BÖLÜM 5

ENERJİNİN KORUNUMU

FİZİK DÜNYASINDA KORUNUM YASALARI :

1. Korunum yasaları yörüngenin şekline ve çoğu zaman konuya giren kuvvetlerin inceliklerine bağlı değildirler.
2. Korunum yasaları kuvvet bilinmeden de kullanılabilir.
3. Korunum yasalarının değişmezlikle ilişkisi vardır.
4. Kuvvet tam olarak bilindiği zaman bile korunum yasası parçacığın hareketini çözmek için daha uygun bir yol olabilir.

KAVRAMLARIN TANIMI :

Mekaniksel Enerji korunumu : kinetik enerji ve pot. enerji ve iş kavramlarını kapsar.

(#) Tek boyutlu hareket ve kuvvet ele alınıp genelleştirilecek.

(#) iş ve kinetik Enerji kavramlarını geliştirmek için galaksilerarası uzayda bütün dış etkilerden bağımsız bir M kütlesi alalım. Parçacığı eylemsiz bir gözlem çerçevesinde gözleyelim. $t=0$ anında parçacığa bir $\vec{F}$ kuvveti uygulansın ve bu andan itibaren kuvvet doğrultu ve büyüklükçe sbt tutulsun. Doğrultu y-doğrultusu olsun. Uygulanan kuvvet etkisi ile parçacık ivmelenecektir. Hareket

$$F = M\frac{d^2y}{dt^2} = M\ddot{y}$$

t zaman sonraki hız

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t \ddot{y}\,dt = \int_0^t \frac{F}{M}\,dt$$

BS K

②

$$v - v_0 = \frac{F}{m} t$$; v_0 : y-yönündeki ilk hız. (I)

$$\Rightarrow \quad \underbrace{F t}_{} = \underbrace{m v(t) - m v_0}_{}$$

porçacığın mom.'unun t zamanında değişme miktarı.

t zamanında kuvvetin itmesi.

(#) $\vec{F}$ çok büyük olup ta etkidiği süre çok kısa olursa;

$$\text{itme} = \int_0^t F\,dt = \Delta(mv)$$

(I) 'i zamana göre integre edelim;

$$y(t) - y_0 = \int_0^t v(t)\,dt = \int_0^t \left(v_0 + \frac{F}{m} t\right) dt = v_0 t + \frac{1}{2}\frac{F}{m} t^2$$

$$\text{(I)} \Rightarrow \quad t = \frac{m}{F}(v - v_0)$$

$$y - y_0 = \frac{m}{F}\left(\cancel{v v_0} - v_0^2\right) + \frac{1}{2}\frac{m}{F}\left(v^2 - \cancel{2 v v_0} + v_0^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m}{F}\left(v^2 - v_0^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = F \times (y - y_0)}$$

(K.E) yapılan iş. (F kuvvetinin)

BS K

$M = 20$ gr ve $v = 100$ cm/s $\Rightarrow KE = \frac{1}{2} M v^2 = 1.10^5$ gr cm²/s $= 10^5$ erg (cgs)

$F = 100$ dyn'lik bir kuvvet $x = 10^3$ cm yol boyunca uygulanırsa ..

$F(y - y_0) = 10^2 . 10^3 = 10^5$ erg.

"Bir erg bir dyn'lik bir kuvvetin bir santimetre yol boyunca uygulanmasıyla yaptığı iştir".

$[\text{iş}] \sim [\text{Kuvvet}] \times [\text{yol}] \sim [\text{Kütle}][\text{ivme}][\text{yol}] \sim [\text{Kütle}] \times [\text{Hız}]^2$

$$\sim \left[M \frac{L}{T^2} L\right] \sim [ML^2T^{-2}] \sim [\text{Enerji}]$$

KBS'de $[\text{iş}] : [\text{joule}]$ 1 N'luk bir kuvvetin 1 m yol boyunca yaptığı iş.

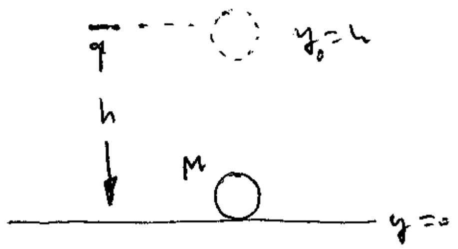
$1\,N = 10^5$ dyn $\quad 1\,m := 10^2$ cm $\Rightarrow 1$ joule $= 10^7$ erg.

(!) İşi neyin yaptığı belirtilmeli. Yukarıdaki örnekte işi, parçacığı ivmelendiren kuvvet yapmıştır. (Gelim, elektrik ve magnetik kuvvetler olabilir)

(!) Potansiyel enerjiden söz ederken, buna alan kuvvetleri veya sistemin kuvvetleri denir. Fakat bir dış etken tarafından uygulanan kuvvetleri de inceleyeceğiz ve bunların yaptıkları işleri ayırt edeceğiz.

BS K

Şimdi de galaksiler arası uzayda değilde, yeryüzünden h uzaklıktan bırakılan bir parçacığı ele alalım. ($y_0 = h$, $v_0 = 0$). Çekim kuvveti $F_ç = -Mg$ cismi aşağı doğru çeker. Cisim yeryüzüne düşerken çekim kuvvetinin yaptığı iş cismin kinetik enerjisindeki artışa eşittir.



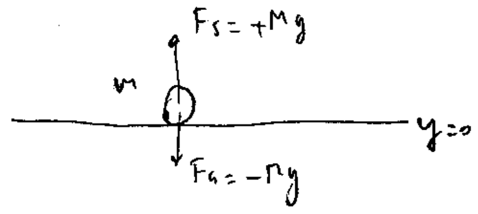
$$W(\text{Çekimden}) = F_ç \times (\cancel{y} - y_0)$$

$$= -(Mg)(-y_0) = (-Mg)(-h)$$

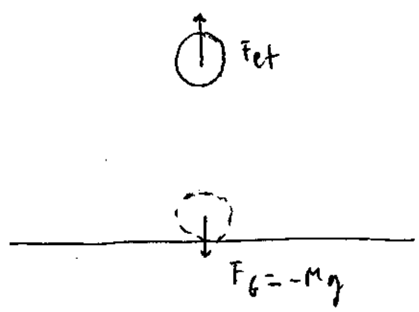
$$= Mgh$$

$$= \frac{1}{2}MV^2 - \cancel{\frac{1}{2}Mv_0^2} = \frac{1}{2}M\underbrace{V^2}_{}$$

(cismin yere vardığı andaki hızı)



7) Bir parçacık yeryüzünde iken h yüksekliğine çıkarılırsa potansiyel enerjisi ne olur? Cismin yükselmesi için yukarı doğru F_{et} ($= -F_ç$) kuvveti uygulanmalıdır. $y_0 = 0$, $y = h$



$$W(\text{bizim yaptığımız}) = F_{et} \times (y - y_0)$$

$$= (Mg)(h) = Mgh$$

sürtünme kuvvetlerinin yokluğunda,

" potansiyel enerji, cismi ivmesiz olarak, potansiyel enerjisi keyfi şekilde sıfır alınan bir konumdan, istenen konuma getirmek için yapılan iş. "

→ Alan kuvvetlerinin cisme etkidiği düşünülürse, onu ivmesiz hareket ettirmek için bu kuvvetlerin bileşkesine eşit ve zıt yönde bir kuvvet uygulanması gerekir.

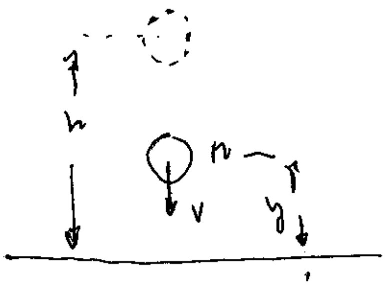
" pozitif potansiyel enerjinin, cismin sıfır noktasına serbest hareketi esnasında kuvvetlerin ürettiği kinetik enerji olarak tanımı da yapılabilir. "

1. pot. enerji sadece konumun (sistemin koord.'larının bir fonk.udur)
2. sıfır noktası her zaman belirtilmelidir. Sadece pt. enerjideki değişimin bir fiziksel anlamı vardır; örneğin bu değişme kinetik enerjiye çevrilebilir ya da tersine kinetik enerjiden elde edilebilir.

v : h kadar düştükten sonraki hızı değil de $(h-y)$ kadar düştükten sonraki hızı gösterir ise

$$\frac{1}{2} m v^2 = mg(h-y)$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + mgy = mgh = E \quad \text{(Enerjinin korunumu)}$$



$$U(y) = mgy$$

$$K(y) = \frac{1}{2} m v^2(y) = mg(h-y)$$

$$E = K + U$$

(yalıtılmış bir sist. de zamanla değişmez.)

$= \text{Kin. Enerj.} + \text{Pot. Enerj.} = \text{Sbt}$

$= \text{top. enerj.}$

(\#) Sıfır pot. enerji konumunu $y = -H$'de seçtiğimizi varsayalım.

$$E' = K + U = \frac{1}{2}Mv^2 + Mg(y+H) = Mg(h+H)$$

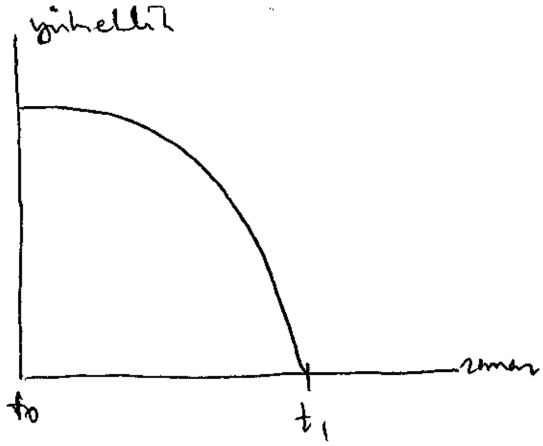
her iki taraftan MgH çıkarılırsa aynı. sıfır konumu sonucu etkilemez.

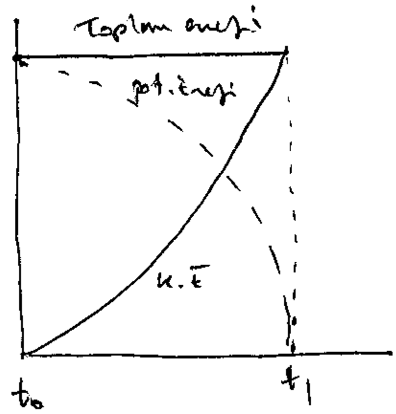
(\#) Bazen $E = K + U$ Enerji fonk.u.

pot. enerji etkiyen kuvvet alanına bağlı: $U = -\int F\,dy$

$$F = -\frac{dU}{dy}$$ Alan kuvveti veya potansiyel kuvveti.

yukarıdaki örnekte $U = Mg\,y$, $F_G = -Mg$





BS K

Örnek: Yukarı yönde fırlatılan cismin serbest hareketi: Bir cismi yukarı yönde 10^3 cm/s'lik süratle atarsak, hangi yüksekliğe çıkar? Atış düzeyinin sıfır pt. enerji olduğunu varsayınız.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Atış noktasında}: \quad E = 0 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m\, 10^6 \text{ erg.} \\ \text{Maks. yükseklikte}: \quad v = 0, \quad E = mgh \end{array}\right\} \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} \approx \frac{10^6}{2.10^3} \approx 500\text{cm}$$

Enerjinin Korunumu: Kavramlar 3-boyuta genellenecek.

" " Yasası: parçacıklar sisteminde karşılıklı etkileşmeler açık olarak zamana bağlı değilse sistemin toplam enerjisi sabittir, der.

Temel problem, enerji fonk.'u için istenen zaman değişmezliğine sahip ve $\vec{F} = m\vec{a}$'ya uygun bir ifade bulmak.

$$\frac{d}{dy} E \equiv \frac{d}{dy}(K+U) = \frac{dK}{dy} - F_y = 0 \qquad F_y = m a_y$$

$$\Rightarrow mv\frac{dv}{dy} + mg = m\frac{dy}{dt}\frac{dv}{dy} + mg = m\frac{dv}{dt} + mg = 0$$

$$m\frac{dv}{dt} = -mg$$

İş: sabit bir $\vec{F}$ kuvvetinin $\Delta\vec{r}$ yerdeğiştirmesi sırasında yaptığı iş,

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F\, \Delta r \cos(\vec{F}, \Delta\vec{r})$$

$\vec{F}$, $\vec{r}$'nin bir fonksiyonu olsun. Yolu N tane doğru parçasına ayıralım. Öyle ki bu doğru parçaları boyunca $\vec{F}(\vec{r})$ sabit olsun.

BS K

$$W = \vec{F}(\vec{r}_1)\cdot\Delta\vec{r}_1 + \vec{F}(\vec{r}_2)\cdot\Delta\vec{r}_2 + \dots + \vec{F}(\vec{r}_N)\cdot\Delta\vec{r}_N$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \vec{F}(\vec{r}_j)\cdot\Delta\vec{r}_j$$

bu ancak sonsuz küçük $d\vec{r}$ yerdeğiştirmeleri için geçerli.

$$\lim_{\Delta r_j \to 0} \sum_j \vec{F}(\vec{r}_j)\cdot\Delta\vec{r}_j = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

Kuvvetin bu yerdeğiştirmede yaptığı iş:

$$W(A\to B) \equiv \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

Kinetik Enerji:

$$\frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2 = F \times (y - y_0) \qquad \text{Genellenecek;}$$

$$\vec{F} = M\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow W(A\to B) = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} M\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} \qquad d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}dt = \vec{v}\,dt$$

$$= M\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B}\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\right)dt$$

$$= M\frac{1}{2}\int_A^B\left(\frac{d}{dt}v^2\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}M\int_A^B d(v^2)$$

$$= \frac{1}{2}Mv_B^2 - \frac{1}{2}Mv_A^2$$

(#) Herhangi bir kuvvetin serbest bir parçacık üzerinde yaptığı iş, parçacığın kinetik enerjisindeki değişme miktarına eşittir. $W(A\to B) = K_B - K_A$

BS K

Örnek : [1] Serbest Düşme : (1) Daha önce verilen bir örneği tekrarlıyacağız. y doğrultusu yeryüzüne dik ve yukarı doğru olursa, çekim kuvveti $\vec{F}_g = -Mg\hat{y}$'dir. Burada g yerçekimi ivmesidir. ve değeri 980 cm/s^2'dir. 100 gr'lık bir cisim 10 cm düştüğünde, yerçekiminin yaptığı işi bulunuz.

$$\vec{r}_A = 0 \quad , \vec{r}_B = -10\bar{y} \qquad \Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = -10\bar{y}$$

yerçekiminin yaptığı iş : $W = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{r} = (-Mg\hat{y}) \cdot (-10\hat{y}) = 9.8 \times 10^5$ erg.

2) 1)'deki parçacığın hızı başlangıçta 1×10^2 cm/s olsa idi 10 cm düşüş sonunda kinetik enerjisi ve hızı ne olurdu ?

Başlangıçtaki değer : $K_A = \frac{1}{2} 100 \, (100)^2 = 5 \cdot 10^5$ erg.

Son değer K_B ise : $K_B = K_A + W = 15 \cdot 10^5$ erg.

$$\Rightarrow v_B^2 \simeq \frac{2 \cdot 15 \cdot 10^5}{100} \simeq 3 \cdot 10^4 \qquad v_B \simeq 1.7 \times 10^2 \text{ cm/s}$$

V_y aşağı, negatif y yönünde olsa idi ; düşen cisimler ile ilgili bağıntılar

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad , \quad v - v_0 = g t$$

$$= v \frac{v - v_0}{g} + \frac{1}{2} g \left(\frac{v - v_0}{g} \right)^2$$

$$2gh = v^2 - v_0^2$$

$$Mgh = \frac{1}{2} M v^2 - \frac{1}{2} M v_0^2 \qquad \text{aynı sonuç.}$$

BS K

Potansiyel Enerji: Yalnızca pot. enerji farklarının bir anlamı var demiştik.

" " : , B ve A noktaları arasında pot. enerji farkının, sistemi A'dan B'ye götürür iken ($A \to B$'ye ivmesiz olarak) yapmamız gereken iş olduğunu söyler.

$$U(\vec r_B) - U(\vec r_A) = W(A \to B) = \int_A^B \vec F_{et} \cdot d\vec r$$

Farkları (+) ya da (−) olabilir.

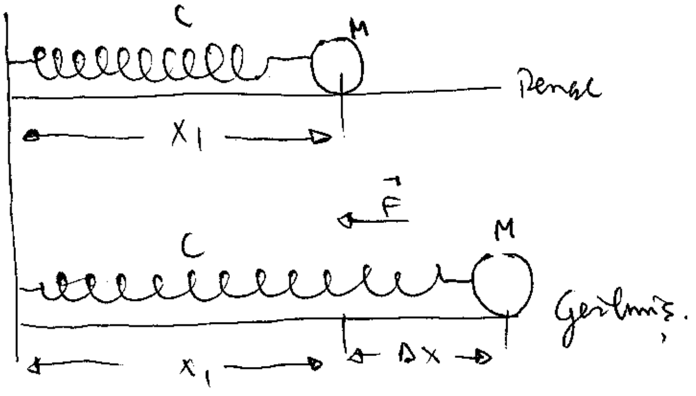
K.E. azalır.

Alan kuvvetlerine karşı iş yaparsak pot. enerji artar $U(\vec r_B) > U(\vec r_A)$ (+)

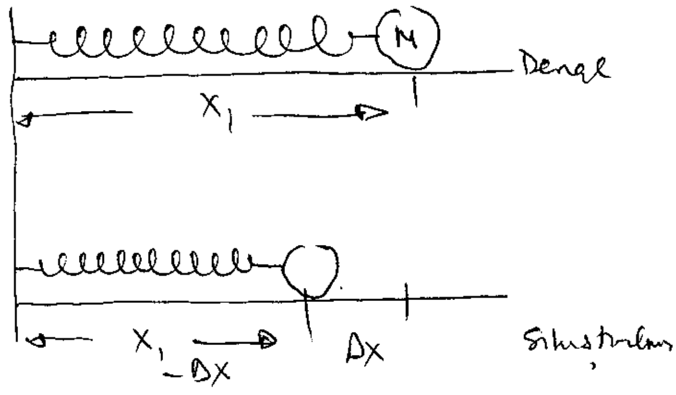
" " bize karşı iş yapmış olursa, pot. enerji azalır. (−)

$U(A)=0$ alınır ise korunumlu kuvvetler için $U(B)$ tek olarak tanımlanır.

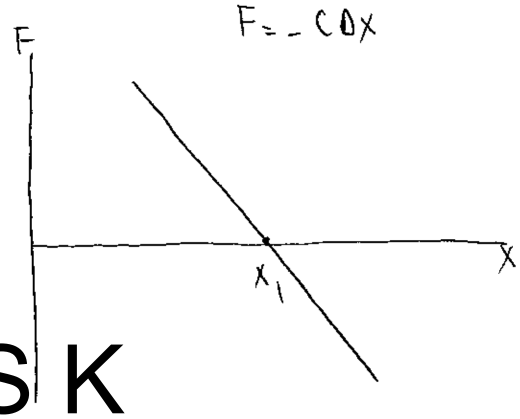
Örnek: Çizgisel geri çağırma kuvveti: Kinetik ve pot. enerji arasındaki dönüşümler. Bir parçacık x doğrultusunda bir çizgisel geri çağırma kuvvetinin etkisindedir. Çizgisel geri çağırma kuvveti sabit bir noktadan ölçülen yerdeğiştirmelere doğru orantılı ve yerdeğiştirmeyi azaltacak yönde bir kuvvettir.



$F = -C\Delta X$



$F = C\Delta X$



Sabit noktayı başlangıç noktası olarak alırsak;

$$\vec{F} = -Cx\bar{x} \quad \text{veya} \quad F_x = -Cx \qquad C>0 \text{ yay sbt. (Hooke kanunu)}$$

Kuvvetin işareti, parçacık her zaman $x=0$ başlangıç noktasına doğru çekilecek şekildedir.

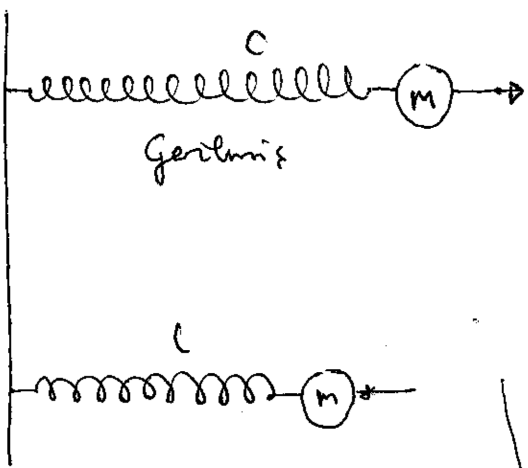
(1) Yaya bağlı bir parçacığa, parçacığı x_1'den x_2'ye götüren kuvveti uyguluyoruz. Bu yerdeğiştirmede yaptığımız iş ne kadardır?

$$\vec{F}_{et} = -\vec{F} = Cx\bar{x}$$

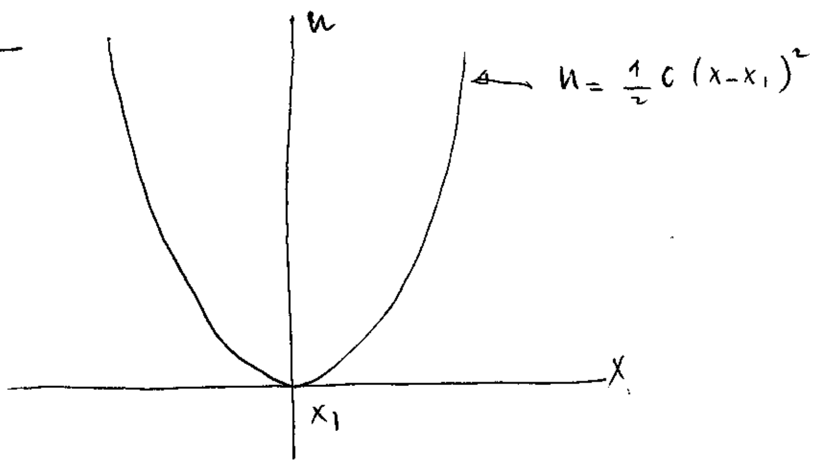
$$W(x_1 \to x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_{et} \cdot d\vec{r} = C\int_{x_1}^{x_2} x\,dx = \frac{1}{2}C(x_2^2 - x_1^2)$$

$x_1 = 0$ denge konumu, pot. enerjinin sıfır konumu olarak seçilirse

$$U(x) = \frac{1}{2}Cx^2$$



$$W = \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} C(x-x_1)\,dx = \frac{1}{2}C(x-x_1)^2 = \frac{1}{2}C(\Delta x)^2$$



BS K

2) M kütleli parçacık X_{max} konumundan durgun halden bırakılırsa, başlangıç noktasına geldiğinde kinetik enerjisi ne olur?

X_{max}'dan başlangıç noktasına gidinceye kadar yayın yaptığı iş:

$$W(X_{max} \to 0) = \frac{1}{2} M V_1^2 \qquad (X_{max}\text{'de } V = 0)$$

(başlangıç noktasındaki hızı)

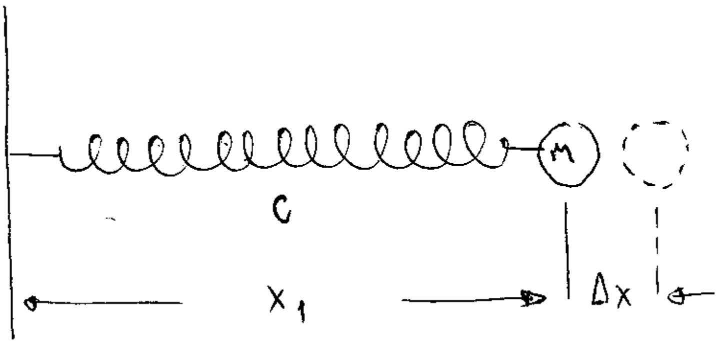
$$\frac{1}{2} C X_{max}^2 = \frac{1}{2} M V_1^2$$

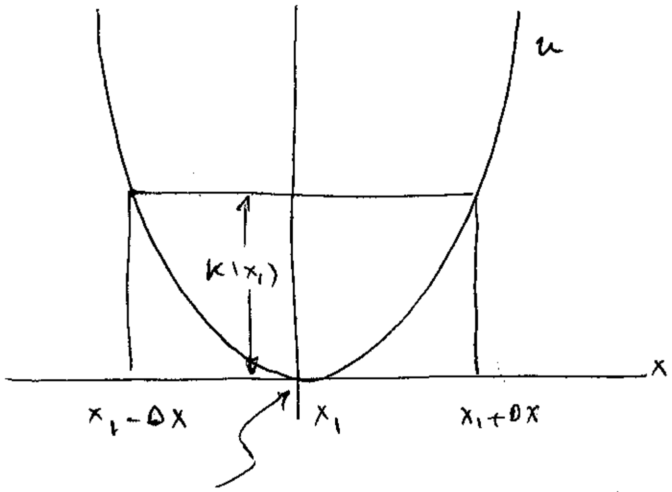
($x = 0$ başlangıç noktasındaki kinetik enerji)

Enerjinin Korunumu: X_{max}'da $K = 0$

böylece $U = \frac{1}{2} C X_{max}^2 = E$

$$\frac{1}{2} M V_1^2 = E = \frac{1}{2} C X_{max}^2$$





3) parçacığın başlangıçtaki hızı ile X_{max} maksimum yerdeğiştirmesi arasındaki bağıntı nedir?

$x = x_1$ de $U = 0$

$K(x_1) = \frac{1}{2} C (\Delta x)^2$

$$V_1^2 = \frac{C}{M} X_{max}^2$$

$$V_1 = \pm \sqrt{\frac{C}{M}}\, X_{max}$$

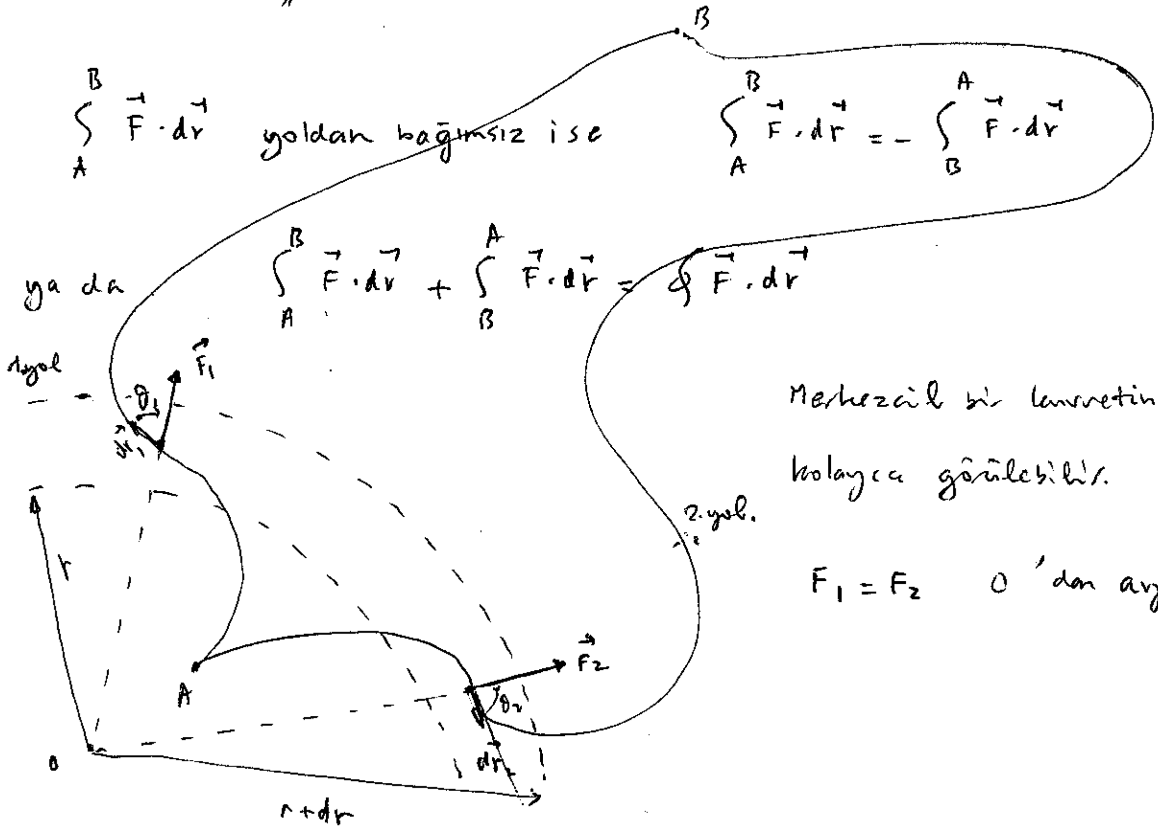
BS K

KORUNUMLU KUVVETLER

"Bir parçacığın A'dan B'ye götürülmesi ile yapılan $W(A \to B)$ işi, A'dan B'ye giderken izlenen yoldan bağımsızsa, parçacığı hareket ettiren kuvvet korunumludur."

$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$ yoldan bağımsız ise $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r}$

ya da $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$



Merkezcil bir kuvvetin korunumlu olduğu kolayca görülebilir.

$F_1 = F_2$ O'dan aynı uzaklıktalar.

Yol parçalarının $\vec{F}_1$ ve $\vec{F}_2$ üzerindeki izdüşümleri eşittir;

$$dr_1 \cos\theta_1 = dr_2 \cos\theta_2$$

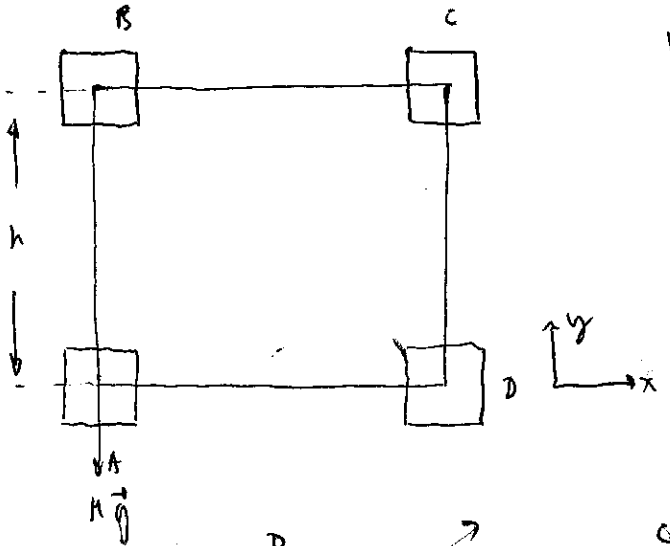
$$\Rightarrow F_1\, dr_1 \cos\theta_1 = F_2\, dr_2 \cos\theta \quad , \quad F_1 = F_2$$

$$\Rightarrow \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 = \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2$$

$$\int_A^B \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 \longrightarrow \underset{(1.yol)}{\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}} = \underset{(2.yol)}{\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

$$W(A \to B) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

BS K



$$W(AB) = \int_A^B \vec F \cdot d\vec r$$

$$= \int_A^B (-Mg\,\bar y)\cdot dy\,\bar y$$

$$= -Mg \int_A^B dy = -Mgh$$

$$W(ADCB) = \int_A^D \cancel{(-Mg\,\bar y)\cdot dx\,\bar x} + \int_D^C (-Mg\,\bar y)\cdot dy\,\bar y + \int_C^B \cancel{(-Mg\,\bar y)\cdot dx\,\bar x}$$

$$= -Mgh$$

$$\boxed{W(AB) = W(ADCB)}$$

(!) Korunumlu kuvvetlerin kapalı bir yol boyunca yaptığı iş sıfırdır.

(!) Hıza bağlı bazı kuvvetler ($\vec F = \frac{q}{c}\,\vec v \times \vec B$) korunumludur çünkü doğrultuları parçacığın hareket yönüne diktir ve $\vec F \cdot d\vec r$ her zaman sıfırdır.

(!) Hıza bağlı kuvvetler (sürtünme kuvvetleri) korunumlu değil.

(!) Bir problemde etkiyen kuvvetleri bildiğimizde pot. enerjinin nasıl hesaplanacağını görmüştük. 1) sıfır noktası seçeriz, 2) sistemi bu noktadan istenen noktaya yavaşça ivmesiz taşırız 3) yaptığımız işi hesaplarız $\vec F_{et} = -\vec F$

$U(A) = 0$ varsayılırsa;

$$\int_A^{B(=\vec r)} \vec F_{et}\cdot d\vec r = -\int_A^{r} \vec F \cdot d\vec r = U(r) - U(A) = U(r)$$

Potansiyel enerjiyi bilmek kuvvetleri hesaplamamızı sağlar mı? Sağlar!

$$U(x) - U(A) = -\int_A^x F\,dx \qquad \text{(Tek boyutta)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dU}{dx} = -F$$ bunu yukarıda yerine koyarak sınayabiliriz.

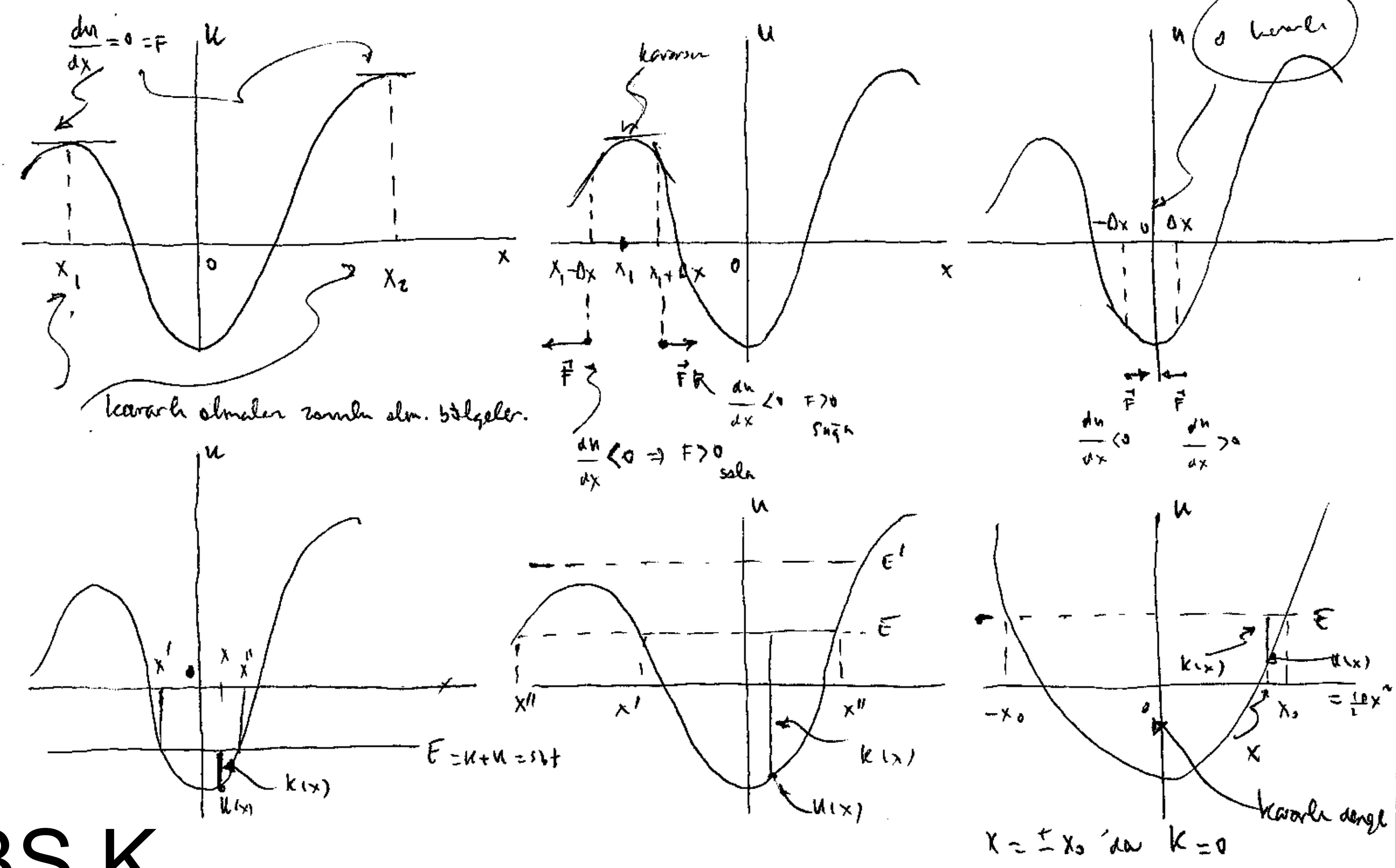
$$-\int_A^x F\,dx = \int_A^x \frac{dU}{dx}\,dx = \int_A^x dU = U(x) - U(A)$$

üç boyutta: $$\vec{F} = -\bar{x}\frac{\partial U}{\partial x} - \bar{y}\frac{\partial U}{\partial y} - \bar{z}\frac{\partial U}{\partial z} \qquad U = U(x,y,z)$$

$$= -\vec{\nabla} U \equiv \text{grad}\, U$$

$$\vec{\nabla} = \bar{x}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{y}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{z}\frac{\partial}{\partial z}$$ kartezyen koord.

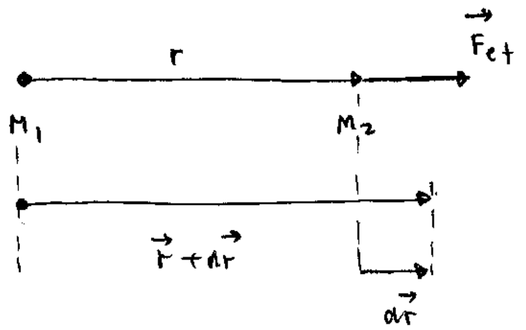
$$\vec{\nabla} = \bar{r}\frac{\partial}{\partial r} + \bar{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$ düzlem kutupsal koord.



BS K

Çekim ve Elektrik Alanlarında Potansiyel Enerji ve Enerjinin Korunumu:

Newton'un evrensel çekim yasasını alalım (korunumlu). M_1 ve M_2 kütleli cisimlerin aralarındaki uzaklığı $\vec{r}_A$ alır ve bunu $\vec{r}$'ye değiştirmek için bizce yapılan işi hesaplarız.



$$dW = \vec{F}_{et}\cdot d\vec{r} = G\frac{M_1M_2}{r^3}\,\vec{r}\cdot d\vec{r} = G\frac{M_1M_2}{r^2}\,dr$$

$$W = \int_{r_A}^{r} G\frac{M_1M_2}{r^2}\,dr = -G\frac{M_1M_2}{r}\Big|_{r_A}^{r}$$

$$= -G\frac{M_1M_2}{r} + G\frac{M_1M_2}{r_A}$$

$r > r_A \Rightarrow W > 0$ sisteme iş veririz.

$r < r_A \Rightarrow W < 0$ iş yapılır

$r_A = \infty$ alınır ise

$$\Rightarrow U(r) = -\frac{GM_1M_2}{r}$$

$r = r_A$'da $U = 0$ alınır ise

$$U(r) = -G\frac{M_1M_2}{r} + \frac{GM_1M_2}{r_A}$$

$U(r\to\infty) = 0$ pot. enerji her zaman $(-)$ olacaktır. Çünkü kütleleri ∞'dan yavaşça biraraya getirirsek sistemden her zaman iş alabiliriz.

BS K

M kütleli bir cismin çekim alanında hareket eden M_1 kütleli cisim için mekaniksel enerjinin korunumu ($M \gg M_1$, M'nin hareketi ihmal)

$$E = \frac{1}{2} M_1 V_A^2 - G \frac{M_1 M}{r_A} = \frac{1}{2} M_1 V_B^2 - G \frac{M_1 M_2}{r_B}$$

(#) Elektrik Alandaki duruma bakalım:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} = \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}$$

q_1 sabit olsun ve q_2'yi yavaşça r_A'dan r'ye getirmek için yapılan işi bulalım. Uygulamamız gereken kuvvet,

$$\vec{F}_{et} = -\vec{F} = -\frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r} \qquad \vec{r} \uparrow\uparrow d\vec{r}$$

$$dW = \vec{F}_{et} \cdot d\vec{r} = -\frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{r} = \frac{q_1 q_2}{r^2} dr$$

$$W = -\int_{r_A}^{r} \frac{q_1 q_2}{r^2} dr = \frac{q_1 q_2}{r} \Big|_{r_A}^{r} = \frac{q_1 q_2}{r} - \frac{q_1 q_2}{r_A}$$

$U(r=\infty) = 0$ alalım.

$$\boxed{U(r) = \frac{q_1 q_2}{r}} \quad \begin{cases} +\dfrac{q_1 q_2}{r} & q_1, q_2 > 0,\ q_1, q_2 < 0 \\ -\dfrac{q_1 q_2}{r} & (q_1 > 0, q_2 < 0),\ (q_1 < 0, q_2 > 0) \end{cases}$$

bırakmaya getirmek için iş yapmalıyız

pot. enerji UBS birimlerinde $U(r) = k \frac{q_1 q_2}{r}$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U(r) = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{q_1 q_2}{r}\right)\hat{r} = \frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U(r) = -\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{GM_1M_2}{r}\right)\hat{r} = -\frac{GM_1M_2}{r^2}\hat{r}$$

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$; F_x, F_y, F_z hesaplanabilir.

$$F_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{GM_1M_2}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right] = -G\frac{M_1M_2\, x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -G\frac{M_1M_2}{r^3}x$$

$$\vec{F} = F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z} = -G\frac{M_1M_2}{r^2}\hat{r}$$

\# r'deki elektrostatik potansiyel $\Phi(\vec{r})$ diğer bütün yüklerin kuvvet alanında bulunan birim artı yüke düşen pot. enerji

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{U(r)}{q} = \int_r^{\infty} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

\# $\vec{r}_1$ ve $\vec{r}_2$ noktaları arasındaki pot. farkı

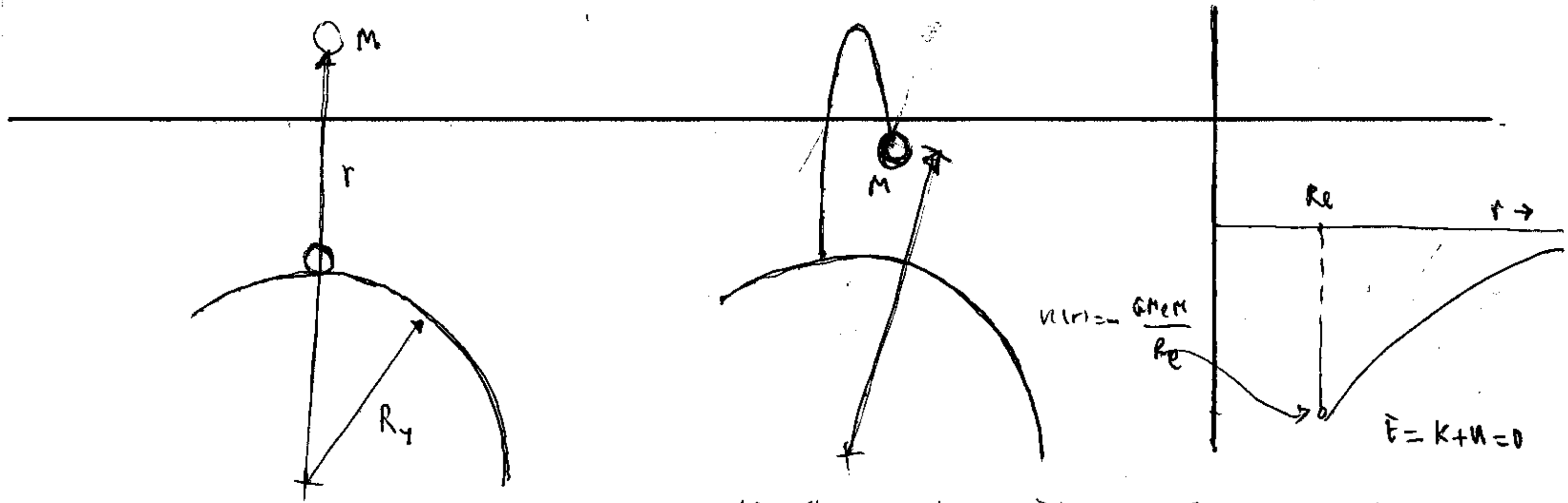
$$P.F = \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1)$$

bu noktalar arasında hareket ettirilen q yükü için pot. farkı,

$$U(r_2) - U(r) = q\,(\Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1))$$

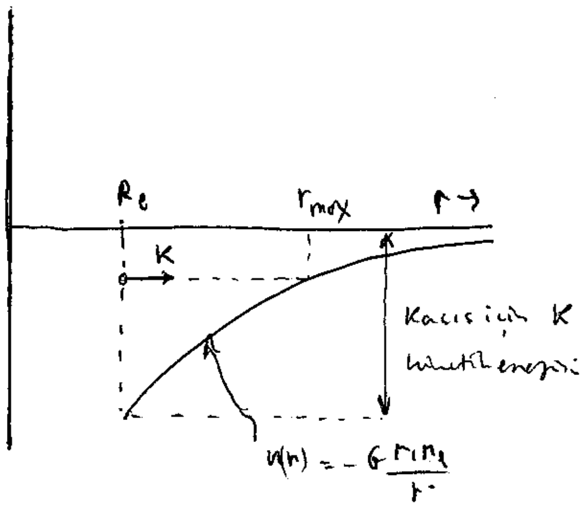
BS K

Örnek. Dünyadan ve Güneş Sisteminden Kurtulma Hızı: M kütleli bir parçacığın (1) dünyadan (2) güneş sisteminden kurtulması için gerekli hızı hesaplayınız. (Dünyanın dönmesini ihmal ediniz.



Kinetik Enerji kaçış için çok küçük olduğu zaman görünüşe.

Kin. enerji kaçış için çok küçük. Sonunda kaçmak için $K \geq |-U|$



kaçış için gerekli minimum kinetik enerji:

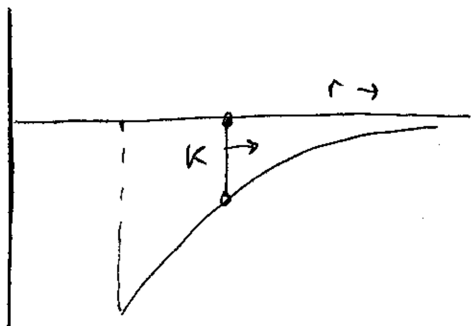
$$K = \frac{1}{2} M V_y^2 = G\frac{M_y M}{R_y}$$

$$E = \frac{1}{2} M v^2 - G\frac{M_y M}{R}$$

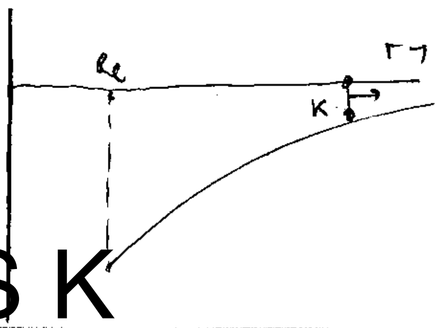
$M_y = 5.98 \times 10^{27}$ gr

$R_y = 6.4 \times 10^{8}$ cm

$G = 6.67 \times 10^{-8}$ cgs



Bir süre sonra U artar ve M yermerkezinden uzaklaştıkça K azalır.



K ve |U| daha da azalır.

20

Yerden sonsuz uzağa mümkün olan en küçük hızla (sıfır hızla) varabilmesi için toplam enerji sıfır dır. Fırlatılma ile kurtulma arasında parçacığın toplam enerjisi sabit ise, $\bar{E}$ sıfır olmalıdır.

$$\frac{1}{2} M V_k^2 = G \frac{M_y M}{R_y} \Rightarrow V_k = \sqrt{2G \frac{M_y}{R_y}} = \sqrt{2 g R_y} \approx 10^4 \text{ m/s} \approx 10^6 \text{ cm/s}$$

yerden atılan bir parçacığın güneşten (güneşin çekim alanından) kurtulma hızı

$$V_{kg} = \sqrt{2G \frac{M_G}{R_{yg}}} \approx 4 \times 10^6 \text{ cm/s}$$

Örnek: Yeryüzü yakınında çekim potansiyeli: Yer merkezinden r uzaklıktaki M kütleli bir cismin çekim potansiyel enerjisi, $r > R_y$ için

$$U(r) = -G \frac{M M_y}{r}$$

y yeryüzünden olan yükseklik ise $y \ll R_y$, $y/R_y \ll 1$ için

$U \simeq -M g R_y + M g y$ olduğunu göstermek istiyoruz.

$g = G M_y / R_y^2 \simeq 980 \text{ cm/s}^2$.

$r = R_y + y$ alırsak $\Rightarrow$ $U = -G M M_y \frac{1}{R_y + y} = -G M M_y \frac{1}{R_y} \frac{1}{1 + \frac{y}{R_y}}$

$$U = -G \frac{M M_y}{R_y} \left(1 - \frac{y}{R_y} + \frac{y^2}{R_y^2} + \cdots\right)$$

$$= -M g R_y \left(1 - \frac{y}{R_y} + \frac{y^2}{R_y^2} - \cdots\right) \checkmark$$

$y/R_y \ll 1$

BS K

Örnek: Mermi Hareketi : Burada sabit çekim alanında iki boyutlu harekete bir örnek daha veriyoruz. Newton'un II. yasasını kullanarak, problemi daha önce çözmüştük.

Kuvvet $\vec{F}_\varsigma = -mg\bar{y}$ olsun. ($g \simeq 980\ cm/s^2$)

1) 100 gr kütleli bir parçacık başlangıç noktasından

$$\vec{r} = 50\bar{x} + 50\bar{y}$$

konumuna gelinceye kadar yerçekiminin yaptığı işi hesaplayınız.

$$W = \int_{0,0}^{50,50} \vec{F}_\varsigma \cdot d\vec{r} = -mg\bar{y} \cdot (50\bar{x} + 50\bar{y}) = -4.9 \times 10^6\ erg$$

2) Bu yerdeğiştirmede pot. enerji değişmesi nedir?

$$\vec{F}_{ef} = +mg\bar{y}$$

$$U = -W = +4.9 \times 10^6\ erg. \quad \text{pot. enerji bu kadar artar.}$$

$(x=0, y=0)$'da $U=0 \Rightarrow U = mgy$'dir.

3) m kütleli bir parçacık başlangıç noktasından v_0 süratle ve yatayla θ açısında atılırsa ne kadar yükselir?

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2}m(v_0^2\cos^2\theta + v_0^2\sin^2\theta)$$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2\cos^2\theta + mgy_{max}$$

$$\Rightarrow \quad y_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$$

BS K

Örnekler :

Elektrostatik Alan : Bir protondan 1Å ($=10^{-8}$ cm) uzaklıktaki elektrik alanın büyüklüğü ne kadardır?

$$E = \frac{e}{r^2} \approx \frac{5.10^{-10} \text{ statCoulomb}}{(1.10^{-8} \text{ cm})^2} \simeq 5.10^{6} \text{ statvolt/cm}$$

$$\approx (300)(5.10^{6}) \text{V/cm} \simeq 1.5 \times 10^{9} \text{ V/cm}$$

UBS $\quad E = k\frac{e}{r^2} = (9.10^{9}) \frac{1.6 \times 10^{-19}}{(1 \times 10^{-10})^2} = 1.5 \times 10^{11} \text{ V/m}$

Potansiyel : Bu noktadaki potansiyel nedir?

$$\Phi(r) = \frac{1}{q} \frac{qe}{r} = \frac{e}{r} \simeq \frac{5.10^{-10}}{1.10^{-8}} \simeq 5.10^{-2} \text{ statvolt} \simeq 15 \text{ V}$$

UBS $\quad \Phi(r) = k\frac{e}{r} = (9.10^{9}) \frac{1,6 \times 10^{-19}}{1.10^{-10}} \simeq 15 \text{ V}$

Örnek: ElektronVolt, bir volt potansiyel farkı olan iki nokta arasında, e yükünün potansiyel enerjisindeki değişme veya 1 volt'luk bir pot. farkı içine düşen e yükünün kazandığı kinetik enerji.

$$1 \text{ eV} \simeq (4.8 \times 10^{-10} \text{ statCoulomb}) \left(\frac{1}{300} \text{ statvolt}\right)$$

$$= 1.6 \times 10^{-12} \text{ erg}$$

$$= 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 1 \text{ volt}$$

$$= 1,6 \times 10^{-19} \text{ Joule}$$

BS K

Bir α - parçacığı (He^4 çekirdeği veya çift iyonlanmış Helyum atomu) 10^3 Volt'luk bir pot. farkından geçerek, durgun halden ivmelenir. Kinetik enerjisi

$$2e \times 10^3 \text{ Volt} = 2.10^3 \text{ eV}$$

$$= (2.10^3)(1.6 \times 10^{-12}) = 3.2 \times 10^{-9} \text{ erg.}$$

$$K_B - K_A = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad ; \quad U_B - U_A = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$(K_B + U_B) - (K_A + U_A) = 0$$

kinetik ve pot. enerjiler toplamı zamandan bağımsız olan bir sbt'dir.

$$E = \frac{1}{2} M V^2(A) + U(A) = \frac{1}{2} M V^2(B) + U(B)$$

Bunu bir dış pot. alanında bulunan iki parçacık sistemi için genelleştirilmiş olarak yazalım.

$$E = K + U$$

$$= \frac{1}{2} M_1 V_1^2 + \frac{1}{2} M_2 V_2^2 + U(\vec{r}_1) + U(\vec{r}_2) + U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \text{sbt.}$$

1 ve 2 parçacıkları yerin çekim alanında bulunan protonlar olsa,

$$E = \frac{1}{2} M (v_1^2 + v_2^2) + Mg(y_1 + y_2) - \underbrace{G\frac{M^2}{r_{12}} + \frac{e^2}{r_{12}}}$$

$$r_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$$

bu iki kısmın oranı:

$$\frac{GM^2}{e^2} \approx \frac{10^{-7} \times 10^{-48}}{10^{-19}} \approx 10^{-36}$$

BS K

GÜÇ: Enerjinin zamana göre değişme oranıdır. Kuvvetin $\Delta\vec{r}$ yerdeğiştirmesinde yaptığı iş,

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

Kuvvetin iş yapma hızı,

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$W(t_1 \to t_2) = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt \quad \begin{cases} \text{cgs} & \text{erg/s} \\ \text{UBS} & \text{J/s (Wat)} \end{cases}$$

BS K