac{dx}{x-a} \neq \infty \text{ verir.}$$

$\|D\|$ sonsuz sonucunu bulunur.

16.2.6. Örnek iç çarpım uzayında, her vektöre bir lineer op. (lineer fonksiyonel) eşlik edeceğini gördük. Böylece bir $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında $|x\rangle$ vektörüne eşlik eden $f_x : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ vardır ki $f_x(|y\rangle) \equiv \langle x|y\rangle$ ile tanımlıdır. f_x in op. normunu, $|x\rangle$ in normu ile karşılaştırmak istiyoruz. Schwartz eşitsizliği kullanarak

$$\|f_x\| = \max\left\{ \frac{|f_x(|y\rangle)|}{\|y\|} \;\Big|\; |y\rangle \neq 0 \right\} = \max\left\{ \frac{|\langle x|y\rangle|}{\|y\|} \;\Big|\; |y\rangle \neq 0 \right\} \leq \|x\|$$

Öte yandan, $\|x\|^2 = f_x(|x\rangle)$ dan

$$\|x\| = \frac{f_x(|x\rangle)}{\|x\|} \leq \max\left\{ \frac{|f_x(|y\rangle)|}{\|y\|} \;\Big|\; |y\rangle \neq 0 \right\} = \|f_x\|$$

elde ederiz. Bu iki eşitsizlik

$$\|f_x\| = \|x\|$$ olduğunu söyler.

BS K

16.2.8. <u>Örnek</u>: $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ bir cebir aynı zamanda bir vektör uzayı olduğundan, operatörlerin çarpımları ve normları arasındaki bağıntı ile ilgilenilecektir. Özel olarak, $\|ST\|$ nin $\|S\|$ ve $\|T\|$ ye nasıl bağlı olduğu bilinmek istenir. Bu örnekte,

$$\|ST\| \leq \|S\|\|T\| \qquad 16.5$$

olduğunu göstereceğiz. Bunun için ST çarpımı için op. norm tanımını kullanalım:

$$\|ST\| = \max\left\{ \frac{\|ST x\|}{\|x\|} \,\middle|\, |x\rangle \neq 0 \right\}$$

$$= \max\left\{ \frac{\|STx\|}{\|Tx\|}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \,\middle|\, |x\rangle \neq 0 \neq T|x\rangle \right\}$$

$$\leq \max\left\{ \frac{\|S(T|x\rangle)\|}{\|Tx\|} \,\middle|\, T|x\rangle \neq 0 \right\} \underbrace{\max\left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \,\middle|\, |x\rangle \neq 0 \right\}}_{=\|T\|}$$

İlk terim tüm vektörler değil, sadece T'nin görüntüsündeki vektörleri gezer. Eğer bütün vektörleri içerseydi, daha büyük bir sayı elde edebilirdik. Bu nedenle,

$$\max\left\{ \frac{\|S(T|x\rangle)\|}{\|Tx\|} \,\middle|\, T|x\rangle \neq 0 \right\} \leq \underbrace{\max\left\{ \frac{\|Sx\|}{\|x\|} \,\middle|\, |x\rangle \neq 0 \right\}}_{=\|S\|}$$

ve istenen eşitlik çıkar. Bu sonucun <u>faydalı bir sonucu da</u>,

$$\|T^n\| \leq \|T\|^n .$$

BS K

16.2.9 Öneri: $\mathcal{H}$ bir Hilbert uzayı ve $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ olsun. Eğer $\|T\| < 1 \Rightarrow$ $1-T$ terslenebilir ve

$$(1-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$$

İspat: seri yakınsar, çünkü

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} T^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| \leq \sum_n \|T\|^n = \frac{1}{1-\|T\|}$$

Toplamın sonlu bir normu vardır. Dahası,

$$(1-T)\sum_{1}^{\infty} T^n = (1-T)\left(\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} T^n\right) = \lim_{k\to\infty} (1-T)\sum_{0}^{k} T^n$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{0}^{k} T^n - \sum_{0}^{k} T^{n+1} \right) = \lim_{k\to\infty} (1-T^{k+1}) = 1$$

çünkü $0 \leq \lim_{k\to\infty} \|T^{k+1}\| \leq \lim_{k\to\infty} \|T\|^{k+1} = 0$

$\|T\| < 1$ için ve normu 0 olması $\Rightarrow$ op. un kendisi 0 olur.

Benzer şekilde $\left(\sum_n^{\infty} T^n\right)(1-T) = 1$ olduğu gösterilir.

$\blacksquare$

16.2.10 Sonuç: $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ve λ kompleks bir sayı olsun, öyleki $\|T\| < |\lambda|$ o zaman $T - \lambda 1$ terslenebilir bir op. dür ve

$$(T-\lambda 1)^{-1} = \frac{-1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(T/\lambda\right)^n$$

BS K

Hatırlatma : T nin eki adjointi

$$\langle y|T|x\rangle^{*} = \langle x|T^{+}|y\rangle$$

ya da

$$\langle Tx|y\rangle = \langle x|T^{+}|y\rangle$$

16.2.11. Teorem : $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ olsun. T nin adjoint : $\langle Tx|y\rangle = \langle x|T^{+}y\rangle$ ile tanımlanır ve mevcuttur. Dahası $\|T\| = \|T^{+}\|$

16.2.12 Teorem : $\mathcal{N}(T)$ ve $\mathcal{R}(T)$, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nin null uzayı (kernel) ve değer kümesi olsun.

$$\mathcal{N}(T^{+}) = \mathcal{R}(T)^{\perp} \quad \text{ve} \quad \mathcal{N}(T) = \mathcal{R}(T^{+})^{\perp}$$

ispat: $|x\rangle$, $\mathcal{N}(T^{+})$ içindedir sus $T^{+}|x\rangle = 0$ sus $\langle y|T^{+}x\rangle = 0$ tüm $|y\rangle \in \mathcal{H}$ için. Bu ancak ve ancak (ava) tüm $|y\rangle \in \mathcal{H}$ için $\langle Ty|x\rangle = 0$ ise geçerlidir. Bu ise, $|x\rangle$ in $\mathcal{R}(T)^{\perp}$ içinde olduğunu ifadesine özdeştir. Bu doğruyu gösteri $\mathcal{N}(T^{+}) = \mathcal{R}(T)^{\perp}$ olduğunu ispatlar. Teoremin 2. kısmı $(T^{+})^{+} = T$ den çıkar.

BS K

16.3. Lineer Op. lerin spektrumu :

16.3.1. Tanım : $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ olsun. Bir λ kompleks sayısı T nin düzenli bir noktasıdır denir eğer $T - \lambda 1$ op.ü sınırlı ve terslenebilir ise. T nin tüm düzenli noktalarının kümesine, T nin resolvent kümesi denir ve $\rho(T)$ ile gösterilir.

16.2.10 un sonucu şunu ifade eder : T sınırlı ⇒ o zaman $\rho(T)$ boş değildir ve bir Hilbert uzayındaki sınırlı bir lineer op.ün spektrumu sınırlı bir kümedir. Gerçekten bunun sonucu tüm $\lambda \in \sigma(T)$ için $\lambda \leq \|T\|$ olmasıdır.

Sonlu boyutlu durumu yukarıki tanımı ışığında karşılaştırmak öğreticidir. Boyut teoremi nedeni ile sonlu boyutlu bir V vektör uzayı üzerinde lineer bir op. terslenebilir ⇔ o ya onto ya da 1–1 ise. Şimdi, $\lambda \in \sigma(T)$ ⇔ $T - \lambda 1$ terslenebilir değil ise. Sonlu boyutlar için bu $\ker(T - \lambda 1) \neq 0$ kastedir. Böylece, $(T - \lambda 1)|a\rangle = 0$ olacak şekilde V de bir $|a\rangle$ vektörü varsa. Bu özdeğer ve özvektörlerin birleşik tanımıdır ve sonsuz boyutta özdeğerleri tanımlamak için kullanmak zorunda olacağımız tanımdır. Sonlu boyutta, $\sigma(T)$, T nin tüm özdeğerler kümesi ile çakışır. Sonsuz boyutta doğru değildir.

16.3.2. Örnek : $\mathbb{C}^\infty$ da etkiyen sağ kaydırma op.nü alalım. Tüm $|a\rangle$ için $\|T_r a\| = \|a\|$. Bu $\|T_r\| = 1$ verir, öyleki $\sigma(T_r)$ ye ait olan herhangi bir λ, $|\lambda| \leq 1$ olacak şekilde olmalıdır. Tersinin yani $|\lambda| \leq 1 \Rightarrow \lambda \in \sigma(T_r)$ nin de doğru olacağını göreceğiz. Şunu görmek yeterlidir: $0<|\lambda|\leq 1$ ise, $T_r-\lambda 1$ terslenebilir değildir. Bunu kanıtlamak için, $T_r-\lambda 1$'in onto olmadığını göstereceğiz.

Varsayalım ki $T_r-\lambda 1$ onto'dur. O zaman $(T_r-\lambda 1)|a\rangle=|e_1\rangle$ olacak şekilde bir $|a\rangle$ vektörü var olmalıdır, burada $|e_1\rangle$ $\mathbb{C}^\infty$'un ilk standart baz vektörüdür. Her iki yandaki bileşenlerin eşitlenmesi $\alpha_1=-1/\lambda$ ve tüm $j\geq 2$ için $\alpha_{j-1}=\lambda\alpha_j$ indirgeme bağıntılarını verir. Buradan tüm j ler için

$$\alpha_j=-\frac{1}{\lambda^j} \quad \text{çözülür}$$

bu bir çelişkidir, çünkü $0<\lambda<1 \Rightarrow \sum_j|\alpha_j|^2=\sum_j\frac{1}{|\lambda|^{2j}}$ yakınsamayacaktır yani $|a\rangle\in\mathbb{C}^\infty$ bu nedenle $T_r-\lambda 1$, onto değildir.

$\sigma(T_r)=\{\lambda\in\mathbb{C} \mid 0<|\lambda|\leq 1\}$ sonucuna varırız.

Sonlu boyutlu durumun sonucunu $\mathbb{C}^\infty$ a genişletebilseydik, büyüklüğü en fazla 1 olan tüm kompleks sayılar T_r'nin özdeğerleri olurdu sonucuna varırdık.

Ancak şu tartışma, T_r'nin hiç özdeğeri olmadığını gösterir: Varsayalım ki λ, T_r'nin bir özdeğeridir, $T_r|a\rangle=\lambda|a\rangle$ olsun. T_r bir vektörün uzunluğunu korumasından $\langle a|a\rangle=\langle T_r a|T_r a\rangle=\langle\lambda a|\lambda a\rangle=|\lambda|^2\langle a|a\rangle$ $\Rightarrow |\lambda|=1$. $|a\rangle=\{|\alpha_i\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ yazalım ve α_m bu dizinin ilk sıfırdan farklı terimi olsun. O zaman

$$0=\langle T_r a|e_m\rangle=\langle\lambda a|e_m\rangle=\lambda\alpha_m$$

olduğundan $\alpha_m=0$ olmalı, bu ise çelişkidir.

16.4. Kompakt kümeler:

$\mathbb{R}$ de sonlu bir aralık düşünelim: (a,b) açık aralığı kompaktmıdır? İç güdü **evet** diyor, ancak, şu tartışma buna kompakt dememek uygun olmadığını söyler:

$\varphi : \mathbb{R} \to (a,b)$, $\varphi(t) = \frac{b-a}{2}(\tanh t) + \frac{b+a}{2}$ gönderimi sürekli ve bijektiftir. Böylece, $\mathbb{R}$ nin tümünü 1-1 olacak şekilde (a,b) üstüne sürekli olarak gönderebiliriz. Bu (a,b) yi $\mathbb{R}$ ye benzetir (homeomorfik). Bu aralığı kompakt yapmak için nasıl değiştirebiliriz? Açık yol uç noktaları eklemektir: $[a,b]$ kompakttır.

16.4.1. Tanım: Normlanmış bir V vektör uzayında $|x\rangle$ merkezli ve r yarıçaplı açık bir $B_r(x)$ küre top V içinde $|x\rangle$ den olan uzaklığı r den kesinlikle küçük olan tüm vektörlerin kümesidir.

$$B_r(x) \equiv \{ |y\rangle \in V \mid \|y-x\| < r \}$$

$B_r(x)$: $|x\rangle$ in açık bir yuvar komşuluğudur. Bu açık aralığın bir genellemesidir. Çünkü

$$(a,b) = \left\{ y \in \mathbb{R} \;\middle|\; \left|y - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{b-a}{2} \right\}$$

Örnek: Sonlu boyutlu normlanmış uzayların bir prototipi $\mathbb{R}^n$ dir. $\bar{x}$'de merkezlenmiş r yarıçaplı bir açık küre

$$B_r(\bar{x}) = \{ \bar{y} \in \mathbb{R} \mid (y_1-x_1)^2 + \dots + (y_n-x_n)^2 < r^2 \}$$

Böylece, xy-düzleminde, bir çemberin içindeki tüm noktalar açık bir küre belirtmektir

BS K

16.4.3. Tanım : Normlanmış bir vektör uzayının sınırlı bir alt kümesi, sonlu yarıçaplı bir açık küre içinde çevrelenebilen bir alt kümedir. Örneğin, bir kağıt parçasına çizilen herhangi bir bölge $\mathbb{R}^2$ nin sınırlı bir altkümesidir.

16.4.4 Tanım ; Normlanmış bir V vektör uzayının bir O altkümesi açıktır denir, eğer noktalarının (vektörler) herbirinin tümüyle O içinde bulunan açık yuvarlak (~~[illegible]~~) bir komşuluğu varsa. O nun bir sınır noktası O nun içinde ve dışındaki [tüm noktaları içeren V deki bir nokta (vektör) dür.
açık yuvarlak komşuluklarının hepsi

V nin kapalı bir C altkümesi, bütün sınır noktalarını içeren bir altkümedir. Bir S altkümesinin kapanışı (closure), S nin ve onun sınır noktalarının hepsinin birleşimidir, ve $\bar{S}$ ile gösterilir.

Sözgelimi, kağıt üstüne çizilmiş bir bölgenin sınırı, onun sınır noktalarının tümünden ibarettir. Her nokta kendi sınırıdır. Bir sınır daima kapalı bir kümedir. Özellikle, bir nokta kapalı bir kümedir. Genelde açık bir küme herhangi sınır noktalarını içermez.

16.4.5 Tanım : Normlanmış bir V vektör uzayının bir W altkümesi, V içinde yoğundur eğer W nin kapanışı tüm V uzayı ise. ($\overline{W}=V$) Ondan olarak, W yoğundur, eğer W deki her vektör V deki en az bir vektöre sonsuz küçük olarak yakınsa. Diğer bir deyimle, herhangi bir $|u\rangle \in V$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş iken $\|u-w\| < \epsilon$ olacak şekilde bir $|w\rangle \in W$ vardır, yani, V deki

BS K

herhangi bir vektör, keyfi bir duyarlılıkla, W deki bir vektör ile yaklaştırılabilir.

Yoğun uzayların bir örneği, reel sayıların normlanmış vektör uzayında rasyonel sayılar kümesidir. Herhangi bir gerçel sayı yeterli duyarlılıkta bir rasyonel sayı ile yaklaştırılabilir. Gerçel sayıların decimal temsili böyle bir yaklaştırmadır. Yoğunluğu tasavvur etmenin bir yolu, sonsuz altkümenin, kümenin kendi kapanışına eşit olduğu ve onun elemanlarının kümede her yerde yoğun bir şekilde dağıldığıdır.

16.4.6. **Öneri**: $f: \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ sürekli olsun. O zaman $\mathcal{H}_2$ nin açık (kapalı) bir altkümesinin ters görüntüsü, $\mathcal{H}_1$'in açık (kapalı) " altkümesidir.

Sınırlı T operatörünün resolvent kümesini alalım. İddia ediyorum ki <u>bu küme $\mathbb{C}$ içinde açıktır</u>. Bunu görmek için $\lambda \in \rho(T)$ ise $T-\lambda 1$ in terslenebilir olduğuna dikkat ediniz. Öte yandan, terslenebilir bir operatöre yakın operatörler terslenebilir (prs 16.1). Böylece, yeterince küçük pozitif bir ϵ sayısı seçersek ve λ dan ϵ uzaklığındaki tüm μ kompleks sayılarını ele alırsak, O zaman $T-\mu 1$ biçimindeki tüm op. ler, terslenebilir yani $\mu \in \rho(T)$. Bu nedenle herhangi $\lambda \in \rho(T)$ kompleks düzlemde açık bir yuvar komşuluğuna sahiptir. Bu, resolvent kümenin açık olduğunu gösterir. Özellikle bu herhangi sınır noktaları içermez. Ancak $\rho(T)$ ve $\sigma(T)$ ortak bir sınırla ayrılmalıdır. $\rho(T)$ herhangi bir sınır nokta

BS K

içermediğinden, $\sigma(T)$ [redacted] tamamındadır. Bu, $\sigma(T)$ nın $\mathbb{C}$'nin kapalı bir altkümesi olduğunu gösterir. $\sigma(T)$ nin de sınırlı olduğunu hatırlayarak, şu sonuca varırız.

16.4.7. <u>Öneri</u>: Herhangi $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{X})$ için $\rho(T)$ kümesi $\mathbb{C}$ nin açık bir altkümesidir, ve $\sigma(T)$, $\mathbb{C}$ nin kapalı, sınırlı bir alt kümesidir.

Kompaktlık kavramına dönelim. Genelleştirme için en uygun kapalı $[a,b]$ aralığının özelliği, bu aralıkta uzanan sayıların, sonsuz dizisinin davranışıdır. Daha açıkça, $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$, $[a,b]$ aralığında uzanan sonsuz derecede çok reel sayıların bir dizisi olsun. Sezgisel olarak açıktır ki, noktaların herbirinden uzak kalmaları için yeterli yer olmadığından, aralıktaki noktalar bir sayının civarında toplanacaklardır. Örneğin, $[-1,+1]$ aralığındaki

$$\left\{(-1)^n \frac{2n+1}{4n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{-\frac{3}{4}, \frac{5}{8}, -\frac{7}{12}, \frac{9}{16}, \ldots\right\}$$

serisi $-1/2$ ve $+1/2$ noktaları civarında toplanacaktır. Gerçekten, çift n li noktalar $+1/2$, tek n li noktalar $-1/2$ civarında yığılırlar. $\mathbb{R}$ nin tüm kapalı aralıklarının bu özelliğe sahip olduğu, yani tüm dizilerin bazı noktalar civarında toplanacağı sonucu çıkar. Açık aralığın bu özelliğe sahip olmadığını görmek için $(0,1)$ aralığını alalım.

$\left\{ \frac{1}{2n+1} \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ 1/3, 1/5, \dots \right\}$ dizisi açılacak sadece

0 civarında toplanır ki aralığın bir noktası değildir. Ancak, açık aralığında kompakt olmadığını söylüyorum.

16.4.8. Tanım (Bolzano-Weierstrass özelliği) Normlanmış bir vektör uzayının bir K alt kümesi kompakt olarak adlandırılır eğer K daki her (sonsuz) dizi yakınsak bir altdiziye sahipse.

16.4.9. Teorem: (BWHB) Heine Borel $\mathbb{R}^n$ nin bir alt kümesi kompakttır svs kapalı ve sınırlı ise.

16.4.10 Kutu: Sınırlı bir lineer op. ün spektrumu $\mathbb{C}$ nin kompakt bir alt kümesidir

BWHB teoreminin hemen bir sonucu: $\mathbb{R}^n$ nin her sınırlı altkümesi kompakt bir kaplama sahiptir $\mathbb{R}^n$ (normlanmış) tüm sonlu boyutlu vektör uzaylarının bir prototipi olduğundan aynı ifade böyle tüm vektör uzayları için doğrudur. İlginç olan şudur ki, bu ifade gerçekten normlanmış uzayı karakterize eder:

16.4.11 Teorem: Normlanmış bir vekt. uzayı sonlu boyutludur svs her sınırlı alt kümesi kompakt bir kaplama sahipse.

Bu sonuç, normlanmış bir vekt. uzayının alt uzaylarına da uygulanabilir. Normlanmış bir V vektör uzayının bir W altuzayı sonlu boyutludur, svs W'nin her sınırlı altkümesi W içerisinde kompakt bir kaplamaya sahiptir. Bu özelliğin tam bir versiyonu noktalar (vektörler) dizisi cinsinden ifade edilebilir:

16.4.12 Teorem: Normlanmış bir V vekt. uzayının bir W alt-uzayı, sonlu boyutludur svs W deki her sınırlı dizi, W deki yakınsak bir altdiziye sahiptir.

16.4.13. Önerme: W, $\mathcal{H}$'nin kapalı bir has altuzayı ve δ ($0 \leq \delta < 1$) herhangi bir non-negatif sayı olsun. O zaman,

$$\| x - v_0 \| \geq \delta \quad \forall |x\rangle \in W$$

olacak şekilde bir birim vektör $|v_0\rangle \in \mathcal{H}$ vardır.

İspat: $\mathcal{H}$ de olan, ancak W de olmayan bir $|v\rangle$ vektörü seçelim, ve

$$d = \inf \{ \| v - x \| \mid |x\rangle \in W \} \text{ olsun.}$$

$d > 0$ olduğunu iddia ediyoruz. Bunu göstermek için tersini varsayalım.

O zaman her bir ($n \in \mathbb{N}$) n ve (gösterimde W, $\mathcal{H}$) ϵ için $\{|x_n\rangle\}$ farklı vektörleri bulabiliriz:

→ $|v\rangle$ den olan uzaklığı $\frac{\epsilon}{n}$

→ $\{|x_n\rangle\}$ dizisi limit olarak $|v\rangle$ ye sahip olacaktır.

W nın kapalı $\ni |v\rangle$, W içindedir $\Rightarrow$ çelişki, $d >$

BS K

Şimdi herhangi $|x_0\rangle \in V$ için

$$|u\rangle \equiv |x\rangle - \frac{|v\rangle - |x_0\rangle}{\| v - x_0 \|} = \frac{(\overbrace{\| v - x_0 \| |x\rangle + |x_0\rangle}^{\in V}) - |v\rangle}{\| v - x_0 \|}$$

olsun ve d nin tanımından payın normu d den daha büyüktür. Bu nedenle her $|x\rangle$, $|x_0\rangle \in V$ için $\|u\| \geq \frac{1}{\| v - x_0 \|}$

$|x_0\rangle$, $\| v - x_0 \| < d\,\delta^{-1}$ olacak şekilde seçilirse ($d\,\delta^{-1} > d$ olduğundan bu mümkündür)

tüm $|x\rangle \in V$ için $\|u\| \geq \delta$ dır.

Şimdi, $|v_0\rangle = \frac{(|v\rangle - |x_0\rangle)}{\| v - x_0 \|}$ olsun

$\square$

16.5. Kompakt Operatörler:

K, $\mathcal{H}_1$ içinde kompakt bir küme ve $f: \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ sürekli ise, o zaman $f(K)$, $\mathcal{H}_2$ içinde kompakttır. Tüm sınırlı op. ler sürekli olduğundan, bütün sınırlı op. ler kompakt alt kümeleri kompakt altkümelere gönderir sonucunu verir. $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ nin özel bir altkümesi önemlidir.

16.5.1. Tanım: Bir $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ op. u kompakt op. olarak adlandırılır eğer o, $\mathcal{H}_1$'in sınırlı bir altkümesini, $\mathcal{H}_2$ nin kompakt bir altkümesine gönderirse

BS K

Fonk. uzayları ile ilgilenmeyişimizden fonk. dizileri ile ilgilenmek, fonksiyon uzayının altkümeleri ile ilgilenmekten daha kolay olduğundan kompakt op. ların tanımını altkümeler yerine diziler cinsinden almayı daha faydalı buluyorum.

Teorem 16.5.2. Bir $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ op. ü kompakttır $\Leftrightarrow$ $\mathcal{H}_1$ deki herhangi bir $\{|x_n\rangle\}$ sınırlı dizisi için $\{K|x_n\rangle\}$ dizisinin $\mathcal{H}_2$ de yakınsak bir alt dizisi varsa.

16.5.3. Örnek: $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında sınırlı op. lar kümesi $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ele alalım. Eğer, K bir kompakt op., T bir sınırlı op. ise, KT ve TK kompakttır. Çünkü, $\{|x_n\rangle\}$ sınırlı bir dizi ise, $\{T|x_n\rangle \equiv |y_n\rangle\}$ de böyledir, ve K kompakt olduğundan, $\{K|y_n\rangle = KT|x_n\rangle\}$ yakınsak bir alt diziye sahiptir.

K, sınırlı kümeleri kompakt kümelere gönderir. T, süreklidir ve kompakt küme üzerine gönderir. Bu özelliğin özel bir durumu olarak, iki kompakt op. ün çarpımının kompakt olduğuna dikkat edelim. Benzer şekilde, kompakt op. ların herhangi lineer bileşimi kompakttır. Böylece, bir kompakt op. ün herhangi bir polinomu da kompakttır. Özellikle,

$$(1-K)^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!}(-K)^j \equiv 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!}(-K)^j \equiv 1 - K_n$$

burada K_n bir kompakt op. dür.

16.5.4. Tanım: Bir $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ op.ü sonlu rank op.ü olarak adlandırılır eğer onun değer kümesi (range) sonlu boyutlu ise.

16.5.5. Önerme: Sonlu rank op.ü kompakttır. Özellikle, sonlu boyutlu vektör uzayının her lineer dönüşümü kompakttır.

16.5.6. Teorem: Eğer, $\{K_l\} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ ler kompakt ise, o zaman, K kompakttır.

İspat: $\{|x_n\rangle\}$, $\mathcal{H}_1$ de sınırlı bir dizi olsun.

$\{K_1|x_{m_1}\rangle\}$ yakınsak altdizi olsun (K_1 in kompaktlığı ile garantilenmiş). Şimdi, $\{|x_{m_1}\rangle\}$, $\mathcal{H}_1$ de sınırlı bir dizidir. Bu nedenle onun, $\{K_2|x_{m_2}\rangle\}$ yakınsak olacak şekilde bir $\{|x_{m_2}\rangle\}$ altdizisi vardır. $\{K_1|x_{m_2}\rangle\}$ de yakınsaktır. Bu süreci sürdürerek,

$$\{|x_{m_1}\rangle\},\ \{|x_{m_2}\rangle\},\ \ldots,\ \{|x_{m_k}\rangle\}$$

diziler dizisi kurarız, burada her dizi, ondan önceki bütün dizilerin bir altdizisidir. Dahası, $l=1,2,\ldots,k$ için tüm $\{K_l|x_{m_k}\rangle\}$ dizileri yakınsaktır.

Özellikle, eğer $\{|y_m\rangle\} \equiv \{|x_{m_m}\rangle\}$ köşegen dizisini seçersek, o zaman herhangi $l \in \mathbb{N}$ için $\{K_l|y_m\rangle\}$ dizisi $\mathcal{H}_2$ de yakınsar. K nın kompakt olduğunu göstermek için $\{K|y_m\rangle\}$ yakınsak olacak şekilde

$\{|y_m\rangle\}$ nin $\{|x_m\rangle\}$ nin altdizisi olduğunu kurabiliriz.

$\mathcal{H}$ tam olduğundan, $\{K|y_m\rangle\}$ nin Cauchy olduğunu göstermek yeterlidir.

$$K|y_m\rangle - K|y_n\rangle = K|y_m\rangle - K_\ell|y_m\rangle + K_\ell|y_m\rangle - K_\ell|y_n\rangle + K_\ell|y_n\rangle - K|y_n\rangle$$

yazarız ve üçgen eşitsizliğini kullanırız.

$$\|Ky_m - Ky_n\| \leq \|Ky_m - K_\ell y_m\| + \|K_\ell y_m - K_\ell y_n\| + \|K_\ell y_n - K y_n\|$$

ℓ, m ve n leri yeterince büyük seçerek RHS deki her terimi $\epsilon/3$ den daha küçük yapabiliriz, 1 ve 3. leri $K_\ell \to K$, 2.si $\{K_\ell|y_n\rangle\}$ yakınsak bir dizidir. $\square$

Hatırlatma: $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ ortonormal baz verilmişken, $\mathcal{H}$ Hilbert uzayındaki herhangi bir T op. ü $\sum_{i,j=1}^{\infty} c_{ij}|e_i\rangle\langle e_j|$ olarak yazılabilir, burada $c_{ij} = \langle e_i|T|e_j\rangle$. Şimdi K bir kompakt op. olsun ve

$$K_n = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\,|e_i\rangle\langle e_j| \qquad c_{ij} = \langle e_i|K|e_j\rangle$$

sonlu rank op. leri de alalım

BS K

Açıkça, $\|K - K_n\| \to 0$. $\{K_n^+\}$ de sonlu ranklıdır, yani kompakttır.

16.5.7. Teorem : K bir kompakt op. ise onun K^+ böyle idi.

16.5.8. Tanım : $\mathcal{H}$ bir Hilbert uzayı ve $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ bir ortonormal baz olsun. Bir $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ op.'ü Hilbert-Schmidt olarak adlandırılır eğer

$$tr(T^+T) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i | T^+T | e_i \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle Te_i | Te_i \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \| Te_i \|^2 < \infty \text{ ise}$$

16.5.9. Teorem : Hilbert-Schmidt op.'ler kompakttır.

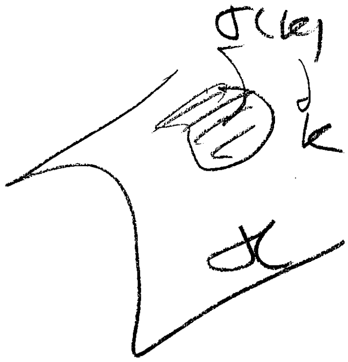
16.5.10. Örnek : Kompakt bir op.'e örnek

$\int_a^b K(x,y) w(y) u(y) dy = f(x)$ (16.?) de $w(y) = 1$ ve $|u\rangle \in \mathcal{L}^2(a,b)$ varsayalım. $K(x,y)$ fonk.'u xy-düzleminde (yani de $\mathbb{R}^2$), $[a,b] \times [a,b]$ kapalı dikdörtgeninde sürekli olsun. Bu koşullar altında $K(x,y)$ HS çekirdeği olarak adlandırılır. Şimdi K'nın kompakt olduğunu göstereceğiz. K'nın sürekliliğinden $\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dx dy < \infty$ K^+K'nın izini hesaplayalım. $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{\infty}$, $\mathcal{L}^2(a,b)$'nin herhangi bir ortonormal baz olsun. O zaman,

BS K

$$\mathrm{Tr}(K^+K) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i | K^+K | e_i \rangle$$

16.6. Kompakt Operatörlerin Spektrumu:



Şimdiki amacımız, bir $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı üzerinde bir K kompakt op. için $\sigma(K)$ spektrumunu incelemektir. Özellikle, kompakt op.ların özvektörleri ve özdeğerleri bizim ile ilgilenmiyoruz. Hatırlayalım ki, sonlu boyutlu bir vektör uzayının üzerinde bir op.ün her özdeğeri onun spektrumu içindedir ve spektrumun her noktası bir özdeğerdir. Genelde 2. ifade doğru değildir. Gerçekten gördük ki sağ kaydırma op.nün hiç bir özdeğeri yoktur, ancak onun spektrumu kompleks düzlemin tüm birim diski idi.

Önce, $0 \in \sigma(K)$ olduğunu gözleyin, çünkü aksi takdirde $0 \in \rho(K)$ dır ve bu da $K = K - 0I$ 'ın terslenebilir ve K^{-1} tersine sahip olduğunu söyler.

İki kompakt op.'un çarpımı kompakttır. Bu bir çelişkiye götürür, çünkü birim op. kompakt olamaz: O sınırlı bir diziyi kendisine gönderir, yakınsak bir altdizili diziye değil.

16.6.1 Önerme: Sonsuz boyutlu bir Hilbert uzayı üzerinde herhangi bir kompakt $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ op.ü için, $0 \in \sigma(K)$ vardır.

BS K

İlerlemek için dikkat ederiz ki λ özdeğerine karşılık gelen K nın özvektörleri $K-\lambda 1$ in "null space" ine aittir. Böylece,

$$\mathcal{N}_\lambda \equiv \ker(K-\lambda 1) \qquad \mathcal{R}_\lambda \equiv \text{Range}(K-\lambda 1)$$

$$\mathcal{N}_\lambda^{+} \equiv \ker(K^{+}-\lambda^{*} 1) \qquad \mathcal{R}_\lambda^{+} = \text{Range}(K^{+}-\lambda^{*} 1)$$

<u>16.6.7. Teorem</u>: $\mathcal{N}_\lambda$ ve $\mathcal{N}_\lambda^{+}$ $\mathcal{H}$ nın sonlu boyutlu birer altuzaylarıdır. Dahası, $\mathcal{R}_\lambda^{\perp} = \mathcal{N}_\lambda^{+}$

<u>İspat</u>: Teorem 16.4.12 yi kullanırız. $\{|x_n\rangle\}$, $\mathcal{N}_\lambda$ içinde sınırlı bir dizi olsun. K kompakt olduğundan, $\{K|x_n\rangle = \lambda|x_n\rangle\}$ yakınsak bir altdiziye sahiptir. Böylece $\{|x_n\rangle\}$ nin yakınsak bir altdizisi vardır. Bu altdizi, $\mathcal{N}_\lambda$ içinde bir vektöre yakınsayacaktır eğer, bu sonuncusu kapalı ise. Ancak bu, Önerme 16.4.1, $K-\lambda 1$ in süreklilifinden, $\mathcal{N}_\lambda$ nın sıfır vektörün ters görüntüsü olması olgusundan ve bir uzayın herhangi bir tek noktasının ($\vec{O}$ vektörü gibi) kapalı bir alt küme olması olgusundan çıkar. $\mathcal{N}_\lambda^{+}$ nın sonlu boyutluluğu K^{+} nın kompaktlığından önceki tartışmada olduğu gibi çıkar.

2. ifadeyi göstermek için, herhangi bir sınırlı T op. i için şunu gözleriz:

$|u\rangle \in T(\mathcal{H})^{\perp}$ $\underline{\text{svs}}$ $\langle u|v\rangle = 0$ tüm $|v\rangle \in T(\mathcal{H})$ için svs $\langle u | T x \rangle = 0$ tüm $|x\rangle \in \mathcal{H}$ için svs

$\langle T^\dagger u | x \rangle = 0$ tüm $|x\rangle \in \mathcal{H}$ için svs

$T^\dagger |u\rangle = 0$ svs $|u\rangle \in \ker T^\dagger$. Bu $T(\mathcal{H})^\perp = \ker T^\dagger$

olduğunu gösterir. Arzulanan sonuç, $T = K - \lambda 1$ alınarak ve $(W^\perp)^\perp = W$ olduğuna dikkat ederek (W, bir Hilbert uzayının herhangi bir altuzayı) elde edilir.

$\square$

Dikkat edelim ki : W_λ, λ özdeğerine karşılık gelen K nın özuzayıdır. Ancak, olabilir ki 0, $\sigma(K)$ daki tek sayıdır. Sonlu boyutlu vektör uzayında bu, op. ların matris temsillerinin köşegen hale getirilemediğini söyler. Bunun için genelleştirilmiş özvektörlere bakarız.

BS K

16.6.3. Tanım: Bir $|u\rangle$ vektörü, K'nın m. mertebeden genelleştirilmiş bir özvektörü'dür eğer, $(K-\lambda 1)^{m-1}|u\rangle \neq 0$ ancak, $(K-\lambda 1)^m |u\rangle = 0$ ise. Böyle vektörler kümesi, yani, $(K-\lambda 1)^m$ nin "null uzayı", $\mathcal{N}_\lambda^{(m)}$ ile gösterilecektir. Açıktır ki

$$\{0\} \equiv \mathcal{N}_\lambda^{(0)} \subseteq \mathcal{N}_\lambda \equiv \mathcal{N}_\lambda^{(1)} \subseteq \mathcal{N}_\lambda^{(2)} \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{N}_\lambda^{(m)} \subseteq \mathcal{N}_\lambda^{(m+1)}$$

ve herbir $\mathcal{N}_\lambda^{(m)}$, $\mathcal{H}$ nin bir altuzayıdır. Genelde, büyük indisli bir altuzay, küçük indisli olandan daha büyüktür. Yukarıdaki zincirde bir halkasında bir eşitlik vuku bulursa, o zaman bu eşitlik ~~sağ~~ sonsuza kadar devam eder. Bunu görmek için, eşitliğin olduğu ilk yeri p olsun, ve keyfi olarak $n > p$ olsun. Varsayalım ki $|u\rangle \in \mathcal{N}_\lambda^{(n+1)}$.
O zaman $(K-\lambda 1)^{p+1}\left[(K-\lambda 1)^{n-p}|u\rangle\right] = (K-\lambda 1)^{n+1}|u\rangle = 0$

Buradan, $(K-\lambda 1)^{n-p}|u\rangle$ nın $\underline{\underline{\mathcal{N}_\lambda^{(p+1)}}}$ içinde olduğu çıkar. Ancak, $\mathcal{N}_\lambda^{(p)} = \mathcal{N}_\lambda^{(p+1)}$

Böylece, $(K-\lambda 1)^n |u\rangle = (K-\lambda 1)^p \left[(K-\lambda 1)^{n-p}|u\rangle\right] = 0$

$\mathcal{N}_\lambda^{(n+1)}$ deki her vektör $\mathcal{N}_\lambda^{(n)}$ içindedir de. Bu olgu ve yukarıdaki zincir tüm $n > p$ için

$\mathcal{N}_\lambda^{(n)} = \mathcal{N}_\lambda^{(n+1)}$ olduğunu söyler

BS K

16.6.4. Teorem: $\mathcal{N}_\lambda^{(n)}$ alt uzayı, her bir n için sonlu boyutludur. Dahası, bir p tamsayısı vardır, öyleki

$$\mathcal{N}_\lambda^{(n)} \neq \mathcal{N}_\lambda^{(n+1)} \qquad n=0,1,2,\dots,p-1 \text{ için}$$

ancak

$$\mathcal{N}_\lambda^{(n)} = \mathcal{N}_\lambda^{(n+1)} \qquad \text{tüm } n \geq p \text{ için}$$

İspat: İlk kısım için,

$$(K-\lambda 1)^n = K_n - \lambda^n 1 \qquad (K_n: \text{kompakt})$$

olduğunu görmek için, Örn 16.5.3 ün sonucunu kullanırız. Şimdi, teorem 16.6.2 nin ispatını K_n için tekrar ederiz.

~~Eğer~~ p tamsayısı mevcut ise, teoremin 2. kısmı, önceki teoremin tartışmasından çıkar. p nin varlığını göstermek için, tersine varsayalım ki her pozitif n tamsayısı için $\mathcal{N}_\lambda^{(n)} \neq \mathcal{N}_\lambda^{(n+1)}$ dir. Bu demektir ki, her n için $\mathcal{N}_\lambda^{(n)}$ de olmayan bir (birim) vektör $|v_n\rangle \in \mathcal{N}_\lambda^{(n+1)}$ bulunabilir ve 16.4.13 önermesinden bu

$$\| v_n - w \| \geq 1/2 \qquad \forall\, |w\rangle \in \mathcal{N}_\lambda^{(n)}$$

özelliğine sahiptir. Böylece bir $\{|v_n\rangle\}$ sınırlı dizisi elde ederiz. K yı bu diziye uygulayalım. $j > l \ni$, o zaman $|v_j\rangle$ nin kuruluşundan ve $\mathcal{N}_\lambda^{(l+1)} \subseteq \mathcal{N}_\lambda^{(j+1)}$ olgusundan

$$(|v_j\rangle - |v_l\rangle) \in \mathcal{N}_\lambda^{(j+1)}$$

olur. Dahası,

BS K

$$(K-\lambda 1)^j \left[(K-\lambda 1)\left(|v_j\rangle - |v_\ell\rangle \right) \right] = (K-\lambda 1)^{j+1} \left(|v_j\rangle - |v_\ell\rangle \right) = 0$$

ancak $\mathcal{N}_\lambda^{j+1}$ in tanımından,

$$(K-\lambda 1)^{j+1} \left[(K-\lambda 1)\left(|v_j\rangle - |v_\ell\rangle \right) \right] = (K-\lambda 1)^{j} \left(|v_j\rangle - |v_\ell\rangle \right) \neq 0$$

Bu yüzden,

$$(K-\lambda 1)\left(|v_j\rangle - |v_\ell\rangle \right) \in \mathcal{N}_\lambda^{(j)}$$

Şimdi

$$K|v_j\rangle - K|v_\ell\rangle = \lambda \left\{ \overbrace{\frac{1}{\lambda}(K-\lambda 1)|v_j\rangle}^{\in \mathcal{N}_\lambda^{(j)}} - \underbrace{\frac{1}{\lambda}(K-\lambda 1)|v_\ell\rangle}_{\in \mathcal{N}_\lambda^{(\ell)}} + |v_j\rangle - |v_\ell\rangle \right\}$$

$\in \mathcal{N}_\lambda^{(j+1)}$

$\notin \mathcal{N}_\lambda^{(j-1)}$

Öneri 16.4.13 den kırık parantezdeki vektörün normu 1/2 den büyüktür. Böylece, $\| K|v_j\rangle - K|v_\ell\rangle \| \geq \lambda/2$ yani j ve ℓ ler keyfi olduğundan, $\{K|v_n\rangle\}$ dizisinin yakınsak bir altdizisi yoktur. Bu K nın kompakt olduğu olgusu ile çelişir. Böylece bir p mevcut olmalı öyle ki $\mathcal{N}_\lambda^{(p)} = \mathcal{N}_\lambda^{(p+1)}$ ∎

$K-\lambda 1$ in çeşitli kuvvetlerinin "range" ine de ihtiyaç duyarız. Böylece, $\mathcal{R}_\lambda^{(n)} = \text{Range}\,(K-\lambda 1)^n$ olsun. gösterilebilir ki

$$\mathcal{H} = \mathcal{R}_\lambda^{(0)} \supseteq \mathcal{R}_\lambda^{(1)} \supseteq \cdots \mathcal{R}_\lambda^{(n)} \supseteq \mathcal{R}_\lambda^{(n+1)} \supseteq \cdots$$

16.6.5. teorem : Her bir $\mathcal{R}_\lambda^{(n)}$, $\mathcal{H}$ nın bir altuzayıdır.

Dahası, bir q tamsayısı vardır öyle ki $\mathcal{R}_\lambda^{(n)} \neq \mathcal{R}_\lambda^{(n+1)}$ $n=0,1,2,\ldots$ ... $q-1$ için ancak $\mathcal{R}_\lambda^{(n)} = \mathcal{R}_\lambda^{(n+1)}$ tüm $n \geq q$ için.

16.6.6. teorem: q, teorem ~~16.6.5~~ in tamsayısı olsun. O zaman,

1. $\mathcal{H} = \mathcal{N}_\lambda^{(q)} \oplus \mathcal{R}_\lambda^{(q)}$

2. $\mathcal{N}_\lambda^{(q)}$ ve $\mathcal{R}_\lambda^{(q)}$ lar K nın invaryant altuzaylarıdır.

3. $K-\lambda I$ yı sıfıra gönderen $\mathcal{R}_\lambda^{(q)}$ daki tek vektör, sıfır vektörü'dür. Gerçekten, $\mathcal{R}_\lambda^{(q)}$ ye sınırlandığında, $K-\lambda I$ op. ü terslenebilir.

16.6.7. Sonuç: Trm 16.6.4 ve 16.6.5 de sunulan p ve q tamsayıları eşittir.

16.6.8 Lemma. $K_\lambda : \mathcal{R}_\lambda^{(q)} \to \mathcal{R}_\lambda^{(q)}$, K nın $\mathcal{R}_\lambda^{(q)}$ ya sınırlaması olsun. O zaman,

1.) $\sigma(K)$ 'nın herbir sıfır olmayan noktası, özuzayı sonlu boyutlu olan K nın bir özdeğeridir.

2) $\sigma(K_\lambda) = \sigma(K)$

3) $\sigma(K)$ daki her sonsuz dizi sıfıra yakınsar.

İspat. 1) $\lambda \neq 0$, K nın bir özdeğeri değil ise $K-\lambda I$ in "Null uzayı" sıfırdır.

Bu, $\{0\} = \mathcal{N}_\lambda^{(0)} = \mathcal{N}_\lambda^{(1)} = \dots$ yani $p=q=0$ olduğunu söyler. teorem 16.6.6 dan $\mathcal{H} = \mathcal{N}_\lambda^{(0)} \oplus \mathcal{R}_\lambda^{(0)} = \mathcal{R}_\lambda^{(1)}$ sonucunu çıkarırız. Bu yüzden, $K-\lambda 1$ örtendir. teorem 16.6.6 nın 3. kısmı, $K-\lambda 1$ in 1-1 olduğunu gösterir. Böylece, $K-\lambda 1$ terslenebilir ve $\lambda \in \rho(K)$ Böylece, $\lambda \notin \sigma(K)$

2) Açıkça, $\sigma(K_\lambda) \subseteq \sigma(K)$

bunun tersini göstermek için $\mathcal{X}_\lambda^{(q)}$ nın sonsuz boyutlu olduğuna dikkat ediniz, çünkü $\mathcal{N}_\lambda^{(q)}$ sonlu boyutludur. Şimdi μ ($\neq 0$ ve $\neq \lambda$) $\sigma(K)$ da olsun. (1) den μ, K nın bir özdeğeridir, böylece bir $|u\rangle \in \mathcal{H}$ vektörü vardır öyleki $K|u\rangle = \mu|u\rangle$.

Keza, $(K-\lambda 1)|u\rangle = (\mu-\lambda)|u\rangle$, ya da

$$(K-\lambda 1)^q|u\rangle = (\mu-\lambda)^q|u\rangle \text{ vardır.}$$

Böylece, $(\mu-\lambda)^q|u\rangle$ (ve $|u\rangle$), $\mathcal{R}_\lambda^{(q)}$ içindedir. Bu nedenle, K yı $\mathcal{X}_\lambda^{(q)}$ ya sınırlandırabiliriz, yani $K_\lambda|u\rangle = \mu|u\rangle$ iken $K|u\rangle = \mu|u\rangle$ ya da $(K_\lambda - \mu 1)|u\rangle = 0$ yazabiliriz. Böylece, $\mu \in \sigma(K_\lambda)$. $\sigma(K)$ nın her noktasının $\sigma(K_\lambda)$ nın bir noktası olduğu sonucuna varırız ki:

$$\sigma(K) \subseteq \sigma(K_\lambda) \text{ dır.}$$

3) λ, $\sigma(K) = \sigma(K_\lambda)$ içinde sonsuz bir dizinin limiti olsun. $\lambda \neq 0$ ise $K_\lambda - \lambda 1$ terslenemeyecektir ki bu da $\lambda \in \rho(K_\lambda)$ demektir. $\rho(K_\lambda)$ açık olduğundan, $\rho(K_\lambda)$ içinde λ nın açık

BS K

bir küme kompaktlığını bulabiliriz. Bu, sonsuz bir dizinin bir limitinin özelliğine ters düşer: limitin herhangi bir komşuluğu dizinin diğer noktalarını içerir. Bu nedenle $\lambda \neq 0$, $\sigma(k)$ daki sonsuz bir dizinin limiti olabilir sonucuna varılıyor.

∎

16.6.9 **Teorem** : K, sonsuz boyutlu bir $\mathcal{X}$ Hilbert uzayında kompakt bir op. olsun

1. $0 \in \sigma(K)$
2. $\sigma(K)$ nın her bir sıfır olmayan noktası, özuzayı sonlu boyutlu olan K nın bir özdeğeridir
3. $\sigma(K)$ ya sonlu bir küme ya da sıfıra yakınsayan bir dizidir.

İspat : (1) 16.6.1 önerisinde (2) yukarıdaki 16.6.8 lemmasında gösterildi.

(3) $\sigma_n(K) = \{\lambda \in \sigma(K) \mid |\lambda| \geq \frac{1}{n}\}$ olsun. Açıkça $\sigma_n(K)$ sonlu bir küme olmalıdır, çünkü aksi durumda sonsuz küme bir dizi oluşturmalı ki ($\sigma_n(K)$ nın kompaktlığından) bu da en az bir limit noktaya sahip olmak durumundadır. (2) ci kısmında bu limit 0 olmalıdır, ve bu $\sigma_n(K)$ da içerilmez.

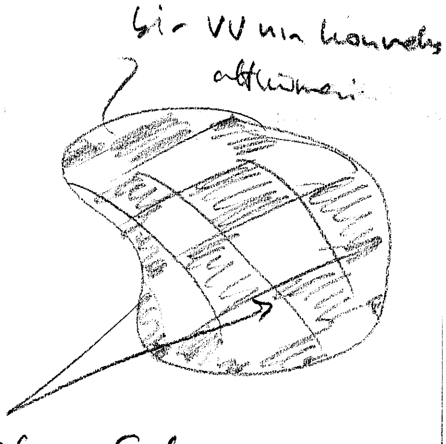
$\sigma_1(K) = \{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$, azalan mutlak değer sırasına göre dizilsin. Sonra, $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots$ ler $\sigma_1(K)$ içinde bulunmayan, $\sigma_2(K)$ nın elemanları olsun ve azalan mutlak değere göre sıralansın. Eğer bu süreç sonlu sayıda bir adımda sonra biterse, $\sigma(K)$ sonludur. Aksi takdirde süreç limiti sıfır olan bir dizi kurmamıza kadar devam eder.

16.7. Kompakt op. ler için spektral teorem.

16.7-1 Tanım : Bir vektör uzayının bir E konveks althümesi, bir vektörler topluluğudur öyleki eğer $|u\rangle$ ve $|v\rangle$, E içinde ise, o zaman $|u\rangle - t(|u\rangle - |v\rangle)$ de tüm $0 \le t \le 1$ için E dedir.

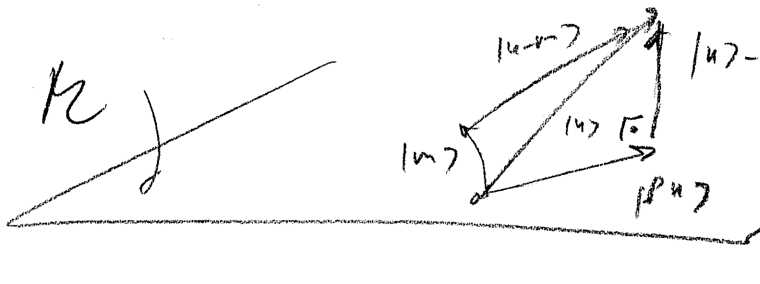
Sezgisel olarak, konveks bir althümenin herhangi iki noktası, tamamiyle bu alt kümede kalan bir doğru parçası ile birleştirilebilir.

E, bir $\mathcal{H}$ Hilbert uzayının konveks bir althümesi (bir alt uzay değil) olsun. Gösterilebilir ki E de minimal normu olan bir (tek = unique) vektör mevcuttur.



$\mathcal{M}$, $\mathcal{H}$ nın bir altuzayı olsun. $\mathcal{H}$ daki keyfi bir $|u\rangle$ vektörü için $E = |u\rangle - \mathcal{M}$ althümesini, yani $|m\rangle \in \mathcal{M}$ iken $|u\rangle - |m\rangle$ biçimindeki tüm vektörleri ele alalım.

$|u\rangle - \mathcal{M}$ nin minimal normlu tek vektörünü $(|u\rangle - |Pu\rangle)$ ile gösterelim, $|Pu\rangle \in \mathcal{M}$ dir. Gösterilebilir ki $|u\rangle - |Pu\rangle$, $|Pu\rangle$ ya dik tir, yani $(|u\rangle - |Pu\rangle) \in \mathcal{M}^\perp$



BS K

Açıkça, sadece 0 (sıfır) vektör, aynı anda $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}^{\perp}$ içinde olabilir. Dahası, $\mathcal{H}$ deki herhangi bir vektör, $|u\rangle = |Pu\rangle + (|u\rangle - |Pu\rangle)$ olarak yazılabilir; burada, $|Pu\rangle \in \mathcal{M}$ ve $(|u\rangle - |Pu\rangle) \in \mathcal{M}^{\perp}$. Bu gösterir ki

$\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$: bir Hilbert uzayı altuzaylarının herhangi biri ve onun dik tümleyenin direkt toplamıdır. Böyle bulunmuş $|Pu\rangle$ vektörü, $|u\rangle$ nun $\mathcal{M}$ ye göre izdüşümüdür.

<u>16.7.2. teorem</u>: Bir izdüşüm op. nün kerneli P, $\ker P$, $\mathcal{H}$ içindeki P nin $P(\mathcal{H})$ değer kümesinin dik tümleyenidir <u>SVS</u> P hermitsel ise.

<u>16.7.3. Lemma</u>: $H \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı üzerinde sınırlı bir hermitsel op. olsun. O zaman $\|H\| = \max \{ |\langle Hx|x\rangle| \mid \|x\| = 1 \}$.

ispat: $|\langle Hx|x\rangle| \leq \|H\| \|x\|^2 = \|H\|$, yani de $M \leq \|H\|$

M RHS tanı pozitif sayı.

<u>16.7.4. Lemma</u> $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ Hermitsel kompakt bir op. olsun. O zaman K nın bir λ özdeğeri vardır öyleki $|\lambda| = \|K\|$

BS K

<u>İspat:</u> $\{|x_n\rangle\}$ birim vektörler dizisi olsun, öyleki

$$\|K\| = \lim |\langle K x_n | x_n \rangle|$$

aşağıdaki tartışmadan görüleceği üzere bu daima mümkündür. ϵ, küçük bir pozitif sayı olsun. Bir $|x_1\rangle \in \mathcal{H}$ birim vektörü mevcut olmalıdır, öyleki

$$\|K\| - \epsilon = |\langle K x_1 | x_1 \rangle|,$$

çünkü aksi takdirde, $\|K\| - \epsilon$ op.'nun normuna eşit ya da ondan büyük olacaktı. (Önceki lemma) Benzer şekilde, başka bir (farklı) birim vektör $|x_2\rangle \in \mathcal{H}$ mevcut olmalıdır, öyle ki

$$\|K\| - \frac{\epsilon}{2} = |\langle K x_2 | x_2 \rangle|$$

Bu yolu sürdürürsek, $\|K\| - \frac{\epsilon}{n} = |\langle K x_n | x_n \rangle|$ özelliğinde olan bir sonsuz birim vektörler kümesi kurarız.

Bu kümeler, açıkça arzulanan diziyi verir. <u>Dikkat</u>: bu tartışma herhangi hermitsel sınırlı bir op. için geçerlidir; kompaktlık gerekli değildir.

Şimdi $\alpha_n \equiv \langle K x_n | x_n \rangle$ tanımlayalım ve $\alpha = \lim \alpha_n$ olsun öyleki $|\alpha| = \|K\|$. K'nın kompaktlığı $\{|K x_n\rangle\}$'nin limiti olsun. O zaman,

$$\|y\| = \lim \|K x_n\| \leq \|K\| \, \|x_n\| = \|K\|$$

öte yandan,

$$0 \leq \|K x_n - \alpha x_n\|^2 = \|K x_n\|^2 - 2\alpha \langle K x_n | x_n \rangle + |\alpha|^2$$

BS K

limiti alır ve α_n ve α ların gerçel olduğuna dikkat edersek

$$0 \leq \lim \|Kx_n\|^2 - 2\alpha \lim \langle Kx_n | x_n \rangle + |\alpha|^2$$

$$= \|y\|^2 - 2\alpha^2 + \alpha^2 \Rightarrow \|y\|^2 \geq \|K\|^2$$

Bu iki eşitsizlikten $\|y\| = \|K\|$ ve $\lim |x_n\rangle = \frac{|y\rangle}{\alpha}$ çıkar dahası

$$(K - \alpha 1)\left(\frac{|y\rangle}{\alpha}\right) = (K - \alpha 1)\left(\lim |x_n\rangle\right)$$

$$= \lim (K - \alpha 1)|x_n\rangle = 0$$

Bu nedenle, α, K nın bir özdeğeridir ve $|y\rangle/\alpha$ da özvektörüdür.

∇

Teorem 16.6.9 un tüm özdeğerlerini mutlak değerce azalan bir şekilde sıralayalım. M_n, λ_n ye karşılık gelen (sonlu boyutlu) özuzayı ve P_n, M_n ye karşılık gelen izdüşümü göstersin. Öz uzaylar çift olarak diktir ve $m \neq n$ için $P_n P_m = 0$ dır. Bu sonlu boyutlu durumdan olarak benzerlikten çıkar.

Önce, varsayalım ki K sadece sonlu sayıda özdeğere sahip olsun,

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_r| > 0$$

BS K $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_r = \sum_{i=1}^{r} \oplus M_i$ olsun ve

M_0, M nin dik tümleyeni olsun. Herbir özuzay K altında invaryant olduğundan, M de böyledir. Bu nedenle, teorem 4.2.3 (sonlu ve sonsuz vektör uzaylar için geçerlidir) e göre ve K nın Hermitsel olduğu olgusundan, M_0 da invaryanttır. K_0, K nın M_0 a kısıtlaması olsun. Lemma 6.7.4. den K_0 ın bir λ özdeğeri vardır, öyle ki $|\lambda| = \|K_0\|$. Eğer $\lambda \neq 0$ ise, bu hesaba katılmış özdeğerlerden biri olmalı, çünkü, K_0 ın herhangi bir özdeğeri, K nın da bir özdeğeridir. Bu imkansızdır çünkü M_0 tüm özuzaylara diktir. Böylece, $\lambda = 0$ ya da $|\lambda| = \|K_0\| = 0$, ya da $K_0 = 0$, yani, K, M_0 üzerinde sıfır op. olarak etkir.

P_0, M_0 üzerinde dik izdüşüm olsun. O zaman, $\mathcal{H} = \sum_{j=0}^{r} \oplus M_j$ ve $1 = \sum_{j=0}^{r} P_j$ ve herhangi bir $|x\rangle \in \mathcal{H}$ için

$$K|x\rangle = K\left(\sum_{j=1} P_j|x\rangle\right) = \sum K(P_j|x\rangle)$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \lambda_j (P_j|x\rangle)$$

elde ederiz. Sonuç $K = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j P_j$

Dikkat: K nın range : $\sum_{j=1}^{r} \oplus M_j$ (sonlu boyutlu) dır.

Böylece, K sonlu ranklı sahiptir.

BS K

Özet :

$\mathcal{H}$. — $\boxed{A|u\rangle = |v\rangle}$

N $\mathcal{V}$

$B = \{|\alpha_i\rangle\}_{i=1}^{N}$

$\downarrow$

$\mathcal{E} = \{|e_i\rangle\}_{i=1}^{N}$

$A_{ij} u_j = v_i$

$\delta_{ij} \lambda_j$

$\Rightarrow \boxed{\lambda_i u_i = v_i}$

$\Downarrow$

$\boxed{\text{SÜREKLİ}}$

$\Rightarrow \quad L(x)\, U(x) = f(x)$

$\mathcal{H}$ uzayında sınırlı op.

sonlu boyutta

N

op $\leftrightarrow$ mat

1-1

Kernel!

$K(x,y)$

Örnek $\mathbb{C}^{\infty}$ $\quad |a\rangle = \{\alpha_i\}_1^{\infty}$

A

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$

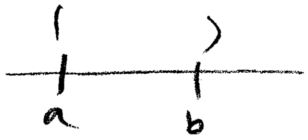
op. normu :

Lineer op. ların spektrumu : $\quad T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

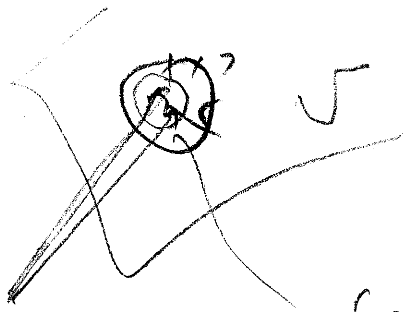
$T - \lambda 1$ op. ü sınırlı ve terslenebilir ise λ kompleks sayısı T nin özdeğeri bir noktasıdır. T nin tüm özdeğer noktalarının kümesine T nin regülant kümesi denir. $\rho(T)$

BS K

$\mathbb{R}$

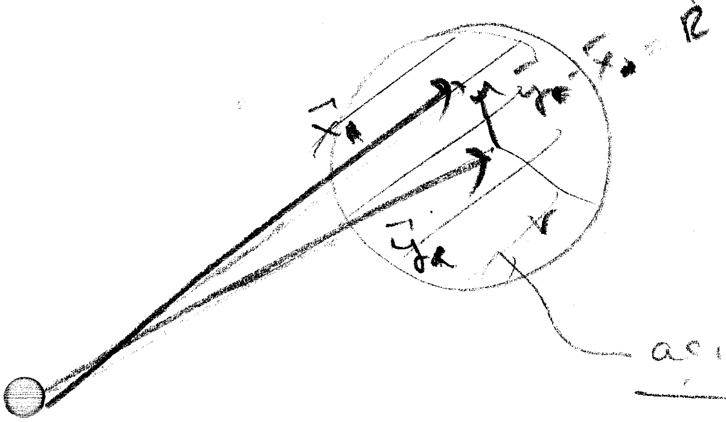


$\varphi : \mathbb{R} \to (a,b) \qquad \varphi(t) = \frac{b-a}{2}\,\mathrm{th}\,t + \frac{b+a}{2}$



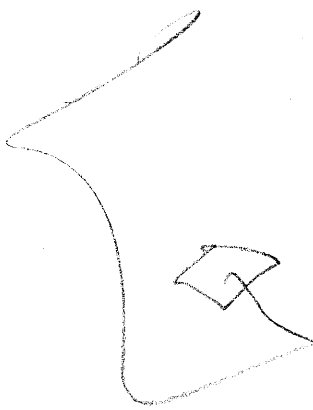
$\|y - x\| < r$

$(a,b) = \{ y \in \mathbb{R}$



$R^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 < r^2$

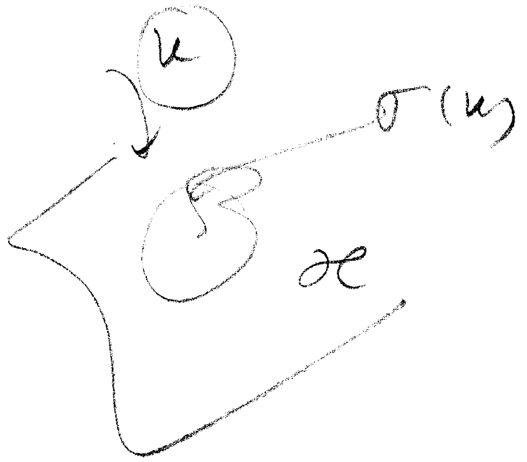
açık küme



normlanmış V

altküme W [illegible] yoğun.

BS K



K: kompakt $\Leftrightarrow$ $\in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ 3

$K : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$

sınırlı altkümeleri — kompakt alt…

açık top tarafından çevrelenebiliyor ise

$\Updownarrow$ BW teorem

K daki her dizi yakınsak bir altdiziye sahiptir

BS K