BÖLÜM 6

ÇİZGİSEL ve AÇISAL MOM. KORUNUMU

İÇ KUVVETLER ve MOMENTUM KORUNUMU : Parçacıklar arası kuvvetlere, sistemin iç kuvvetleri denir. Bu kuvvetler parçacıklar topluluğunun toplam momentumunu etkilemez. Toplam momentum,

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$$

III. Yasa : $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$

(#) Herhangi bir parçacık çiftinin etkileşmesi başka parçacıkların varlığından etkilenmezse, bu tartışma bütün parçacık çiftleri için geçerlidir (parçacık çiftinin etkileşmesinden ileri gelen mom. değişimi sıfırdır). Böylece tüm parçacıklararası kuvvetlerin vektörel toplamı sıfır olduğundan, iç kuvvetler toplam momentumu etkilemez.

→ bunu açısal mom. korunumuna genelleştireceğiz.

KÜTLE MERKEZİ

N parçacıklı bir sistemin kütle merkezinin $\vec{R}_{KM}$ konumu (sbt bir O merkezine göre)

$$\vec{R}_{KM} = \frac{\sum_{n=1}^{N} \vec{r}_n M_n}{\sum_{n=1}^{N} M_n}$$

İki parçacık : $$\vec{R}_{KM} = \frac{\vec{r}_1 M_1 + \vec{r}_2 M_2}{M_1 + M_2}$$

KM'nin hızı $$\dot{\vec{R}}_{KM} = \frac{\sum_n \dot{\vec{r}}_n M_n}{\sum_n M_n} = \frac{\sum_n \vec{v}_n M_n}{\sum_n M_n}$$

→ sistemin toplam mom.

Dış kuvvetlerin yokluğunda (toplam mom. sbt) : $\dot{\vec{R}}_{KM} = \overrightarrow{sbt}$

BS K

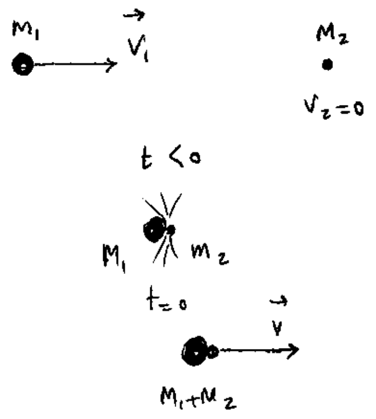
KM 'nin ivmesi parçacıklar sist. 'ine etkiyen toplam dış kuvvetle bulunur.

$$\sum_n M_n \ddot{\vec{R}}_{KM} = \sum_n (M_n \dot{\vec{V}}_n) = \sum_n \vec{F}_n = \vec{F}_{dış}$$

(#) Dış kuvvetlerin varlığında, KM 'nin vektörel ivmesi, dış kuvvetlerin vektörel toplamının, sist. 'in toplam kütlesine bölümüne eşittir.

ÖRNEK: Birbirine yapışan parçacıkların çarpışması: çarpışma sonucu birbirine yapışan M_1 ve M_2 kütleli parçacıkları ele alalım. M_2 çarpışmadan önce hareketsiz ve başlangıç konumunda olsun. $\vec{V}_1 = V_1 \bar{x}$ bağıntısı M_1 'in çarpışmadan önceki hareketini tanımlasın.

1) $M = M_1 + M_2$ 'nin çarpışmadan sonraki hareketini belirtiniz.



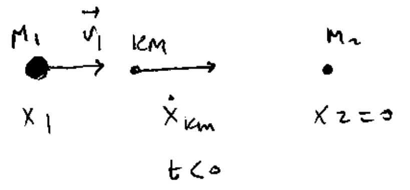
$$M_1 V_1 = (M_1 + M_2) V$$

$$V = \frac{M_1}{M_1 + M_2} V_1$$

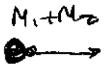
parçacıklar yapışık olduğundan; $X_{km} = V t \bar{x}$ $\quad t > 0$

$$= \frac{M_1}{M_1 + M_2} V_1 t$$

$$\dot{X}_{km} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} V_1$$



2) Çarpışmadan sonra KE 'nin başlangıçtaki KE 'ye oranı nedir?



$V = \dot{X}_{km}$ $\quad t > 0$

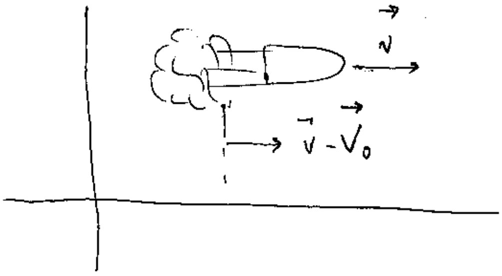
$$K_S = \frac{1}{2} (M_1 + M_2) \frac{M_1^2}{(M_1 + M_2)^2} V_1^2 = \frac{M_1^2 V_1^2}{2(M_1 + M_2)}$$

$$\Rightarrow \frac{K_S}{K_b} = \frac{M_1}{M_1 + M_2}$$ (Enerjinin geri kalanı iç uyarılma ve ısı.)

BS K

ÖRNEK: Uzay-aracı problemi: Bir uzay aracı, araca göre $\vec{V}_0$ hızla yakıt gazları saçıyor; aracın kütlesinin değişme oranı $\dot{M} = -\alpha$ sbt.'tir. Çekim kuvvetini ihmal ederek uzay aracının hareket denklemini kurunuz ve çözünüz.

Aracın t anındaki hızı $\vec{v}$ olsun. Araçta olmayan bir eylemsiz gözlem çerçevesinden yakıtın hızı $-\vec{V}_0 + \vec{V}$



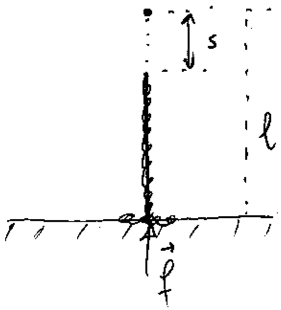
$$\frac{dp}{dt} = \underbrace{M\dot{v}}_{\substack{\text{(ivmeden ötürü)}\\ \text{aracın mom. kazanma oranı}}} - \underbrace{\cancel{v\alpha}}_{\substack{\text{kütle kaybından dolayı}\\ \text{aracın mom. kaybı oranı}}} + \underbrace{(v-V_0)\,\alpha}_{\substack{\text{(yanmış gazların mom.'undaki}\\ \text{artma oranı)}}} = 0 \quad \text{(sist. top. mom.'u sbt.)}$$

$$M\dot{v} = \alpha V_0 \qquad \dot{M} = -\alpha \Rightarrow M(t) = M_0 - \alpha t$$

$$\Rightarrow (M_0 - \alpha t)\,\dot{v} = \alpha V_0 \Rightarrow \dot{v} = \frac{\alpha V_0 / M_0}{1 - \alpha t / M_0}$$

$$v = V_0 + V_0 \ln \frac{M_0}{M_0 - \alpha t}$$

ÖRNEK: Düşen zincirin kuvveti: Düşey olarak asılmış düzgün bükülebilir bir zincirin, durgun bir masa üzerine düşerken masa üzerine ettiği kuvvet bilinen bir örnektir. Alt ucu tam masaya değecek şekilde asılmış böyle bir zincir alalım. Şekildeki zincir bırakıldıktan sonra, yani s kadar düştükten ve zincirin s uzunluğu masaya yığıldıktan sonra gösteriliyor.



→ ρ: çizgisel yoğunluk.

→ dt zaman aralığında $\dot{s}$ hızla hareket eden $\rho\, ds$ kütleli masaya gelir.

∴ masaya yığılmaktan ötürü zincirin mom.'undaki değişme oranı $\rho \dot{s} \left(\frac{ds}{dt}\right) = \rho \dot{s}^2$. Masa ayrıca daha önce gelmiş olan zincir parçasının $\rho g s$ ağırlığını da taşımalıdır.

$$f = \rho g s + \rho \dot{s}^2$$

$$\dot{s}^2 = 2gs \quad \left(\begin{array}{l}\text{serbest düşen hareketin}\\ \text{ivmesi } g \text{ olduğundan}\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow f = 3\rho g s$$

BS K

AÇISAL MOMENTUMUN KORUNUMU:

Bir parçacığın sbt bir noktaya göre (bir eylemsizlik çerçevesinde sbt) açısal momentumu,

$$\vec J = \vec r \times \vec p = \vec r \times M\vec v$$

$\vec J$'nin sbt bir noktadan geçen bir doğru (veya eksen) üzerindeki bileşenine, parçacığın bu eksen etrafındaki açısal mom.'u denir.

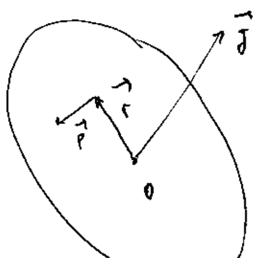
→ Parçacık üzerine $\vec F$ kuvveti etkirse

$$\vec N = \vec r \times \vec F$$

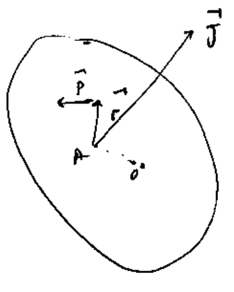
$$\frac{d\vec J}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec r \times \vec p) = \cancel{\frac{d\vec r}{dt} \times \vec p} + \vec r \times \frac{d\vec p}{dt} = \vec r \times \vec F = \vec N$$

$$\frac{d\vec J}{dt} = \vec N$$

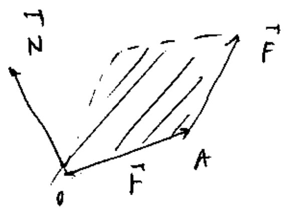
Dönme mom.'i sıfır olursa $J = sbt$'tir. Açısal mom.un korunum yasasının bir ifadesidir.

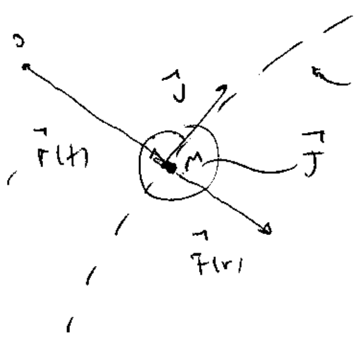


O noktasına göre $\vec J$.



A noktasına göre farklı.





← M'nin yörüngesi $\vec F(r)$ merkezsel $\vec N = \vec r \times \vec F = 0 \Rightarrow \vec J = sbt$

$\vec F = \hat r\, f(r)$ merkezsel kuvveti olsun.

$\vec N = \vec r \times \vec F = \vec r \times \hat r\, f(r) = 0 \qquad \frac{d\vec J}{dt} = 0 \qquad \vec J = \overrightarrow{sbt}.$

İç Kuvvetlerden Gelen Dönme Mom.'lerinin Toplamı Sıfırdır: Bir sistemin parçacıkları arasında bulunabilecek etkileşme kuvvetleri, iç dönme mom.lerine yol açar. Bunların toplamının sıfır olduğunu göstereceğiz öyle ki sadece dış kuvvetlerden gelen dönme mom.leri bir sistemin açısal mom.unu değiştirebilir.

$$\vec{N} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$\vec{F}_i = \underbrace{\vec{f}_i}_{(\text{dış})} + \sum_{j=1}^{\prime} \underbrace{\vec{f}_{ij}}_{(\text{parçacıklararası})} \qquad j \neq i$$

$$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \times \left(\vec{f}_i + \sum_j^{\prime} \vec{f}_{ij} \right) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i + \underbrace{\sum_{ij}^{\prime} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}}_{(\text{iç kuvvetlerden doğan toplam dönme momenti})}$$

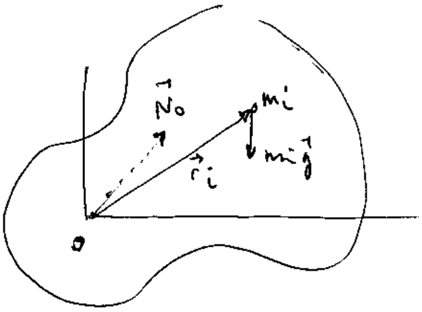
$$\vec{N}_{iç} = \sum_i \left[\sum_j^{\prime} (\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji}) \right]$$

$$= \sum_i \left[\sum_j^{\prime} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij} \right]$$

kuvvetler $\uparrow\downarrow$ $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ $\quad \vec{N}_{iç} = 0$ (merkezil olmayan kuvvetler için de doğru.)

Yerçekiminden Ötürü Dönme Momenti: Uzantılı bir cisim (yani nokta kütlelerden oluşan veya sürekli kütle dağılımlı bir cisim) içinde tüm çekim kuvvetlerinden doğan dönme mom.lerinin sıfır olacağı bir nokta bulabilir miyiz? Örneğin düzgün bir çubuk bir ucundan tutulursa, çubuk düşey olmadığı müddetçe o uç etrafında bir dönme mom.i etkiyecektir. Dönme momenti olmaması için çubuğun ortadan tutulacağı açıktır fakat problemi genel olarak inceleyelim.

O'ya göre dönme momenti,



$$\vec N_0 = \sum \vec r_i \times m_i \vec g$$

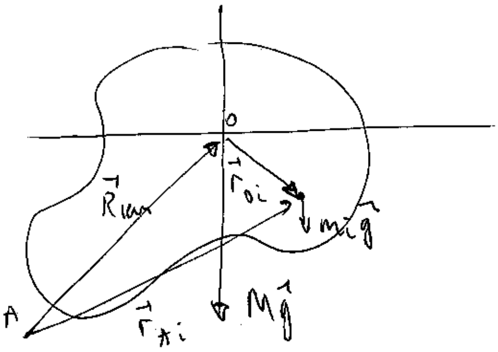
$$= \left(\sum_i \vec r_i \times m_i \hat g\right)$$

$$= \left(\sum_i m_i \vec r_i\right) \times \vec g$$

$$= \left(\sum_i m_i\right) \vec R_{km} \times \vec g$$

O Km ise $\sum m_i \vec r_i = 0 \Rightarrow \vec N_0 = \vec 0$.

Km değilse; $\sum_i \vec F_i = \sum_i m_i \vec g = M \vec g = \vec F_{cek}$



$$\vec N_A = \sum_i \vec r_{Ai} \times m_i \vec g = \sum \left(\vec R_{A0} + \cancel{\vec r_{0i}}\right) \times m_i \vec g$$

$$= \vec R_{A0} \times \sum_i m_i \vec g = \vec R_{A0} \times M \vec g = \vec R_{km} \times M \vec g$$

Kütle merkezine göre açısal momentum: Bir parçacıklar sisteminin, bir eylemsizlik gözlem çerçevesindeki herhangi bir sbt noktaya göre açısal momentumu,

$$\vec J = \sum_i M_i \vec r_i \times \vec v_i$$

başlangıç noktasından Km'ye giden vektör.

$$= \sum_i M_i \left(\vec r_i - \vec R_{km}\right) \times \vec v_i + \sum_i M_i \vec R_{km} \times \vec v_i$$

$$= \vec J_{km} + \underbrace{\vec R_{km} \times \vec P}$$

toplam çizgisel mom.

km etrafındaki

Km'nin başlangıç noktasına göre hareketinden.

BS K

$\vec{N}_{iç} = 0$ olduğundan $\dfrac{d\vec{J}_{top}}{dt} = \vec{N}_{dış}$; $\vec{J}_{top} = \vec{J}_{km} + \vec{R}_{KM} \times \vec{P}$

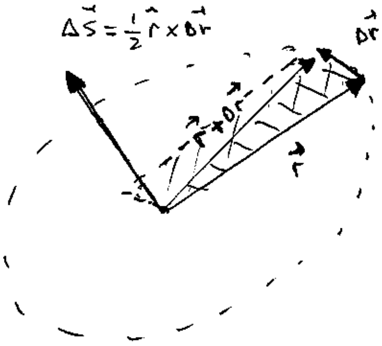
KM 'ne göre — küt. merk.-nin başlangıç noktasına göre.

(#) Dış kuvvetler yoksa $\vec{N}_{dış} = 0$ ve $\vec{J}_{top} = \overrightarrow{sbt}$.

Başlangıç noktası KM seçilirse $\dfrac{d\vec{J}_{km}}{dt} = \vec{N}_{dış}$, $\vec{N}_{dış} = 0 \Rightarrow \vec{J}_{km} = \overrightarrow{sbt}$.

KM 'nin hareketinin cisme etkiyen dış kuvvetlerle belirlendiğini görmüştük. Şimdi de KM etrafında dönmenin toplam dış mom.'i belirlediğini görüyoruz.

(#) Başlangıç noktasını çevreleyen bir yörüngede dolanan bir parçacığın açısal mom.'unun geometrik anlamı ;



$$\Delta\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \Delta\vec{r}$$

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2M}\vec{r} \times \vec{p} = \frac{1}{2M}\vec{J}$$

uygun bir başlangıç noktası seçimi ile, merkezcil kuvvetler için,

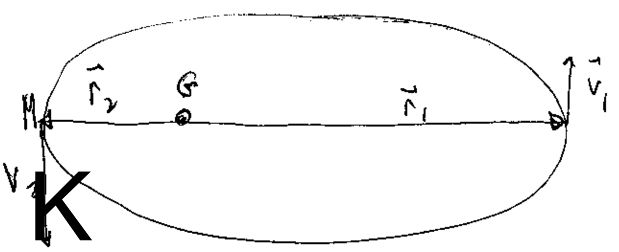
$$\vec{J} = \overrightarrow{sbt}.$$

Merkezcil kuvvetler için ; $\vec{r}, \Delta\vec{r} \perp \vec{J}$, $\vec{J} = \overrightarrow{sbt}$.

1.) Yörünge düzlem içindedir.

2.) Alan süpürme hızı sbt.'tir. $\dfrac{d\vec{S}}{dt} = \overrightarrow{sbt}$, $\dfrac{d\vec{J}}{dt} = 0$ (Kepler'in 3. yasası)

Gezegenler odaklarından birinde güneş bulunan eliptik yörüngede dolanırlar. Açısal momentumu korumak için en yakın noktada en hızlı, en uzak noktada en hızlı hareket ederler.



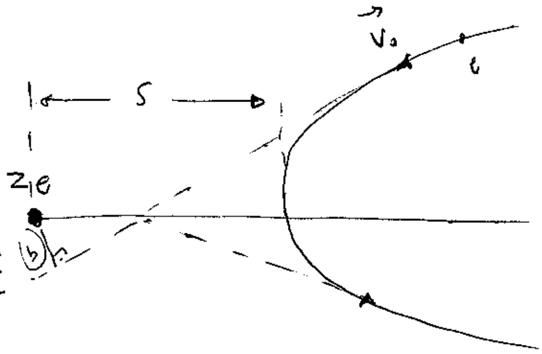
→ Bir çember üzerinde dolanan bir parçacık için $\vec{V} \perp \vec{r}$

$$J = MVr = M\omega r^2$$

→ Başlangıç noktasından b kadar uzağından geçen bir doğru üzerinde hareket eden bir parçacık için

$$\vec{J} = \vec{r} \times M\vec{V} = MVb\,\hat{u}$$ $\hat{u}$: düzleme dik birim vektör.

ÖRNEK: Ağır çekirdekle proton saçılması: Bir proton, yükü Ze olan çok ağır bir çekirdeğe yaklaşıyor. Sonsuz uzakta iken protonun enerjisi $\frac{1}{2}M_pV_0^2$'dir. Uzaktayken protonun yörüngesi doğrusaldır; bu yörüngenin uzantısı, şekildeki gibi, ağır çekirdeğe en az b kadar yakın geçecektir. Bu uzaklığa vurma parametresi denir. Gerçek yörüngenin çekirdeğe en yakın uzaklığı ne kadardır?



protonun ağır çekirdek etrafındaki başlangıç momenti M_pV_0b

s ile gösterilen en yakın uzaklığa geldiğinde $M_pV_s s$

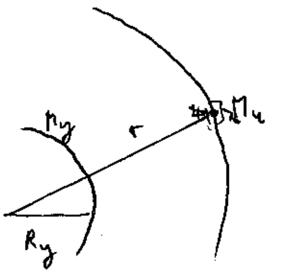
$$M_pV_0b = M_pV_s s \Rightarrow V_s = \frac{V_0 b}{s}$$ Ağır çekirdek durgun.

En. korunumu : $\frac{1}{2}M_pV_0^2 = \frac{1}{2}M_pV_s^2 + \frac{Ze^2}{s}$

$$\frac{Ze^2}{s} = \frac{1}{2}M_pV_0^2\left[1 - \left(\frac{b}{s}\right)^2\right]$$ (s çözülebilir)

BS K

6.1.) Bir uydunun açısal mom. (a) r yarıçaplı dairesel yörüngede dolanan M_u kütleli bir uydunun (yörünge merkezine göre) açısal mom.'u ne kadardır? Sonuç yalnızca r, G, M_u, M_y cinsinden verilecektir.



$$\vec{J} = M_u \vec{r} \times \vec{v} \quad , \quad \cancel{M_u} \frac{v^2}{\cancel{r}} = G \frac{\cancel{M_u} M_y}{r^{\cancel{2}}} \Rightarrow v^2 = G \frac{M_y}{r}$$

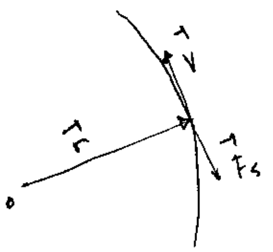
$$\vec{r} \perp \vec{v}$$

$$J = M_u r v = M_u r \sqrt{G \frac{M_y}{r}} = \sqrt{G M_y M_u^2 r} \,.$$

(b) $M_u = 100$ kg ise yörüngesinin yarıçapı yerin yarıçapının 2 katı olan bir uydunun açısal mom.'unun (cgs birimleriyle) sayısal değeri ne kadardır?

$$\left.\begin{aligned} R_y &= 6.4 \times 10^{8} \text{ cm} \\ M_y &= 5.98 \times 10^{27} \text{ gr} \\ G &= 6.67 \times 10^{-8} \text{ cgs} \end{aligned}\right\} \quad J = \sqrt{6.67 \times 10^{-8} \times 5{,}98 \times 10^{27} \times (10^5)^2 . 2 . 6{,}4 \times 10^8} = 7.1 \times 10^{19} \, \underbrace{g \, cm^2/s}_{erg\cdot s}$$

6.2.) Uydu Hareketinde sürtünme etkisi: (a) Dairesel (veya yaklaşık olarak dairesel) bir yörüngedeki uyduya atmosfer sürtünmesinin etkisi nedir? Sürtünme uydunun hızını niçin arttırır?



$\vec{J} = M \vec{r} \times \vec{v}$ $\quad$ $\vec{J}$ sayfa düzleminden dışarı.

$\vec{F_s}$ olsa $\quad$ $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F_s}$ sayfa düzleminden içeri. $\therefore$ $\vec{J}$'nin azalmasına neden olur. $J \propto \sqrt{r}$ idi $\therefore$ r'de azalır. çekim kuvveti K.E'yi arttıracak şekilde uydu üzerine iş yapar.

(b) Sürtünme, uydunun yer merkezine göre ölçülen açısal mom.'u arttırır mı, azaltır mı?

$\vec{N} \uparrow\downarrow \vec{J}$ olduğundan azaltır. Her iki vektörde yörünge düzlemine diktir.

BS K

6.3. Bir uydunun enerji-açısal mom. bağıntısı: M kütleli r yarıçaplı yörüngede dolanan bir uydunun kinetik, potansiyel ve toplam enerjisini J açısal mom. cinsinden hesaplayınız.

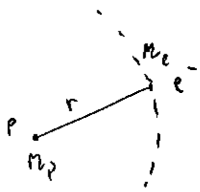
$$K = \frac{1}{2} M v^2 \quad , J = M v r \Rightarrow K = \frac{1}{2} M \frac{J^2}{M^2 r^2} = \frac{J^2}{2 M r^2}$$

$$U = -G \frac{M M_y}{r} \quad , J = M\sqrt{G M_y r} \Rightarrow J^2 = M^2 G M_y r \Rightarrow G M_y M = \frac{J^2}{M r}$$

$$= -\frac{J^2}{M r^2}$$

$$E = K + U = \frac{J^2}{2Mr^2} - \frac{J^2}{Mr^2} = -\frac{J^2}{2Mr^2}$$

6.4. Protona bağlı elektron: Bir elektron bir proton etrafında $0.5\ \text{Å} = 0.5\times10^{-8}$ cm yarıçaplı dairesel bir yörüngede dolanmaktadır. (a) Elektronun proton etrafındaki yörüngesel açısal mom.'u ne kadardır? (b) Toplam enerjisi (erg ve eV) ne kadardır? (c) İyonizasyon enerjisi, yani onu protondan ayırmak için elektrona verilmesi gereken enerji ne kadardır?



(a)

$$M_e \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{e^2}{M_e r} \Rightarrow v = \frac{e}{\sqrt{M_e r}}$$

$\vec{r} \perp \vec{v}$

$$J = M_e v r = M_e r \frac{e}{\sqrt{M_e r}} = e\sqrt{M_e r} = 1.02\times10^{-27}\ \text{erg}\cdot\text{s}$$

(b)

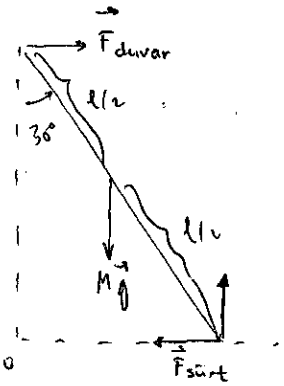
$$E = -\frac{J^2}{2M_e r^2} = -\frac{e^2 \cancel{M_e r}}{2 M_e r^{\cancel{2}}} = -\frac{e^2}{2r} = -\frac{1}{2}\frac{(4.8\times10^{-10})^2}{0.5\times10^{-8}} = -23.10^{-12}\ \text{erg} = -14.4\ \text{eV}$$

$$1\text{eV} = 1.6\times10^{-19}\ \text{Joule} = 1.6\times10^{-12}\ \text{erg}.$$

(c) $E_i + E_T = 0 \Rightarrow E_i - 14.4 = 0 \Rightarrow E_i = 14.4\ \text{eV}$

BS K

6.6. Merdivene etkiyen kuvvetler: Kütlesi 20 kg, uzunluğu 10m olan bir merdiven, düşeyle 30° yapacak şekilde kaygan bir duvara dayalıdır. Düzgün yapıdaki merdivenin kayması yerle merdiven arasındaki sürtünmeyle engelleniyor. Merdivenin duvara etkidiği kuvvetin büyüklüğü dyn cinsinden ne kadardır? (Durgun bir merdiven için momentler toplamının sıfır olacağı gerçeğini kullanınız.)



$l = 10\,m$

$M = 20\,kg$

$\alpha = 30°$

$$\Sigma \vec{N} = \vec{0}$$

Yere değdiği noktaya göre moment: (O'ya)

$$F_{duv}\, l \cos 30° = Mg \frac{l}{2} \sin 30°$$

$$F_{duv} = \frac{Mg}{2} \tan 30° = \frac{20.10^3 . 980}{2} 0.577 = 5.7 \times 10^6\ dyn$$

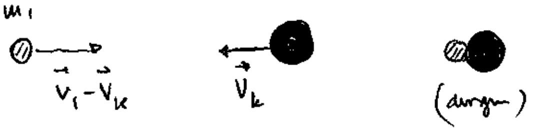
6.7. K.M.'nin Kinetik Enerjisi: m_1 kütleli ve V_1 hızlı bir parçacığın, m_2 kütleli ve durgun bir parçacıkla çarpışmasında, başlangıçtaki K.E'nin tümü ısı veya iç enerjiye dönüşmez. Hangi oranda ısı veya iç enerjiye dönüşebilir? Bu enerjinin K.M. sistemindeki K.E'ye eşit olduğunu gösteriniz.

$$m_1 \vec{V}_1 = (m_1+m_2)\vec{V}' \Rightarrow \vec{V}' = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{V}_1$$

$$\left.\begin{aligned} KE(\text{ön}) &= \frac{1}{2} m_1 V_1^2 \\ KE(\text{son}) &= \frac{1}{2}(m_1+m_2)V'^2 \end{aligned}\right\} \quad \Delta K = KE(\text{ön}) - KE(\text{son}) = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 - \frac{1}{2}(m_1+\cancel{m_2})\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}} V_1^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 V_1^2 \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right) = E_{ısı}$$ bu kadarlık oran ısı ya da iç enerjiye dönüşür.

K.M.



$$P_T = 0 = m_1(\vec{V}_1 - \vec{V}_k) - m_2\vec{V}_k$$

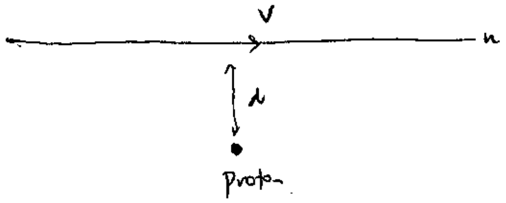
$$m_1\vec{V}_1 = (m_1+m_2)\vec{V}_k \Rightarrow \vec{V}_k = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{V}_1$$

$$K.E(\text{ön}) = \frac{1}{2} m_1 (\vec{V}_1 - \vec{V}_k)^2 + \frac{1}{2} m_2 V_k^2 \quad , \quad \vec{V}_1 - \vec{V}_k = \frac{m_2}{m_1}\vec{V}_k = \frac{m_2}{\cancel{m_1}}\frac{\cancel{m_1}}{m_1+m_2}\vec{V}_1$$

BS K $= \frac{1}{2} m_1 V_1^2 \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)$

(4)

6.9. Çarpışmaya yakın iki parçacığın açısal mom.'u: 1 MeV enerjili bir nötron bir protonun o kadar yakınından geçiyor ki nötronun protona göre açısal mom.'u 10^{-26} erg-s oluyor. İkisi arasındaki en yakın uzaklık nedir? (Aralarındaki etkileşmeyi ihmal ediniz).



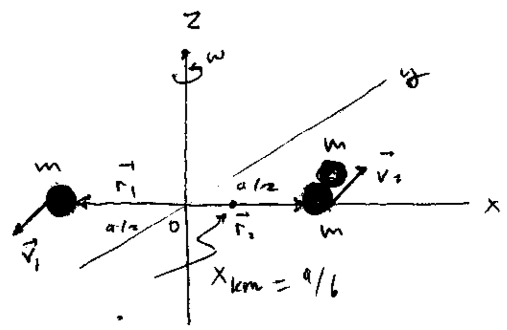
$J = mvd$ nötronun protona göre.

$K = \frac{1}{2}mv^2 = 1\,MeV = 10^6\,eV = 10^6 \cdot 1{,}6\times10^{-12}\,erg = 1.6\times10^{-6}\,erg.$

$$m^2v^2 = 2mK \Rightarrow mV = \sqrt{2mK} = \sqrt{2\cdot 1{,}67\times10^{-24}(gr)\,1.6\times10^{-6}(erg)} = 2.31\times10^{-15}\ gram/s$$

$$d = \frac{J}{mv} = \frac{10^{-26}}{2.31\times10^{-15}} \cong 4.3\times10^{-12}\ cm$$

6.11.) Parçacık - halter çarpışması: iki eşit M kütlesi, kütlesi ihmal edilebilen a uzunluklu katı bir çubukla bağlıdırlar. Haltere benzeyen bu sistemin K.M.'i çekimsiz uzayda durgundur ve sistem KM etrafında ω açısal hızıyla dönmektedir. Dönen parçacıklardan biri yine M kütleli bir üçüncü parçacığa çarparak ona yapışıyor. (a) 3 parçacıklı sist.'in, çarpışma anından hemen önceki KM'ni bulunuz. KM.'nin hızı ne kadardır? (Bu katı çubuk üzerinde KM ile bir an çakışan noktanın hızı değildir.)



(a)

$$X_{km} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{m\frac{a}{2} + m\frac{a}{2} - m\frac{a}{2}}{3m} = \frac{a}{6}$$

$$\vec{V}_{km} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3}{3m} = \frac{m\omega\frac{a}{2}\hat{y} - m\omega\frac{a}{2}\hat{y} - 0}{3m} = 0$$

(b) Üç parçacıklı sistemin, KM'ne göre, çarpışmadan bir an önceki açısal mom.'u ne kadardır? (Çarpışmadan bir an sonra ne kadardır?)

$\vec{r}_1 = \left(\frac{a}{2}+\frac{a}{6}\right)(-\hat{x})$, $\vec{r}_2 = \left(\frac{a}{2}-\frac{a}{6}\right)\hat{x}$, $\vec{r}_3 = \vec{r}_2$

$\vec{v}_1 = -\omega\frac{a}{2}\hat{y}$, $\vec{v}_2 = \frac{\omega a}{2}\hat{y}$, $\vec{v}_3 = 0$

$$\vec{J} = \sum_i m_i \vec{r}_i\times\vec{v}_i = m\Big\{-\overbrace{\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{6}\right)}^{\frac{2a}{3}}\hat{x}\times\left(-\frac{\omega a}{2}\hat{y}\right) + \overbrace{\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{6}\right)}^{1/3a}\hat{x}\times\left(\frac{\omega a}{2}\hat{y}\right) + 0\Big\}$$

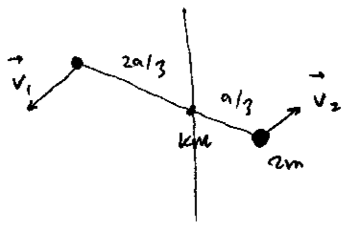
$$= \frac{1}{2}ma^2\omega\hat{z}$$

BS K

Çarpışmadan hemen sonra iki bileşik kütlenin hızı $\frac{1}{2}\omega\frac{a}{2}\hat{y}$ olacaktır. çünkü mom. korunmalı.

$$\vec{J} = m\left\{-\frac{2}{3}a\hat{x}\times\left(-\frac{\omega a}{2}\hat{y}\right)+2\left(\frac{a}{3}\hat{x}\right)\times\left(\frac{1}{2}\omega a\hat{y}\right)\right\} = \frac{1}{2}m\omega a^2\hat{z}.\ \text{olur.}$$

(c) Çarpışmadan sonra sist.'in KM'ne göre açısal hızı ne kadardır?



$$\omega' = \frac{v_1}{r_1} = \frac{\omega a/2}{2a/3} = \frac{3}{4}\omega$$

$$\omega' = \frac{v_2}{r_2} = \frac{\omega a/4}{a/3} = \frac{3}{4}\omega$$

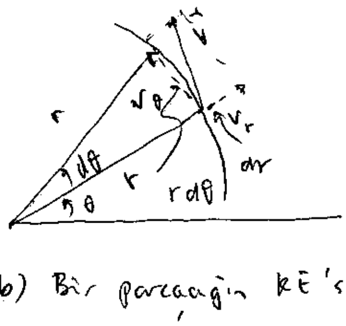
(d) ilk ve son K.E.'leri ne kadardır?

$$KE^{\ddot{o}} = \frac{1}{2}m\left(\omega\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\omega\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}m\omega^2a^2$$

$$KE^{s} = \frac{1}{2}m\left(\omega\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}2m\left(\frac{\omega a}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}m\omega^2a^2$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}m\omega^2a^2\right) = \frac{3}{4}KE^{\ddot{o}}.$$

6.13.) Etkin merkezkaç potansiyel enerji: Bir eksene dik bir düzlemdeki hareket için r,θ düzlem kutupsal koordinatlar kullanmak yararlıdır. (a) Böyle bir koordinat sisteminde hızın $\vec{v} = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta}$ şeklinde yazılabileceğini gösteriniz. $v_r = dr/dt$ $v_\theta = r\,d\theta/dt$.



$$\vec{r} = r\cos\theta\,\hat{x} + r\sin\theta\,\hat{y}$$

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$$

(b) Bir parçacığın KE'sinin bu koordinat sist.'inde $KE = \frac{1}{2}(m\dot{r}^2 + \omega^2r^2)$ olduğunu göster $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

$$KE = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}m\left(v_r^2 + v_\theta^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \omega^2r^2\right)$$

BS K

6

(c) Toplam enerjinin $E = U(r) + \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2Mr^2}$ olduğunu gösteriniz.

$$E = KE + U = U(r) + \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}M\omega^2 r^2 \quad , J = M\omega r^2 \quad \omega = \frac{J}{Mr^2}$$

$$= U(r) + \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2Mr^2} .$$

(d) Kuvvet merkezcil olduğundan parçacığa dönme mom.'i etkimez. ve J hareketin sabitidir. $J^2/2Mr^2$ terimine ~~benzer~~ merkezkaç pot. enerji de denir. Bunun dışa doğru çapsal J^2/Mr^3 büyüklüğünde bir kuvveti gösterdiğini bulunuz.

$$\vec{r} \parallel \hat{F} \Rightarrow \vec{N} = 0$$

$$U'(r) = U(r) + \frac{J^2}{2Mr^2} \qquad F(r) = -\frac{dU'(r)}{dr} = -\frac{dU(r)}{dr} + \frac{J^2}{Mr^3}$$

$$\frac{J^2}{Mr^3} = M\frac{v^2}{r} .$$

(e) $U(r) = \frac{1}{2}Cr^2$ ise $U(r)$'nin içe doğru çapsal $-Cr$ kuvvetini gösterdiğini bulunuz.

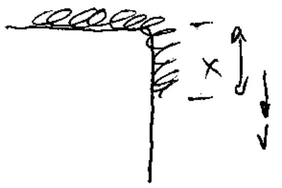
$$F(r) = -\frac{dU(r)}{dr} = -Cr$$

(f) (d) ve (e)'den bu kuvvetlerin dengesinden $\omega^2 = C/M$ koşuluna eşdeğer olduğunu gösteriniz.

$$\text{Dengede } F_r = 0 \Rightarrow -C\cancel{r} + \frac{M^{\cancel{2}}\omega^2 \cancel{r^4}}{\cancel{M}\cancel{r^3}} = 0 \quad \omega^2 = C/M$$

BS K

6.8.) Düşen zincir. M kütleli ve L uzunluklu bir zincir bir masanın kenarına yığılıdır. Bir ucundan çok küçük bir parçası masanın kenarından aşağıya itiliyor ve çekim kuvveti etkisi ile düşmeye başlıyor. Düşerken de zincirin gerisini çekiyor. Her parçanın hareketlenip düşen parçanın hızıyla düşmeye başlayıncaya kadar, durgun kaldığını varsayınız. x uzunluktaki miktarı düştükten sonraki hızını bulunuz. (Tüm L uzunluğunun masadan tam ayrıldığı anda başlangıçtaki pot. enerji ne oranda zincirin öteleme kin. enerjisine dönüşmüştür?



Tüm zincirin kütlesi M, uzunluğu L

x uzunluğunun kütlesi : $m' = M\frac{x}{L}$

$$\frac{d}{dt}(m'v) = \frac{d}{dt}\left(\cancel{M}\frac{x}{\cancel{L}}v\right) = m'g = \cancel{M}\frac{x}{\cancel{L}}g \quad , \quad \frac{dx}{dt} = v$$

$v^2 + x\frac{dv}{dt} = gx$ olur. $\therefore$ $v^2 +$ (bir büyüklük) $= gx$

$v^2 = Agx$ olsun. $\Rightarrow \frac{d}{dt}(v^2) = Ag\frac{dx}{dt} \Rightarrow 2\cancel{v}\frac{dv}{dt} = Ag\cancel{v} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{A}{2}g$

$$\Rightarrow Agx + x\frac{A}{2}g = gx \Rightarrow \boxed{A = \frac{2}{3}} \Rightarrow v^2 = \frac{2}{3}gx$$

$x = l = L$ olduğu zaman $v^2 = \frac{2}{3}gL$

Zincirin K.M. masanın üst noktasından $\frac{L}{2}$ kadar aşağıdadır.

$$\left.\begin{aligned} \Delta U &= -Mg\frac{L}{2} \\ \Delta KE &= \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{\cancel{2}}M\frac{\cancel{2}}{3}gL = \frac{1}{3}MgL \end{aligned}\right\} \Delta K + \Delta U = MgL\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6}MgL$$

BS K

BS K