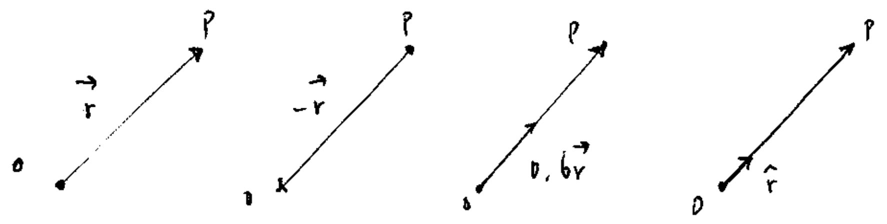
# BÖLÜM 2

# VEKTÖRLER

1. Fizik kanunlarının vektörler cinsinden formülasyonu, koordinat eksenlerinin seçiminden bağımsız,

2. Vektör gösterimi az sözcükle öz bir şekilde anlatımı sağlar.



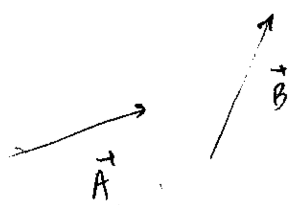

$$\vec{r} = |\vec{r}|\,\hat{r} = r\,\hat{r}$$

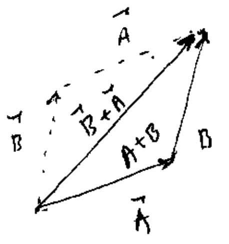
(#) Fiziksel bir kanunun vektörler ile ifadesi, Euklid geometrisinin de kabul edildiği varsayımını içerir. (aç.)

(#) Büyüklük ve yönü olduğu halde vektör olmayan niceliklerde vardır. (aç.)

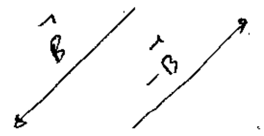
(#) Büyüklüğü olan fakat yönü olmayanlara da skaler denir (aç.)

VEKTÖRLERİN TOPLANMASI:

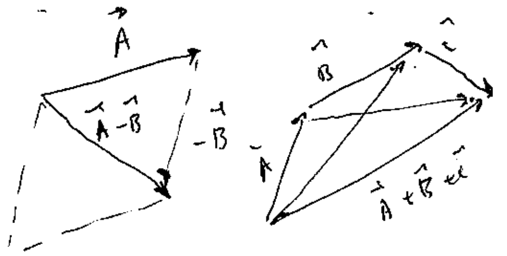



$\vec{A}+\vec{B} = \vec{B}+\vec{A}$ (komütatif)




$\vec{B}+(-\vec{B}) = \vec{0}$




$\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C}) = (\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$

(Birleşme)

②

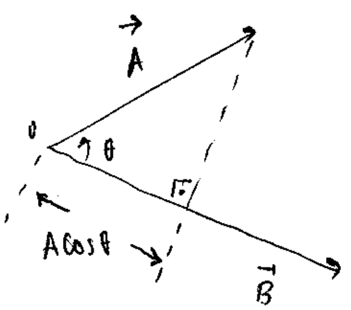
$$k(\vec{A}+\vec{B}) = k\vec{A} + k\vec{B}$$

1. Toplama, paralel kenar kuralını sağlarsa

2. Koordinat sisteminin seçimine bağlı olmayan bir büyüklük ve doğrultusu varsa, o nicelik vektördür.

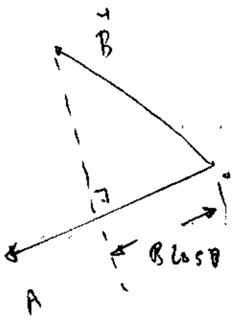
VEKTÖR ÇARPIMLARI :

Skaler Çarpım :




$$\vec{A}\cdot\vec{B} = B\,\underbrace{(A\cos\theta)}_{\vec{A}\cdot\hat{B}}$$

A'nın B doğrultusundaki izdüşümü.




$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A\,\underbrace{(B\cos\theta)}_{\vec{B}\cdot\hat{A}}$$

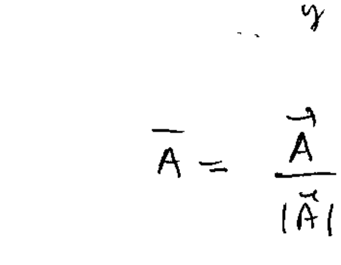
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\,\cos(\vec{A},\vec{B})$$

$$\cos(\vec{A},\vec{B}) = \cos(\vec{B},\vec{A})$$

" skaler çarpımda koordinat sistemi söz konusu değil "

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$

$\hat{x}\cdot\hat{x}=1$
$\hat{y}\cdot\hat{y}=1$
$\hat{z}\cdot\hat{z}=1$
diğerleri sıfır




$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}, \quad A_x = \vec{A}\cdot\hat{x}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \Rightarrow A = \sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$$

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{A_x}{A}\hat{x} + \frac{A_y}{A}\hat{y} + \frac{A_z}{A}\hat{z} = \frac{\vec{A}\cdot\hat{x}}{A}\hat{x} + \frac{\vec{A}\cdot\hat{y}}{A}\hat{y} + \frac{\vec{A}\cdot\hat{z}}{A}\hat{z}$$

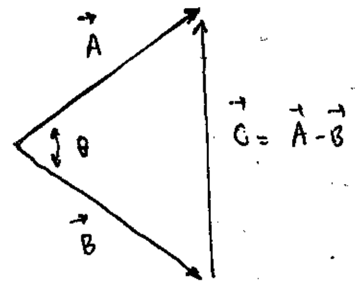
( Doğrultu kosinüsleri )

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

BS K

Skaler çarpım uygulamaları:

1. Kosinüs kuralı: $\vec{A} - \vec{B} = \vec{C}$ olsun.



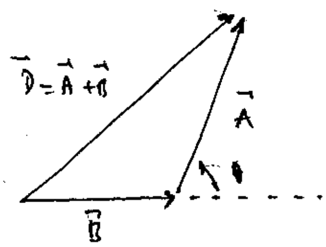

$$(\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B}) = \vec{C} \cdot \vec{C}$$

$$A^2 + B^2 - 2\,\vec{A} \cdot \vec{B} = C^2$$

$$A^2 + B^2 - 2AB\cos(\vec{A}, \vec{B}) = C^2$$ trigonometrik bağıntısını verir.

İki vektörün doğrultuları arasındaki açının kosinüsü,

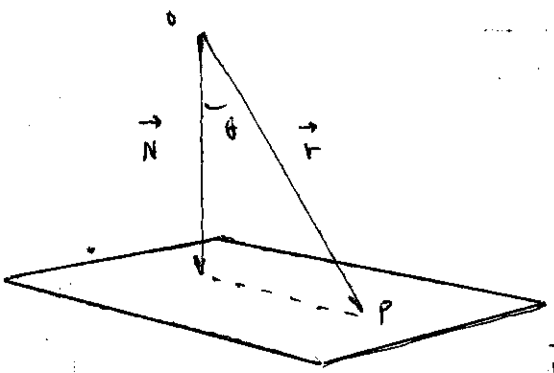
$$\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \cos\theta_{AB} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$$




$$\vec{D} \cdot \vec{D} = (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B})$$

$$= A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$$

2. Bir düzlemin denklemi:




$$\vec{r} \cdot \vec{N} = rN\cos\theta = N^2$$

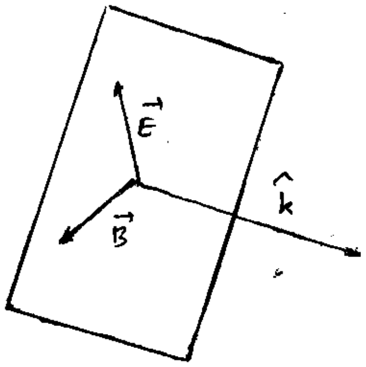
$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}, \quad \vec{N} = N_x\hat{x} + N_y\hat{y} + N_z\hat{z}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{N} = (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) \cdot (N_x\hat{x} + N_y\hat{y} + N_z\hat{z}) = N^2$$

$$\Rightarrow xN_x + yN_y + zN_z = N^2$$

$$x\frac{N_x}{N^2} + y\frac{N_y}{N^2} + z\frac{N_z}{N^2} = 1 \qquad ax + by + cz = 1$$ düzlem denklemi.

3. Bir elektromagnetik dalgada elektrik ve magnetik vektörler:

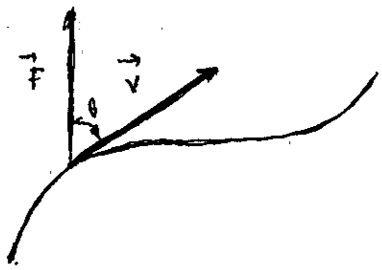



$\hat{k}\cdot\vec{E} = 0$ , $\hat{k}\cdot\vec{B} = 0$ $\vec{E}\cdot\vec{B} = 0$

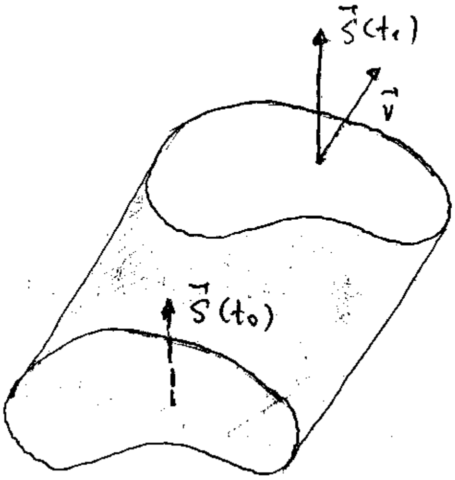
4. İş yapma hızı

$F v \cos(\vec{F},\vec{v})$ bir parçacığa etkiyen $\vec{F}$ kuvvetinin yaptığı işin hızı

$$\vec{F}\cdot\vec{v} = \frac{dW}{dt}$$




5. Hacim süpürme hızı

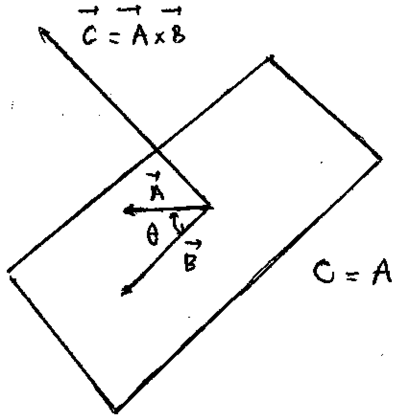



$$\frac{dV}{dt} = \vec{S}\cdot\vec{v}$$

BS K

Vektörel çarpım :

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} = \hat{C}\, AB\,|\sin(\vec{A},\vec{B})|$$

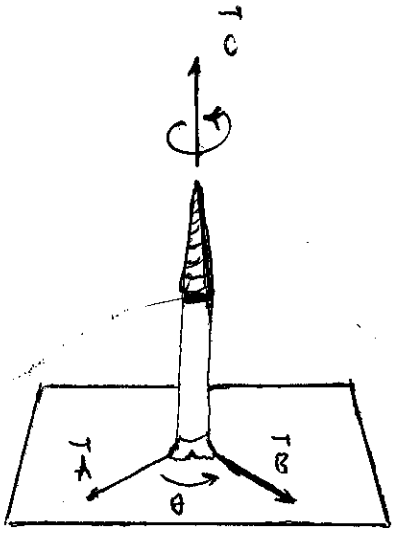



$C = AB\sin\theta$

$$\vec{B}\times\vec{A} = -\vec{A}\times\vec{B}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C} \quad \text{(dağılım)}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z})\times(B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z})$$



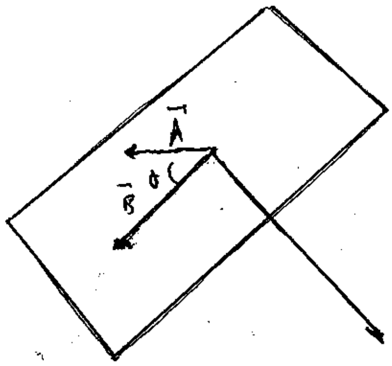

$$= \hat{x}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{y}(A_zB_x - A_xB_z)$$

$$+\ \hat{z}(A_xB_y - A_yB_x)$$

$$\hat{x}\times\hat{x} = \hat{y}\times\hat{y} = \hat{z}\times\hat{z} = 0$$

$\hat{x}\times\hat{z} = -\hat{y}$ , $\hat{y}\times\hat{z} = \hat{x}$ vb. (sağ elli koordinat sistemi)

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$




$\vec{B}\times\vec{A} = -\vec{C}$

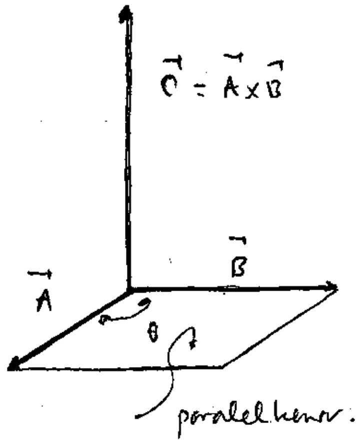
BS K

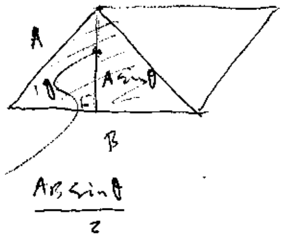
Vektörel çarpım uygulamaları:

1. Bir paralel kenarın alanı:

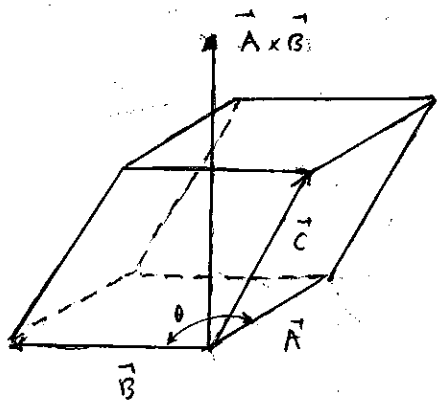
$$|\vec{A}\times\vec{B}| = AB\,|\sin(\vec{A},\vec{B})|$$

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} = AB\,|\sin\theta|\,\hat{C}$$




2. Bir paralel yüzün hacmi

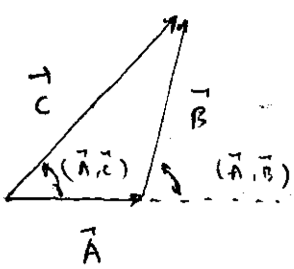



$$|(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}| = V$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} \quad \text{(şekilden)}$$

$$= -\vec{A}\cdot(\vec{C}\times\vec{B})$$

3. Sinüs teoremi.



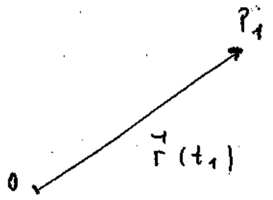

$$\vec{A}\times\vec{C} = \underbrace{\cancel{\vec{A}\times\vec{A}}}_{0} + \vec{A}\times\vec{B}, \quad \vec{C} = \vec{A}+\vec{B}$$

$$\cancel{A}C\sin(\vec{A},\vec{C}) = \cancel{A}B\sin(\vec{A},\vec{B})$$

$$\frac{\sin(\vec{A},\vec{C})}{B} = \frac{\sin(\vec{A},\vec{B})}{C}$$

# VEKTÖR TÜREVLERİ

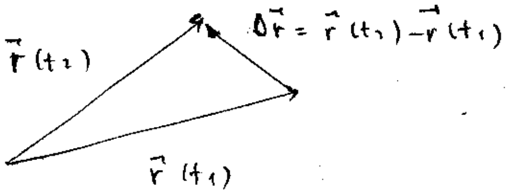
Bir parçacığın $\vec{v}$ hızı bir vektördür, ve hız parçacığın yerinin zamanla değişme oranıdır.

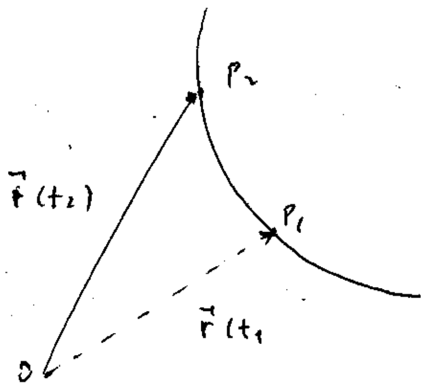



parçacığın $t_1$ anındaki $P_1$ konumu O'ya göre.

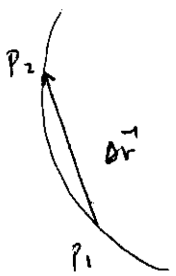
parçacık $t_2$ anında $P_2$'ye gelmiştir.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$



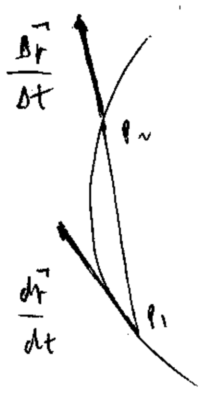




$\Delta\vec{r}$ $P_1P_2$ kirişidir.




$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ : $P_1P_2$ kirişi doğrultusunda bir vektördür. fakat $1/\Delta t$ oranında büyütülmüştür. $\Delta t$ sıfıra yaklaşırken $P_2$, $P_1$'e yaklaşır. $P_1P_2$ kirişi de $P_1$ noktasındaki teğete yaklaşır.

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \longrightarrow \frac{d\vec{r}}{dt}$$ 'ye yaklaşır.




$t = t_2 - t_1 \longrightarrow 0$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$ $\vec{r}$'nin zaman türevi

BS K

$\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}$ hız. $v = |\vec{v}|$ : sürat (skaler).

$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}$$

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{d\hat{y}}{dt} = \frac{d\hat{z}}{dt} = 0$$

$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ Birim vektör zamanla değişmiyor şimdilik!

$\vec{r}(t) = r(t)\,\hat{r}(t)$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\hat{r}(t)\,r(t)\right] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t)\hat{r}(t+\Delta t) - r(t)\hat{r}(t)}{\Delta t}$$

$$r(t+\Delta t)\hat{r}(t+\Delta t) - r(t)\hat{r}(t) = \left[r(t) + \frac{dr}{dt}\Delta t\right]\left[\hat{r}(t) + \frac{d\hat{r}}{dt}\Delta t\right] - \cancel{r(t)\hat{r}(t)}$$

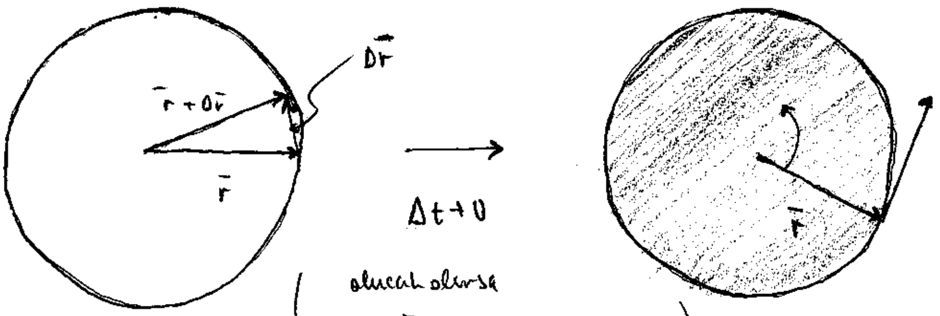
$$= \Delta t\left(\frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}\right) + \Delta t^2\left(\frac{dr}{dt}\frac{d\hat{r}}{dt}\right)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} + 0 \quad (\Delta t \to 0)$$

Bu bir a skaleri ile $\vec{b}$ vekt.'nin çarpımının türevi

$$\frac{d}{dt}(a\vec{b}) = \frac{da}{dt}\vec{b} + a\frac{d\vec{b}}{dt}$$

BS K



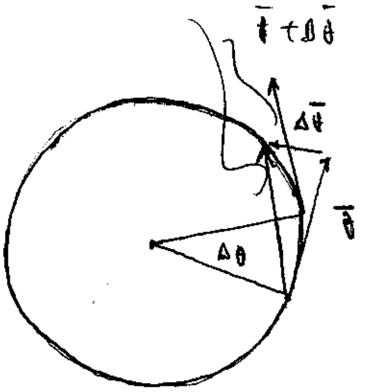

$\bar{\theta}$ ortak $\theta$ yönünde.

(olucak olursa $\Delta\bar{r}$ $\bar{\theta}$ ile aynı yönlü olur)

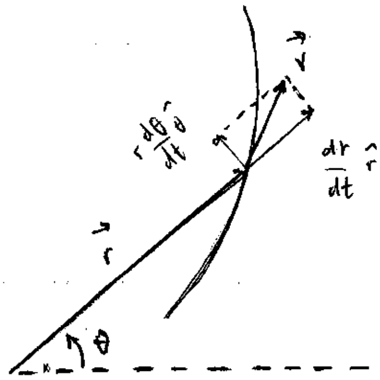
$\Delta t$ ve buna karşılık $\Delta\theta$ sıfıra yaklaşırsa $|\Delta\bar{r}| = |\bar{r}|\,\Delta\theta = \Delta\theta$ $(|\bar{r}|=1)$

$$\therefore \quad \Delta\bar{r} = \Delta\theta\,\bar{\theta} \quad , \quad \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\,\bar{\theta}$$

$\Delta t \to 0$ limitinde $\dfrac{d\bar{r}}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt}\,\bar{\theta}$




$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\,\bar{r}$$




$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\hat{r} + r\,\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\theta} \qquad \text{I}$$

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Kartezyen bileşenler ile $\vec{a} = \dfrac{d^2x}{dt^2}\,\hat{x} + \dfrac{d^2y}{dt^2}\,\hat{y} + \dfrac{d^2z}{dt^2}\,\hat{z}$

$\vec{a}$'yı $r$ ve $\theta$ cinsinden bulalım.

BS K

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}\hat{r} + \frac{dr}{dt}\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\theta} + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\hat{\theta}}{dt}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\hat{r}}{dt} &= \frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} \\ \frac{d\hat{\theta}}{dt} &= -\frac{d\theta}{dt}\hat{r} \end{aligned}\right\} \text{idi} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}\hat{r} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\theta} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{r}$$

$$= \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{r} + \frac{1}{r}\left[\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right]\hat{\theta} \qquad \text{II}$$

Örnek :

Dairesel Hareket. Sabit r yarıçaplı bir çember üzerinde sabit süratle hareket eden bir parçacığın hız ve ivmesini bulmak istiyoruz.

(+) Dairesel bir yörünge $r(t) = r\hat{r}(t)$ ile anlatılabilir. r sabittir ve $\hat{r}$ vektörü sabit hızla döner.

(+) problem 2 yoldan çözülür.

1. Yöntem :

I $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}$ bize $\vec{v} = r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}$ verir (r : sabit)

$= \omega r\hat{\theta}$ $\quad \omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ : açısal hız.

(+) Açısal hız $\omega$ saniyede radyan (rad/sn) cinsinden ölçülür ve bu problemde de sabittir.

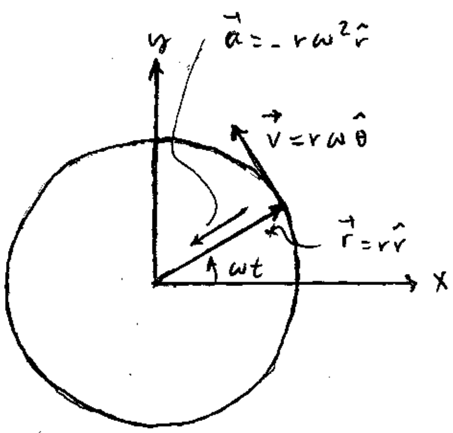
$\boxed{v = \omega r}$ (parçacığın sabit hızı)

II $\rightarrow$ $\boxed{\vec{a} = -r\omega^2\hat{r}}$ verir.

ivmenin büyüklüğü sabit ve dairenin merkezine yönelmiştir.

BS K

2. Yöntem :




$$\vec{r}(t) = r\cos\omega t\,\hat{x} + r\sin\omega t\,\hat{y}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -\omega r\sin\omega t\,\hat{x} + r\omega\cos\omega t\,\hat{y}$$

$$v = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \omega r$$

$\vec{v} \perp \vec{r}$ olduğu gösterilebilir.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega^2 r\cos\omega t\,\hat{x} - \omega^2 r\sin\omega t\,\hat{y}$$

$$= -\omega^2 (r\cos\omega t\,\hat{x} + r\sin\omega t\,\hat{y})$$

$$= -\omega^2 \vec{r} = -\omega^2 r\,\hat{r}$$

İvmenin büyüklüğü : $a = \frac{v^2}{r}$ merkezcil ivme.

# $\omega$ açısal hızı ile normal $f$ frekansı arasındaki bağıntı.

$\omega$: birim zamanda süpürülen radyan sayısı.

$f$: " " deki dolanım sayısı.

⟶ Dolanım $2\pi$ radyan olduğundan $2\pi f = \omega$

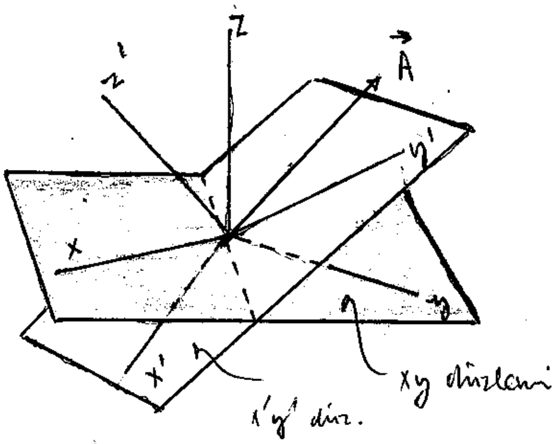
T : bir tam dolanımı tamamlamak için geçen zaman $= \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$

12

BS K

# DEĞİŞMEZLER

Koordinat eksenleri seçiminin bağımsız oluşunun fizik kanunlarının önemli bir yanı olduğunun ve bu nedenle vektör gösterimi kullandığımızı söylemiştik.




$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$$

$$\vec{A} = A'_{x'}\hat{x}' + A'_{y'}\hat{y}' + A'_{z'}\hat{z}'$$

$\vec{A}$ değişmediğine göre $A^2$ aynı kalır.

$$A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A'^2_{x'} + A'^2_{y'} + A'^2_{z'} \qquad (\text{prb } 20)$$

vektörün boyu koordinat sistemlerinin döndürülmesi ile değişmez

$\varphi(x,y,z)$ skaler alan

$\vec{A}(x,y,z)$ vektörel alan.

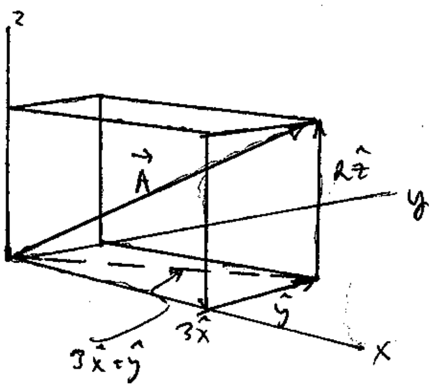
Örnekler :

$$\vec{A} = 3\hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z}$$

1. $\vec{A}$'nın uzunluğu :

$$A^2 = \vec{A}\cdot\vec{A} = 3^2 + 1^2 + 2^2 = 14$$

$$A = \sqrt{14}$$




2. $\vec{A}$'nın xy düzlemi üzerindeki izdüşümünün uzunluğu.

$3\hat{x}+\hat{y}$ izdüşümüdür : $\Rightarrow$ $3^2 + 1^2 = 10$ $\Rightarrow$ $A_{xy} = \sqrt{10}$

BS K

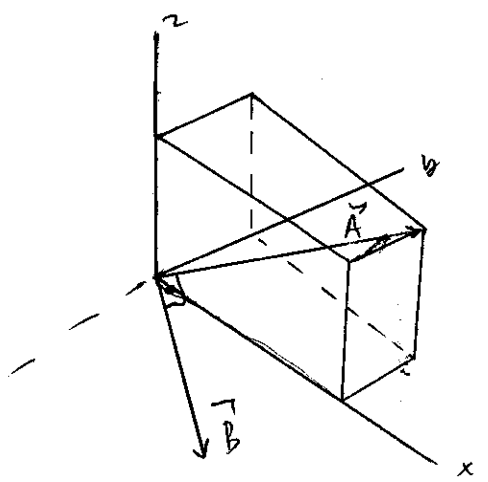
(4)

3. xy-düzleminde $\vec{A}$'ya dik bir vektör çiziniz.

$\vec{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y}$ olacaktır. $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ olmasını istiyoruz.

$\therefore$ $(3\hat{x}+\hat{y}+2\hat{z})\cdot(B_x\hat{x}+B_y\hat{y}) = 0$

$\Rightarrow \quad 3B_x + B_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{B_y}{B_x} = -3$ $\quad \vec{B}$'nin uzunluğu bu verilerle bulunamaz




4. $\bar{B}$ birim vektörünü bulunuz.

$\vec{B} = B_x(\hat{x} - 3\hat{y})$

$\vec{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} = B\bar{B}$

$B^2 = B_x^2 + B_y^2 = B_x^2(1^2+3^2) = 10B_x^2$

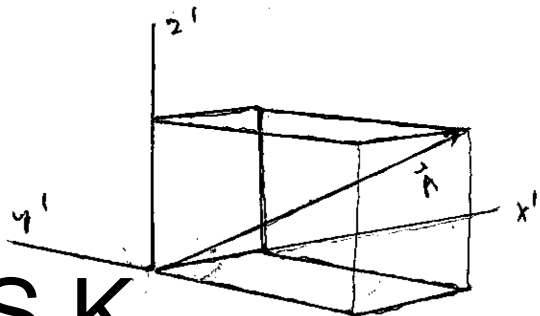
$\bar{B} = \frac{1}{B_x}\left[\frac{1}{\sqrt{10}}\hat{x} - 3\frac{1}{\sqrt{10}}\hat{y}\right]$

(?)

5. $\vec{A}$ vektörü ile $\vec{C} = 2\hat{x}$ vektörünün skaler çarpımı.

$\vec{A}\cdot\vec{C} = (3\hat{x}+\hat{y}+2\hat{z})\cdot 2\hat{x} = 6$

6. Eski gözlem sisteminin pozitif ~~z~~-yönünde bakılarak bu eksen etrafında saat yönünde $\pi/2$ kadar döndürülmesi ile elde edilen yeni gözlem sistemine göre $\vec{A}$ ve $\vec{C}$'nin şeklini bulunuz.




$\hat{x}' = \hat{y} \quad \hat{y}' = -\hat{x} \quad \hat{z}' = \hat{z}$

$\vec{A} = \hat{x}' - 3\hat{y}' + 2\hat{z}' \quad \vec{C} = -2\hat{y}'$

$A^2 = 1^2 + 3^2 + 2^2 =$ aynı.

Değişmez.

7. Şeklinde

$\vec{A}\cdot\vec{C} = 6$

Değişmez

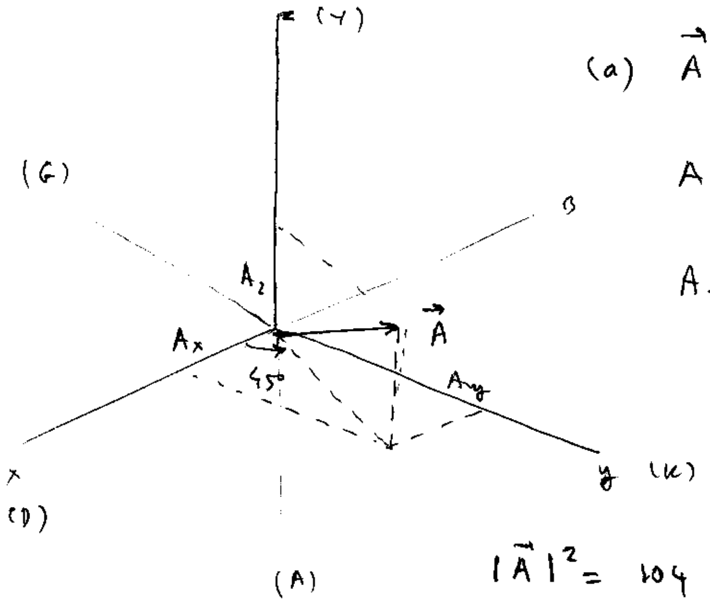
2.1. Yer Vektörleri : x-ekseni Doğu, y-ekseni Kuzey ve z-ekseni Yukarı yön olarak alınız. ve aşağıdaki noktaları gösteren vektörleri bulunuz.

(a) 10 km KD ve 2 km Y , $\vec{A}$

(b) 5 m GD ve 5 m A , $\vec{B}$

(c) 1 cm KB ve 6 cm Y , $\vec{C}$

Her vektörün büyüklüğünü ve o yöndeki birim vektör için bir ifade bulunuz.




(a) $\vec{A} = A_x\bar{x} + A_y\bar{y} + A_z\bar{z}$

$A_x = 10\cos 45° = \frac{10}{\sqrt{2}} = A_y$

$A_z = 2$

$\vec{A} = \frac{10}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{10}{\sqrt{2}}\bar{y} + 2\bar{z}$

$|\vec{A}|^2 = 104 \Rightarrow A = \sqrt{104} \cong 10.1$ km

$$\vec{A} = A\bar{A} \Rightarrow \bar{A} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{A_x}{A}\bar{x} + \frac{A_y}{A}\bar{y} + \frac{A_z}{A}\bar{z}$$

$$= \frac{10/\sqrt{2}}{\sqrt{104}}\bar{x} + \frac{10/\sqrt{2}}{\sqrt{104}}\bar{y} + \frac{2}{\sqrt{104}}\bar{z}$$

$$= 0.69\bar{x} + 0.69\bar{y} + 0.19\hat{z}$$

(b) $B_x = 5\cos 45 = \frac{5}{\sqrt{2}} = -B_y \quad B_z = -5 \quad B = \sqrt{50} = 7.1$ m

$\bar{B} = 0.5\bar{x} - 0.5\bar{y} - 0.7\bar{z}$

BS K

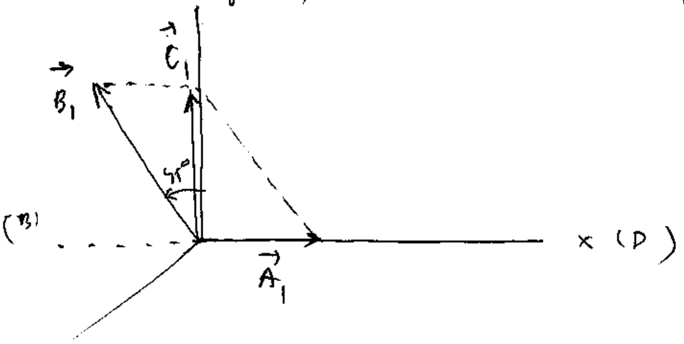
2030) Vektörlerin Toplanması: Aşağıdaki vektör toplamlarının sonuçlarını çizimle bulunuz.

(a) Doğu'ya doğru 2 cm'lik bir vektörle, Kuzey Batıya doğru 3cm'lik bir vektör,

(b) " " 8 cm'lik " " " " " 12cm " " "

(c) (a) ve (b)'yi karşılaştırınız ve bir çift vektörün katsayıları olan diğer bir çift vektörün toplamı için bir teorem öneriniz.

(a)




$$\vec{C}_1 = C_x\bar{x} + C_y\bar{y} = \vec{A}_1 + \vec{B}_1$$

$$= (A_{1x} + B_{1x})\,\bar{x} + B_{1y}\,\bar{y}$$

$$A_{1x} = 2\ \text{cm}$$

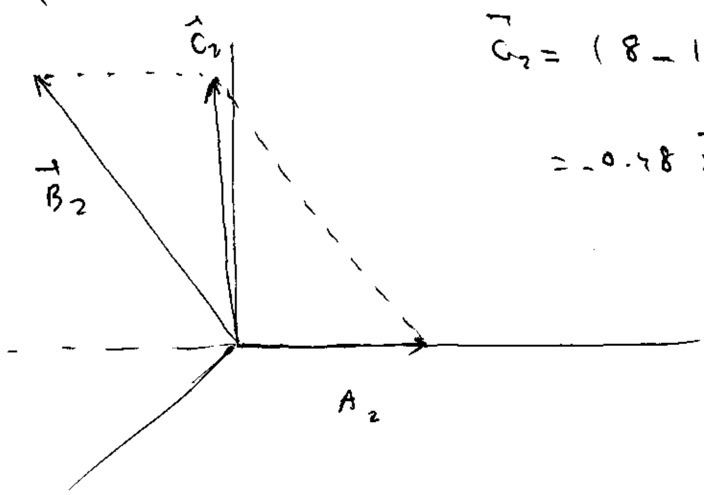
$$B_{1x} = \vec{B}_1\cdot\bar{x} = B_1\cos(\vec{B}_1,\bar{x}) = 3\cos 135^\circ$$

$$B_{1y} = \vec{B}_1\cdot\bar{y} = B_1\sin(\vec{B}_1,\bar{y}) = 3\sin 135^\circ$$

$$\vec{C}_1 = (2 + 3\cos 135^\circ)\,\bar{x} + 3\sin 135\,\bar{y}$$

$$= -0.12\,\bar{x} + 2.12\,\bar{y} \qquad |\vec{C}_1| = \sqrt{(-0.12)^2 + (2.12)^2}$$

(b)




$$\vec{C}_2 = (8 - 12\cos 45^\circ)\,\bar{x} + 12\sin 45^\circ\,\bar{y}$$

$$= -0.48\,\bar{x} + 8.48\,\bar{y}$$

(c) $\vec{C}_1 + \vec{C}_2$ vektörünü $a$ ile çarpmak için herbir bileşen $a$ ile çarpılıp toplanır

$$a(\vec{C}_1 + \vec{C}_2) = a\vec{C}_1 + \vec{C}_2$$

BS K

2.5.) İki vektörün skaler ve vektörel çarpımları: $\vec{a} = 3\bar{x} + 4\bar{y} - 5\bar{z}$ ve $\vec{b} = -\bar{x} + 2\bar{y} + 6\bar{z}$ vektörleri veriliyor. Vektör yöntemler ile aşağıdakileri hesaplayınız.

a) Her vektörün uzunluğunu, b) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ skaler çarpımını, c) Aralarındaki açıyı

d) Her vektörün doğrultu kosinüslerini, e) $\vec{a} + \vec{b}$ ve $\vec{a} - \vec{b}$, f) $\vec{a} \times \vec{b}$.

(a) $|\vec{a}| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}$ br, $|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (6)^2} = \sqrt{41}$ br

(b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (3)(-1) + (4)(2) + (-5)6 = -25$

(c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{-25}{\sqrt{50}\sqrt{41}} = -0.55 \Rightarrow \theta = 124^\circ$

(d) $\cos(\vec{a}, \bar{x}) = \dfrac{a_x}{|\vec{a}|} = \dfrac{3}{\sqrt{50}} = 0.4$ $\qquad \cos(\vec{b}, \bar{x}) = -0.2$

$\cos(\vec{a}, \bar{y}) = 0.6$ $\qquad \cos(\vec{b}, \bar{y}) = 0.3$

$\cos(\vec{a}, \bar{z}) = -0.7$ $\qquad \cos(\vec{b}, \bar{z}) = 0.9$

(e) $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\bar{x} + (a_y + b_y)\bar{y} + (a_z + b_z)\bar{z}$

$= 2\bar{x} + 6\bar{y} + \bar{z}$

$\vec{a} - \vec{b} = 4\bar{x} + 2\bar{y} - 11\bar{z}$

f) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \\ 3 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 34\bar{x} - 13\bar{y} + 10\bar{z}$

BS K

2.6.) Vektör Cebri : İki vektör $\vec{a}+\vec{b} = 11\bar{x} - \bar{y} + 5\bar{z}$ ve $\vec{a}-\vec{b} = -5\bar{x} + 11\bar{y} + 9\bar{z}$ olacak şekilde veriliyor. (a) $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ 'yi bulunuz. (b) $\vec{a}$ ile $(\vec{a}+\vec{b})$ arasındaki açıyı bulunuz.

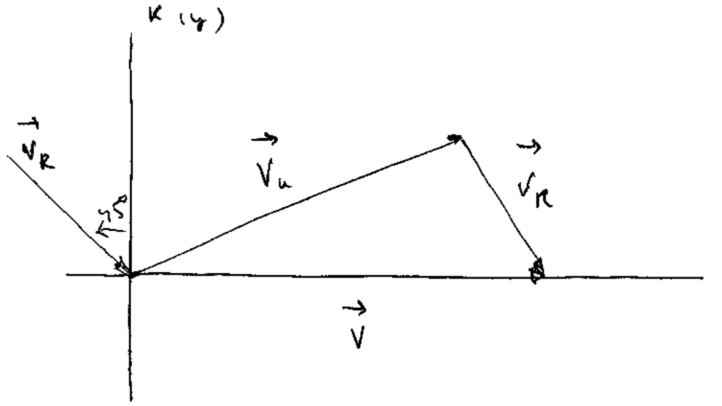
a) $$\vec{a}+\vec{b} = 11\bar{x} - \bar{y} + 5\bar{z}$$
$$\vec{a}-\vec{b} = -5\bar{x} + 11\bar{y} + 9\bar{z}$$

$$\vec{a} = 3\bar{x} + 5\bar{y} + 7\bar{z}$$
$$\vec{b} = 8\bar{x} - 6\bar{y} - 2\bar{z}$$

(b) $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|\,|\vec{a}+\vec{b}|\cos\theta$ , $|\vec{a}| = \sqrt{83}$ , $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{147}$

$$\cos\theta = \frac{63}{\sqrt{83}\sqrt{147}} \Rightarrow \theta = 55^\circ$$

2.8. Hızların Birleştirilmesi: Bir uçağın pilotu bulunduğu yerin Doğusunda 200 km uzakta bir noktaya varmak istiyor. Rüzgar Kuzey Batı'dan 30 km/h sürat ile esmektedir. Program gereğince istediği noktaya 40 dakikada varması gerektiğine göre uçağın esen havaya göre vektör hızını bulunuz.




$$\Delta t = 40 \text{ dak} = \frac{2}{3} \text{ saat}$$

$$|\vec{V}_R| = 30 \text{ km/h}$$

$$\vec{V} = \frac{200 \text{ km}}{(\frac{2}{3}) \text{ saat}}\bar{x} = 300\bar{x}$$

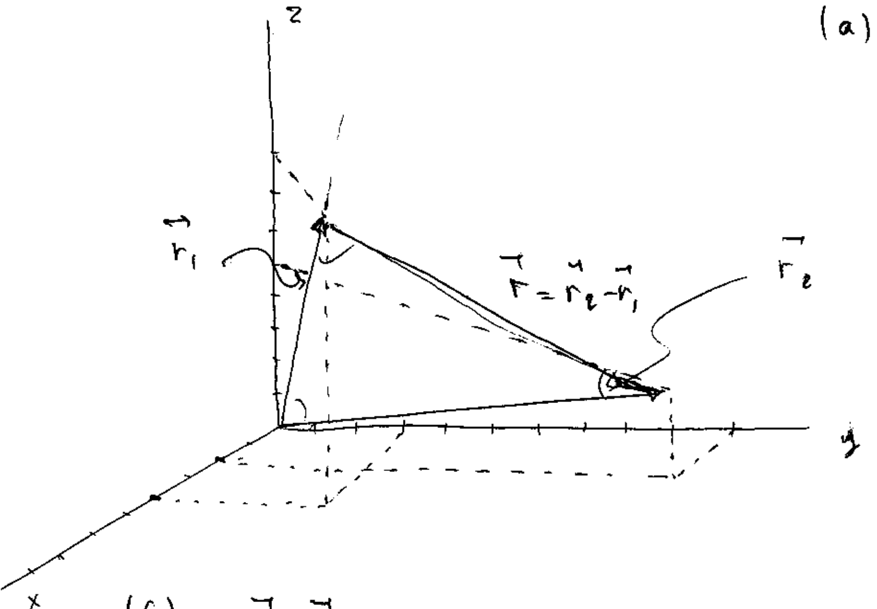
$$\vec{V}_R = 30\cos 45\,\bar{x} - 30\sin 45\,\bar{y} = \frac{30}{\sqrt{2}}(\bar{x}-\bar{y})$$

$$\vec{V}_u = \vec{V} - \vec{V}_R = \left(300 - \frac{30}{\sqrt{2}}\right)\bar{x} + \frac{30}{\sqrt{2}}\bar{y} = 278\bar{x} + 21\bar{y}$$

$$|\vec{V}_u| = 278 \text{ km/h}$$

BS K

2.9.) Vektör İşlemleri : (bağıl yer vektörü) İki parçacık ortak bir kaynaktan çıkarak belli bir anda $\vec{r}_1 = 4\bar{x} + 3\bar{y} + 8\bar{z}$ ve $\vec{r}_2 = 2\bar{x} + 10\bar{y} + 5\bar{z}$ yerlerini almışlardır. (a) Parçacıkların yerlerini şekille gösteriniz. ve 2. parçacığın 1.ye göre yerini belirten $\vec{r}$ yerdeğiştirmesi için bir ifade bulunuz. (b) Her vektörün uzunluğunu bulmak için skaler çarpımı kullanınız. (c) Üç vektörden elde edilebilecek mümkün her çift arasındaki açıyı bulunuz. (d) $\vec{r}$'nin $\vec{r}_1$ üzerindeki izdüşümünü bulunuz e) $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$




(a) $\vec{r} = \vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$= -2\bar{x} + 7\bar{y} - 3\bar{z}$

(b) $|\vec{r}_1| = \sqrt{89} = 9.4$

$|\vec{r}_2| = \sqrt{129} = 11.3$

$|\vec{r}| = \sqrt{62} = 7.9$

(c) $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = r_1 r_2 \cos\theta_{r_1 r_2} = 8 + 30 + \ = 78 \Rightarrow \cos\theta_{12} = \dfrac{78}{9.4 \times 11.3} = 0.734$

$\Rightarrow \theta_{12} = 42.9°$

$\vec{r}_2 \cdot \vec{r} = r_2 r \cos\theta_{r_2 r} = -4 + 70 - 15 \Rightarrow \cos\theta_{r_2 r} = 0.571 \Rightarrow \theta_{r_2 r} = 55.2°,\ \theta_{r_1 r} = 98.7°$

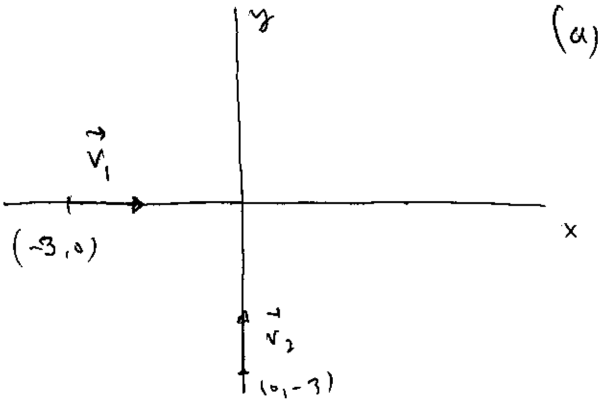
(d) $\vec{r}$'nin $\vec{r}_1$ üzerine izdüşümü

$\vec{r} \cdot \vec{r}_1 = r r_1 \cos\theta_{r_1 r} \Rightarrow r\cos\theta_{r_1 r} = \dfrac{\vec{r} \cdot \vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} = \dfrac{-11}{9.4} = -1.17$

(e) $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \\ 4 & 3 & 8 \\ 2 & 10 & 5 \end{vmatrix} = -65\bar{x} - 4\bar{y} + 34\bar{z}$

BS K

2010.) İki parçacığın en yakın uzaklığı: İki parçacık x ve y eksenleri üzerinde karşılıklı olarak $\vec{v}_1 = 2\bar{x}$ cm/s ve $\vec{v}_2 = 3\bar{y}$ cm/s hızlar ile hareket ediyorlar. t=0 anında ($x_1 = -3$ cm, $y_1 = 0$), ($x_2 = 0$ cm, $y_2 = -3$ cm)'de bulunuyorlar. (a) 2'nin 1'e göre yerini gösteren $\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ vektörünü zamanın fonksiyonu olarak bulunuz (b) Bu iki parçacık ne zaman ve nerede birbirine yakındır.




(a) t=0'da

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{10} + \vec{v}_1 t$$

$$= -3\bar{x} + 2t\bar{x} = (2t-3)\bar{x}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{20} + \vec{v}_2 t = -3\bar{y} + 3t\bar{y} = (3t-3)\bar{y}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (3t-3)\bar{y} - (2t-3)\bar{x}$$

(b) $\vec{r}$'nin minimum olduğu zaman en yakındırlar.

$$\frac{d}{dt}[|\vec{r}|^2] = \frac{d}{dt}[(3t-3)^2 + (2t-3)^2] = 0$$

$$26t - 30 = 0 \Rightarrow t = \frac{30}{26} = 1.15\,s$$

$$\vec{r}_1 = -0.7\bar{x}$$

$$\vec{r}_2 = 0.45\bar{y}$$

$$\vec{r} = 0.7\bar{x} + 0.45\bar{y}$$

BS K

2.12.) $\vec{a} \perp \vec{b}$ için koşul: $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$ ise $\vec{a}$'nın $\vec{b}$'ye dik olduğunu gösteriniz.

$$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}| \Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}-\vec{b}|^2$$

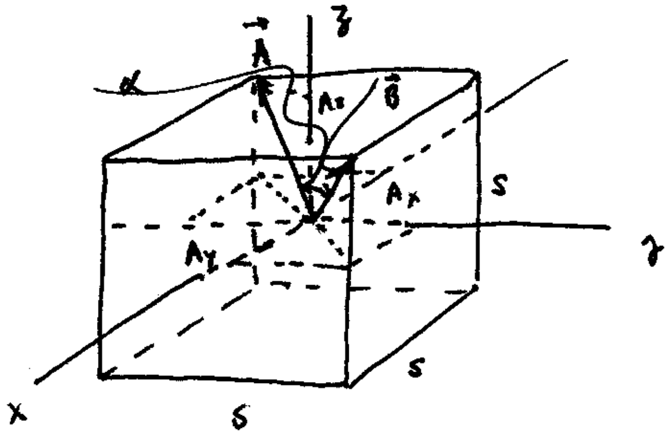
ya da

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$$

$$a^2+b^2+2\vec{a}\cdot\vec{b} = a^2+b^2-2\vec{a}\cdot\vec{b} \Rightarrow 4\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \;,\; |\vec{a}| \neq |\vec{b}| 0$$

olduğuna göre $\vec{a} \perp \vec{b}$ olmalı.

2.11.) Bir küpün uzay köşegenleri: Bir küpün iki uzay köşegeni arasındaki açı ne kadardır? (Bir uzay köşegeni, iki köşeyi birleştirir ve küpün içinden geçer. Bir yüzey köşegeni, iki köşeyi birleştirir ve küp'ün yüzeyinden geçer.)




$$\vec{A} = -\frac{1}{2}s\bar{x} - \frac{1}{2}s\bar{y} + \frac{1}{2}s\bar{z}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{2}s\bar{x} + \frac{1}{2}s\bar{y} + \frac{1}{2}s\bar{z}$$

$$|\vec{A}| = \frac{\sqrt{3}}{2}s = |\vec{B}|$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{A\,B} = \frac{-\cancel{s^2}/4}{(3/4)\cancel{s^2}} = -\frac{1}{3}$$

$$\alpha = 109^\circ$$

BS K

2.13.) Paralel ve Dik Vektörler: $x$ ve $y$'yi o şekilde bulunuz ki, $\vec{B} = x\bar{x} + 3\bar{y}$ ve $\vec{C} = 2\bar{x} + y\bar{y}$ vektörlerinin herbiri $\vec{A} = 5\bar{x} + 6\bar{y}$ vektörüne dik olsun. Şimdi de $\vec{B}$ ve $\vec{C}$'nin paralel olduğunu ispatlayın. Bir 3. vektöre dik olan iki vektörün 3-boyutlu uzayda paralel olmaları zorunlumudur?

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (5\bar{x}+6\bar{y})\cdot(x\bar{x}+3\bar{y}) = 5x+18=0 \Rightarrow x = -3.6$$

$$\vec{A}\cdot\vec{C} = (5\bar{x}+6\bar{y})\cdot(2\bar{x}+y\bar{y}) = 10+6y=0 \Rightarrow y = -5/3$$

$$\vec{B}\cdot\vec{C} = (-3.6\,\bar{x}+3\bar{y})\cdot(2\bar{x}-\frac{5}{3}\bar{y})$$

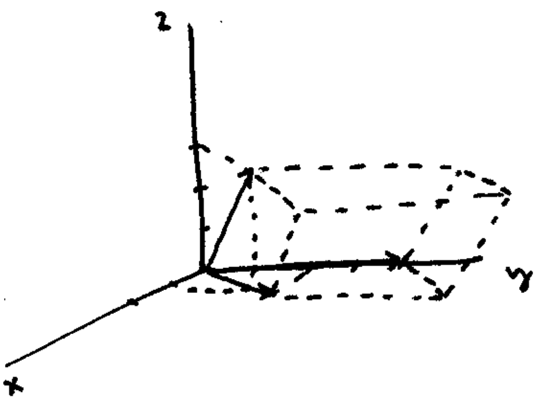
$$= -7.2 - 5.0 = -12.2$$

$$= |\vec{B}||\vec{C}|\cos(\vec{B},\vec{C})$$

$$= \sqrt{(3.6)^2+9}\,\sqrt{4+\frac{25}{9}}\,\cos(\vec{B},\vec{C}) = \frac{61}{5}\cos(\vec{B},\vec{C})$$

$$= 12.2\cos(\vec{B},\vec{C}) \iff \cos(\vec{B},\vec{C}) = \cos(\pi)$$

2.14.) Paralel Yüzün Hacmi: Bir paralel yüzün kenarları başlangıç noktasına göre $\bar{x}+2\bar{y}$, $4\bar{y}$ ve $\bar{y}+3\bar{z}$ vektörleri ile betimlenmiştir. Hacmi bulunuz.




$$V = |(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}| \rightsquigarrow -\vec{A}\cdot(\vec{C}\times\vec{B}) = \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$$

$$\vec{a} = \bar{x}+2\bar{y}+0\bar{z}$$

$$\vec{b} = 0\bar{x}+4\bar{y}+0\bar{z}$$

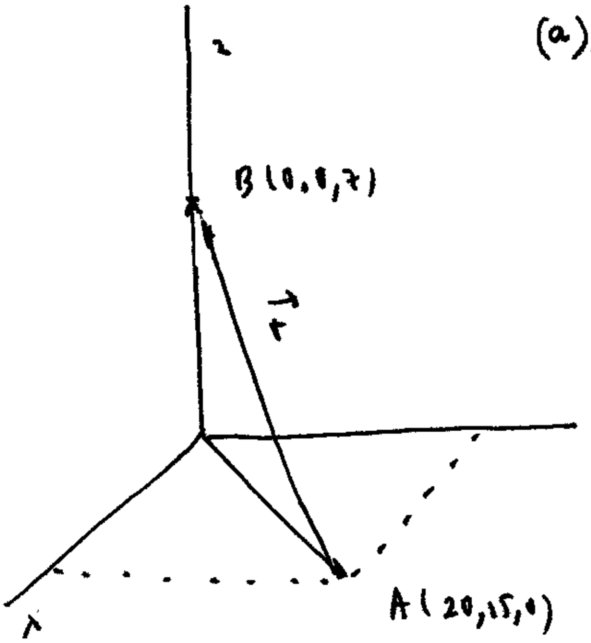
$$\vec{c} = 0\bar{x}+\bar{y}+3\bar{z}$$

$$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12\bar{x}$$

$$V = (\bar{x}+2\bar{y})\cdot 12\bar{x} = 12\ \text{br}^3$$

BS K

2.16.) Kuvvetlerin yaptığı iş: Sabit $\vec{F}_1 = \bar{x} + 2\bar{y} + 3\bar{z}$ (dyn) ve $\vec{F}_2 = 4\bar{x} - 5\bar{y} - 2\bar{z}$ kuvvetleri bir parçacık üzerine birlikte etkiyerek parçacığı A (20, 15, 0) cm noktasından B (0, 0, 7) cm noktasına sürüklemiştir. (a) Parçacık üzerine yapılan iş (erg) ne kadardır? (b) $\vec{F}_1$ ve $\vec{F}_2$'nin yaptıkları işi ayrı ayrı bulunuz. (c) Aynı kuvvetlerin etkidiğini ve parçacığın B'den A'ya gittiğini varsayın.




(a) $\vec{F}_1 = \bar{x} + 2\bar{y} + 3\bar{z}$ ; $\vec{F}_2 = 4\bar{x} - 5\bar{y} - 2\bar{z}$

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 5\bar{x} - 3\bar{y} + \bar{z}$$

$$\vec{r} = -\vec{A} + \vec{B} = -20\bar{x} - 15\bar{y} + 7\bar{z}$$

$$\vec{F}_R \cdot \vec{r} = (5\bar{x} - 3\bar{y} + \bar{z}) \cdot (-20\bar{x} - 15\bar{y} + 7\bar{z})$$

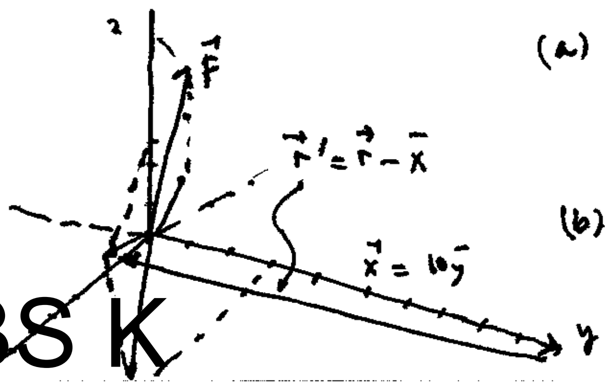
$$= -48 \text{ erg}$$

(b) $\vec{F}_1 \cdot \vec{r} = -29$ erg $\quad \vec{F}_2 \cdot \vec{r} = -19$ erg

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot \vec{r} = -48 \text{ erg}$$

(c) $\vec{r}\,' = -\vec{r}$ olacak. $\quad \vec{F}_R \cdot \vec{r}\,' = 48$ erg.

2.17.) Bir kuvvetin bir nokta etrafında dönme momenti: $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$ ile tanımlanır. Burada $\vec{r}$ verilen noktadan kuvvetin uygulanma noktasına giden vektördür. $7\bar{x} + 3\bar{y} + \bar{z}$ (cm) noktasına etkiyen $\vec{F} = -3\bar{x} + \bar{y} + 5\bar{z}$ (dyn) kuvvetini düşünün. (a) Başlangıç etrafındaki dönme momenti dyn-cm cinsinden ne kadardır? (b) (0, 10, 0) etrafındaki dönme mom. i ne kadardır.




(a) $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \\ 7 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 14\bar{x} - 38\bar{y} + 16\bar{z}$

(b) $\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{x} = 7\bar{x} - 7\bar{y} + \bar{z}$

$$\vec{N}\,' = \vec{r}\,' \times \vec{F} = -36\bar{x} - 38\bar{y} - 14\bar{z}$$

BS K

2-18.) Hız ve ivme (vektör türevleri) Aşağıdaki yer vektörleri ile betimlenen noktaların hız ve ivmesini bulunuz.

(a) $\vec{r} = 16t\,\bar{x} + 25t^2\,\bar{y} + 33\,\bar{z}$

(b) $\vec{r} = 10\sin 15t\,\bar{x} + 35\,\bar{y} + e^{6t}\,\bar{z}$

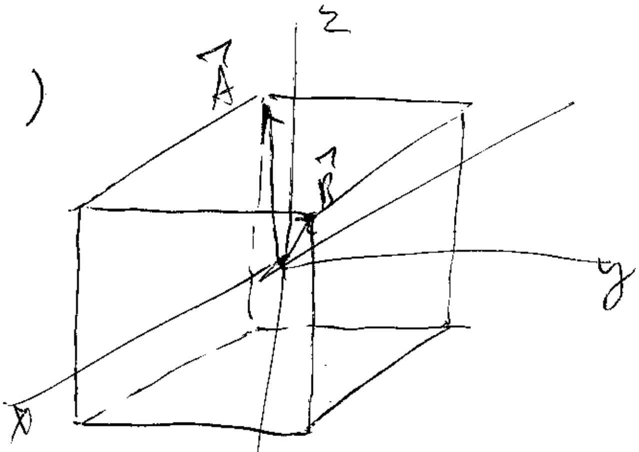
(a) $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = 16\,\bar{x} + 50t\,\bar{y}$ $\quad \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = 50\,\bar{y}$

(b) $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = 150\cos 15t\,\bar{x} + 6e^{6t}\,\bar{z}$

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -2250\sin 15t\,\bar{x} + 36e^{6t}\,\bar{z}$

BS K

11)




$\vec{A} = -\frac{a}{2}\hat{x} - \frac{a}{2}\hat{y} + \frac{a}{2}\hat{z}$

$\vec{B} = \frac{a}{2}(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})$  $|\vec{A}| = |\vec{B}| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = \frac{-a^2}{4} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha$

12) $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$4\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$

13) $\vec{B} = x\hat{x} + 3\hat{y}$  x ve y o şekilde olmalı ki $\left(\frac{\vec{A}}{\vec{B}}\right)\left(\frac{\vec{C}}{\vec{B}}\right)$ olsun

$\vec{C} = 2\hat{x} + y\hat{y}$  $\vec{A} = 5\hat{x} + 6\hat{y}$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = 5x + 18 = 0 \Rightarrow x = -3.6$ | $\vec{B}\cdot\vec{C} = -|\vec{B}||\vec{C}|$

$A\cdot\vec{C} = 10 + 6y = 0$  $y = -5/3$ | antiparalel

BS K

Hayır üç boyutlu bir vektörün diğer ikisi doğrultusunda ve bu düzlemdeki iki vektöre bağımlı olmadığı...

15. $\vec{a} = \hat{x} + 2\hat{y} + 0\hat{z}$

$\vec{b} = 0\hat{x} + 4\hat{y} + 0\hat{z}$

$\vec{c} = 0\hat{x} + \hat{y} + 3\hat{z}$

$V = |\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})| = 12\ br^3$

18) $\vec{r} = 16t\hat{x} + 25t^2\hat{y} + 33\hat{z}$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 16\hat{x} + 50t\hat{y}$

$\vec{a} = 50\hat{y}$

b) —

16. $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 5\hat{x} - 3\hat{y} + \hat{z}$

a)

$\vec{r}_2 = (0\hat{x} + 0\hat{y} + 7\hat{z})$

$\vec{r}_1 = (20\hat{x} + 15\hat{y} + 0\hat{z})$

$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -48\ erg$

b) $\vec{F}_1 \cdot \vec{r} = -29\ erg$

$\vec{F}_2 \cdot \vec{r} = -19\ erg$

$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot \vec{r} = -48\ erg$

c) $\vec{r}' = -\vec{r} \Rightarrow W' = -W = 48\ erg$

17.)

a) $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = | \quad | = 14\hat{x} - 38\hat{y} + 16\hat{z}$ dyn-cm.

b) $\vec{r}' = (7\hat{x} + 3\hat{y} + \hat{z}) - (0\hat{x} + 10\hat{y} + 0\hat{z})$

$= 7\hat{x} - 7\hat{y} + \hat{z}$

$\vec{N} = \vec{r}' \times \vec{F} = -36\hat{x} - 38\hat{y} - 14\hat{z}$

BS K