BÖLÜM-8

KATI CİSİMLERİN TEMEL DİNAMİĞİ

Katı Cisim, parçacıklar arası uzaklığın sabit kaldığı bir parçacıklar topluluğu'dur.

(#) İlgilenilen hareket zamana göre sabit veya değişen bir eksen etrafındaki dönmelerdir.

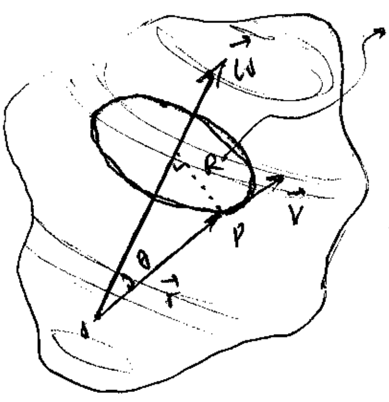
HAREKET DENKLEMİ

○ Parçacıklar sisteminin, eylemsiz bir gözlem çerçevesindeki hareketi için

$$\frac{d\vec J}{dt} = \vec N \quad \left(\frac{d}{dt}\left(\vec r \times \vec p\right) = \cancel{\dot{\vec r} \times \vec p}^{\,0} + \vec r \times \vec F = \vec N \right)$$

bağıntısı vardır. Burada $\vec N$ sistemin parçacıklarına etkiyen tüm dış kuvvetlerin başlangıç noktasına göre değerlendirilen kuvvet momenti veya dönme momenti'dir.

○ AÇISAL MOMENTUM ve KİNETİK ENERJİ



$R = r\sin\theta$

$v = \omega R$

$= \omega r \sin\theta$

$\vec v = \vec\omega \times \vec r$

P noktasının ani hız vektörü

$$\vec V = \vec \omega \times \vec r$$

P noktasındaki m kütleli bir parçacığın, cismin toplam açısal momentumuna katkısı

$$\vec r \times m\vec v = \vec r \times m(\vec\omega \times \vec r)$$

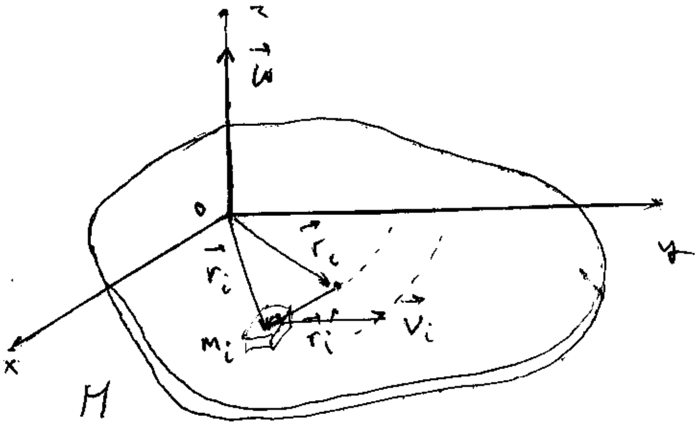
$$\vec J = \sum_i \vec r_i \times m_i (\omega \times \vec r_i)$$

Dönen cismin inceleme anındaki toplam kinetik enerjisi

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i |\vec{\omega} \times \vec{r}_i|^2$$

EYLEMSİZLİK MOMENTLERİ



m_i 'nin hızı

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

sürati

$$v_i = \omega r_i \qquad \vec{\omega} \perp \vec{r}_i$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2$$

Paralel Eksen Teoremi

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i{}' + \vec{r}_c \Rightarrow I_z = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i$$

$$= \sum_i m_i (\vec{r}_i{}' + \vec{r}_c) \cdot (\vec{r}_i{}' + \vec{r}_c)$$

$$= \sum_i m_i (r_c^2 + 2\vec{r}_c \cdot \vec{r}_i{}' + r_i'^2)$$

$$\sum_i m_i = M$$

$$\Rightarrow I_z = M r_c^2 + 2\vec{r}_c \cdot \cancelto{0}{\sum_i m_i \vec{r}_i{}'} + \underbrace{\sum_i m_i r_i'^2}$$

« C kütle merkezinden geçen düzleme dik eksene göre eylemsizlik momenti »

$$I_z = M r_c^2 + I_{cz}$$

(#1) Herhangi bir kütle dağılımı için, Herhangi bir eksene göre eylemsizlik momenti kütle merkezinden geçen paralel bir eksene göre eylemsizlik momenti artı cismin kütlesi kere iki eksen arasındaki uzaklığın karesine eşittir.

$$I = I_c + M L^2 \qquad (L: \text{eksenler arası uzaklık})$$

$K = \frac{1}{2} I_z \omega^2$ idi

$$= \frac{1}{2} I_{cz} \omega^2 + \frac{1}{2} M r_c^2 \omega^2$$

"Dönen levhanın kinetik enerjisi, kütle merkezine göre enerji artı dönme eksenine göre KM'nin öteleme hareketinden ileri gelen enerjilerin toplamından oluşur".

Dönen levhanın açısal momentumu $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A}$.

$$\vec{J} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i (\vec{w}\times\vec{r}_i) = \sum_i m_i \{-(\vec{w}\times\vec{r}_i)\times\vec{r}_i\}$$

$$= -\sum_i m_i [\, \cancel{(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i)}\vec{r}_i - (\vec{r}_i\cdot\vec{r}_i)\vec{\omega}\,] \qquad \vec{\omega}\perp\vec{r}_i$$

$$= \sum_i m_i r_i^2 \vec{\omega} = \underbrace{\sum_i m_i r_i^2}\, \omega\hat{z}$$

$$= I_z \omega \hat{z}$$

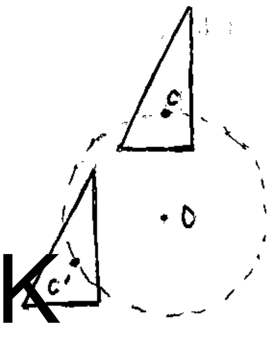
$\vec{r}_i = \vec{r}_i{}' + \vec{r}_c$ yazarsak

$$\vec{J} = \sum_i m_i r_i'^2 \omega\hat{z} + M r_c^2 \omega\hat{z}$$

$$\vec{J} = I_{cz}\omega\hat{z} + M r_c^2 \omega\hat{z}$$

" Herhangi bir noktaya göre açısal momentum, kütle merkezine göre açısal momentum, artı kütle merkezinin o noktaya göre ötelemesinden dolayı ileri gelen açısal momentuma eşittir. "

Not: Levha yada düzlemsel madde dağılımı için elde ettiğimiz bu teoremler, levha öğelerine dik sabit bir eksene göre dönmeye sınırlı çok sayıda özdeş levhanın üstüste konulması ile elde edilen silindirsel yada prizma şeklinde bir cisim içinde geçerlidir.



" üçgensel levhanın ağırlık merkezi 0 etrafındaki çember üzerinde ötelenmektedir, fakat dönme yoktur. K ve $\vec{J}$ denklemlerinin yalnızca ikinci terimi vardır "

$$K \rightarrow \frac{1}{2} M r_c^2 \omega^2 \qquad \vec{J} \rightarrow M r_c^2 \omega\hat{z}$$

"Her iki terimin katkısının bulunduğu durum."

Dik Eksen Teoremi :

Evvelki düzlemsel levhayı düşünürsek mi kütlesinin z-eksenine göre eylemsizlik momentine katkısı $m_i r_i^2$ 'dir. x-eksenine göre dönme alırsak, x-eksenine göre eylemsizlik momentine katkısı $m_i y_i^2$ olacaktır. y eksenine görede $m_i x_i^2$ verirdi. O zaman

$$I_x = \sum_i m_i y_i^2 \quad , \quad I_y = \sum_i m_i x_i^2$$

$$I_x + I_y = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right) = \sum_i m_i r_i^2 = I_z$$

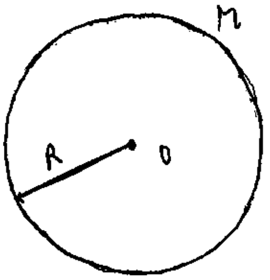
Bu da düzlemsel, ince katı cisimler için dik eksen teoremini kanıtlar.

"Düzlemsel katı bir levhanın düzlemine dik bir eksene göre eylemsizlik momenti, düzlemde birbirine dik ve normal eksende kesişen iki eksene göre eylemsizlik momentlerinin toplamıdır."

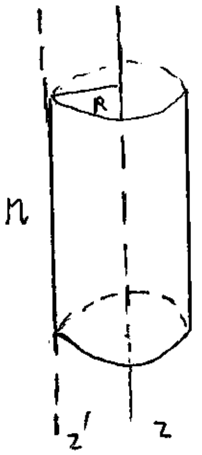
BS K

İnce Halka : (İnce Duvarlı Silindir)

KM'i O'dan geçen eksene göre eylemsizlik momenti

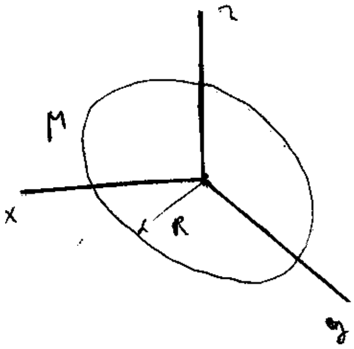


$$\boxed{I_z = MR^2}$$



"Bu sonuç geometrik ekseni etrafında döndürülen <u>ince duvarlı</u> bir silindir için de geçerlidir."

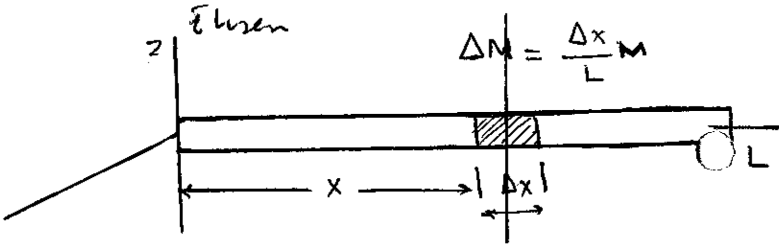
Silindir duvarındaki paralel eksen için : $I_{z'} = 2MR^2$



Halka düzleminde bulunan bir eksene göre eylemsizlik momenti

$$=: \frac{1}{2}MR^2 = I_x = I_y$$

Düzgün İnce Çubuk :



$$I = \sum x^2 \Delta M$$

$$= \sum x^2 \frac{\Delta x}{L} M$$

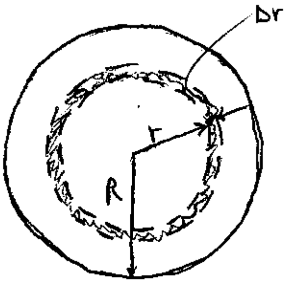
$$\rightarrow = \frac{M}{L}\int_0^L x^2\, dx = \frac{1}{3}ML^2$$

$$I = I_c + M\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

PET kullanılarak KM'inden geçen eksene göre

$$I_c = I - M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2$$

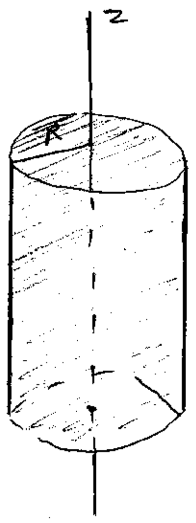
Dairesel Disk



$$\Delta M = \frac{\pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2}{\pi R^2} M \approx \frac{2r\Delta r}{R^2} M$$

$$\Delta I = r^2 \Delta M \approx \frac{2M}{R^2} r^3 \Delta r$$

$$I = \frac{2M}{R^2}\int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}MR^2$$

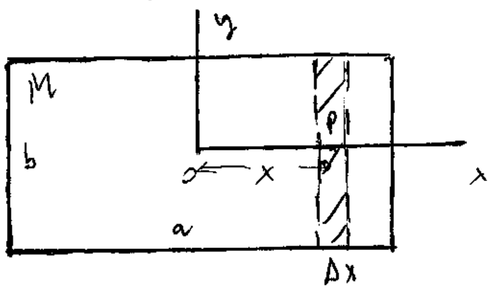


Düzgün yoğunluklu dolu bir silindir, diskleri üstüste konması ile oluşmuş gibi düşünelebileceğinden dairesel dolu bir silindirin eksenine göre eylemsizlik momentinin $I_z = \frac{1}{2} MR^2$ olacağı açıktır.

Diskin çapsal herhangi bir eksene göre eylemsizlik momenti (DET)

$$I_x = I_y = \frac{1}{4} MR^2$$

Dikdörtgen Plâk :



$$\Delta m = \frac{\Delta x}{a} M$$

P'den geçen dik eksene göre : $\frac{1}{12}\left(\frac{\Delta x}{a} M\right) b^2$

(PET) kullanarak O'daki dik eksene göre

$$\Delta I = \frac{1}{12}\left(\frac{\Delta x}{a} M\right) b^2 + \left(\frac{\Delta x}{a} M\right) x^2$$

$$I = \frac{M}{a}\int_{-a/2}^{+a/2}\left(\frac{b^2}{12} + x^2\right) dx = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$$

$$I_x = \frac{1}{12} Mb^2 \qquad I_y = \frac{1}{12} Ma^2$$

BS K

SABİT EKSENLER ETRAFINDA DÖNMELER:

HAREKETİN ZAMANA BAĞLILIĞI

$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{N}$ hareket denklemi sabit eksenlere göre dönen cisimlerle ilgili problemlere uygulanacak. Amaç, verilen dönme momentlerine veya kuvvet momentlerine cevap olan dönmenin zamana bağımlılığını öğrenmek.

Dönme ekseninin yönü, uzayda sabit olduğuna ve cisme göre de sabit kaldığına göre, cismin eylemsizlik özellikleri de eksene göre sabit kalacaktır. Hareketi bulurken, açısal momentumun yalnızca bu eksene göre bileşeni ile ilgilenmemiz yeterli olacaktır.

Bunun sonucu olarak hareket denklemi

$$\frac{dJ_a}{dt} = N_a$$

skaler denklemi şeklinde alınabilir. J_a ve N_a eksene paralel bileşenlerdir.

$$J_a = \vec{J} \cdot \frac{\vec{\omega}}{\omega} = \frac{1}{\omega}\left[\sum_i \vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)\right] \cdot \vec{\omega}$$

$$= \frac{1}{\omega} \sum_i \left[m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)\right] \cdot \vec{v}$$

$$= \frac{1}{\omega} \sum_i m_i (\omega r_i \sin\theta_i)^2$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\,\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\,\vec{C}$$

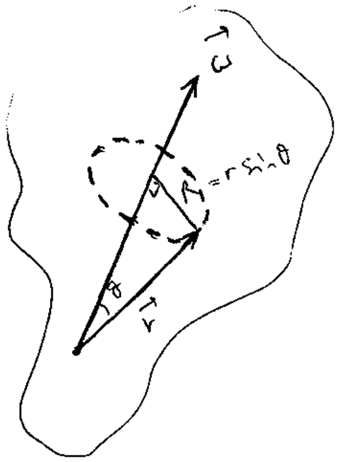
$$\vec{r}_i \times (\vec{\omega}\times\vec{r}_i) = (\vec{r}_i\cdot\vec{r}_i)\,\vec{\omega} - (\vec{r}_i\cdot\vec{\omega})\,\vec{r}_i$$

$$= r_i^2\,\vec{\omega} - (r_i\,\omega\cos\theta_i)\,\vec{r}_i$$

$$[\vec{r}_i\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)]\cdot\vec{\omega} = r_i^2\,\omega^2 - (r_i\,\omega\cos\theta_i)^2$$

$$= r_i^2\,\omega^2\,(1-\cos^2\theta_i)$$

$$= r_i^2\,\omega^2\,\sin^2\theta_i$$



$$\Rightarrow J_a = \sum_i m_i\,\omega\, r_i^2 \sin^2\theta_i$$

$$= \sum_i m_i\,\omega\, R_i^2$$

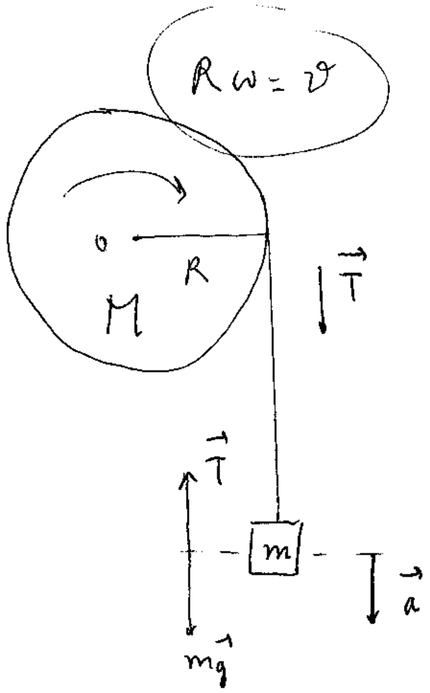
$$I_a = \sum_i m_i\, R_i^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow J_a = \omega I_a \\ N_a = \vec{N}\cdot\frac{\vec{\omega}}{\omega} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{I_a\,\frac{d\omega}{dt} = N_a}$$

$$\frac{dJ_a}{dt} = N_a$$ rdi

$$K_a = \frac{1}{2} J_a\,\omega^2$$

Dönme Momentlerinin Etkisindeki Dolu Silindirin Açısal İvmesi



Silindirin Eylemsizlik Mom: $I = \frac{1}{2}MR^2$

$J = I\omega = \frac{1}{2}MR^2\omega$

Dönme momenti ipteki $\vec{T}$ gerilmesinden oluşur

$N = TR = m(g-a)R$

$I\frac{d\omega}{dt} = N$ idi

$\frac{1}{2}MR^2 \overset{\alpha}{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)} = m(g-a)R$

$\vec{mg} + \vec{T} = m\vec{a}$

$mg - T = ma$

$T = m(g-a)$

$R\overset{\alpha}{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)} = a$

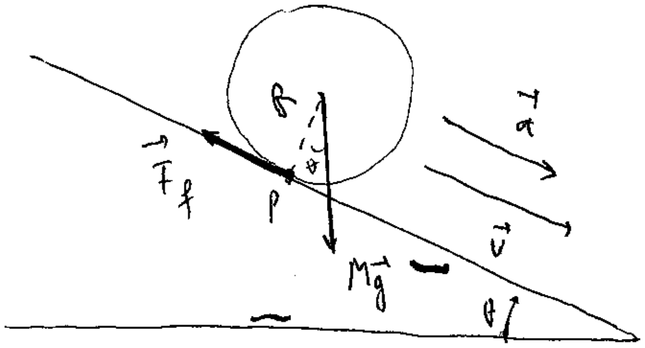
$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{m}{M/2+m}\frac{g}{R}}$$

$$\alpha = \frac{m}{M/2}\frac{g}{R} - \frac{m}{M/2}\overset{\alpha}{\left(\frac{a}{R}\right)} \Rightarrow \alpha\left(1+\frac{m}{M/2}\right) = \frac{m}{M/2}\frac{g}{R}$$

$$\alpha = \frac{m/\cancel{M/2}}{\frac{M/2+m}{\cancel{M/2}}}\frac{g}{R}$$

BS K

Kaymadan Yuvarlanma : (Ani Değme Noktası Etrafında Dönme)



$$I_p = I + MR^2$$

$$\omega = \frac{V}{R}$$

$$\Rightarrow J_p = (I + MR^2)\frac{V}{R}$$

P deki dönme momenti kütle merkezindeki etkin çekim kuvveti ile sağlanır.

$$N_p = MgR\sin\theta \Lleftarrow \vec N = \vec R \times M\vec g = MgR\sin\theta$$

$$\Rightarrow MgR\sin\theta = (I + MR^2)\frac{a}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{1 + I/MR^2}\, g\sin\theta}$$ Öteleme İvmesi

Dolu silindir : $I = \frac{1}{2}MR^2$ $a = (2/3)\, g\sin\theta$

Dolu küre : $I = \frac{2}{5}MR^2$ $a = (5/7)\, g\sin\theta$

Enerji Yöntemi:

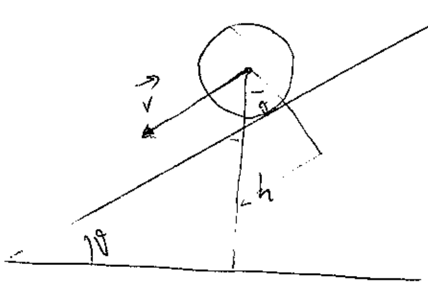
Ötelenme ivmesi bulurken, herhangi bir andaki toplam enerjiye bakılır.

1.) KM'nin ötelenme $KE = \frac{1}{2} M v^2$

2.) KM'ne göre dönme $KE = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} I v^2/R^2$

3.) KM'nin yüksekliğinden dolayı $PE = Mgh$

Değme noktasındaki sürtünme yuvarlanmayı sağlar, fakat iş yapmaz ve toplam enerjinin korunmasını önlemez.



$$E = \frac{1}{2} \left(M + \frac{I}{R^2} \right) v^2 + Mgh$$

E : sabit

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = \left(M + \frac{I}{R^2} \right) v \frac{dV}{dt} + Mg \frac{dh}{dt} = 0$$

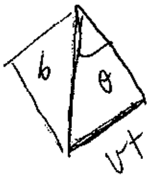
$h = - vt \sin\theta$

$\frac{dh}{dt} = - v \sin\theta$

$\frac{dv}{dt} = a$

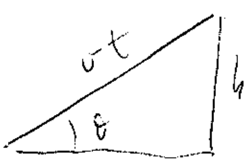
$$\Rightarrow \left(M + \frac{I}{R^2} \right) \cancel{v} a - Mg \cancel{v} \sin\theta = 0$$

$$a = \frac{1}{1 + I/MR^2} g \sin\theta$$



$\sin\theta = \frac{vt}{b}$

$h = h_0 - vt\sin\theta$

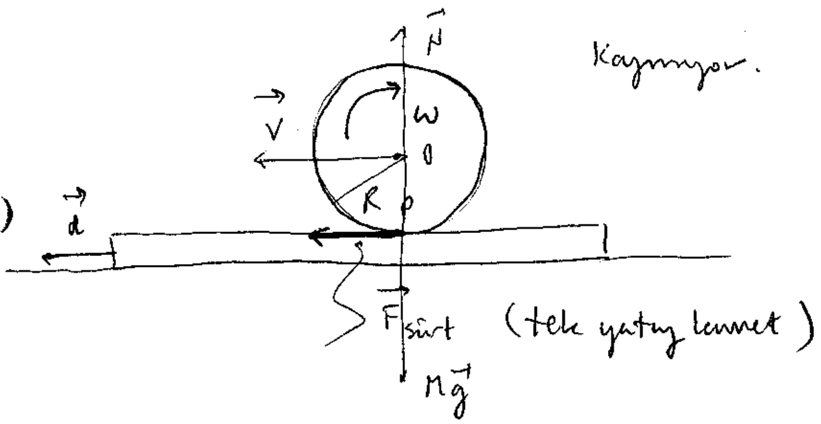


$\sin\theta = \frac{h}{vt}$

Kütle Merkezine Göre Dönme Momentleri

$$\sum \vec{F}_{dış} = M a_{kM} \qquad \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_{dış} = \sum \vec{N} = \frac{dJ_{km}}{dt}$$

İvmeli Pürüzlü Düzlemde Silindir :



P'ye göre moment alalım. (yüzeydeki tepki, yerçekimi ve sürtünme kuvveti bu noktadan geçiyorlar)

$$\sum \vec{N} = 0$$

$$\frac{dJ_P}{dt} = 0 \Rightarrow I_P w = sbt = (I_c + MR^2)\,w \qquad (\text{Yanlış.})$$

Günlük harekette w kesinlikle sabit değil. Öyleyse momentleri ve açısal momentumu değerlendirmek için O KM'ni alalım.

$$M\frac{dV_{km}}{dt} = F_{sür}$$

$$\vec{R} \times \vec{F}_s = \vec{N} = \frac{d\vec{J}_{km}}{dt} = I_c \dot{\vec{w}}$$

$$\Rightarrow I_c \dot{w} = \frac{1}{2}MR^2\dot{w} = RF_s$$

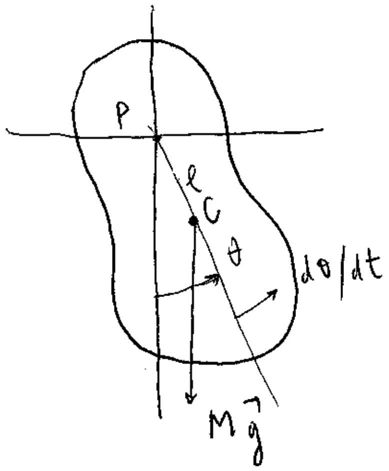
$$\Rightarrow \frac{dV_{km}}{dt} + R\frac{dw}{dt} = a$$ (Kaymadan yuvarlanma olduğu için değme noktasının ivmesi)

$$\frac{dV_{km}}{dt} = \frac{1}{2}MR\frac{dw}{dt} \Rightarrow \frac{3}{2}R\frac{dw}{dt} = a \Rightarrow \boxed{\frac{dV_{km}}{dt} = \frac{a}{3}} \boxed{F_s = M\frac{a}{3}}$$

Bileşik Sarkaç

Dönme eksenine göre eylemsizlik momenti (PET)

$$I = I_c + Ml^2 \qquad l = \overline{PC}$$



$$J = I\omega = \left(I_c + Ml^2\right)\frac{d\theta}{dt}$$

P'ye göre dönme momenti KM'ye etkiyen $M\vec{g}$ den ileri gelir.

$$|\vec{N}| = -Mgl\sin\theta$$ (θ açısının zıt yönünde)

$$\frac{dJ}{dt} = N \Rightarrow \left(I_c + Ml^2\right)\ddot{\theta} + Mgl\sin\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\left(\frac{1}{1 + I_c/Ml^2}\right)\theta = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}\left(\frac{1}{1 + I_c/Ml^2}\right)}$$ açısal frekans.

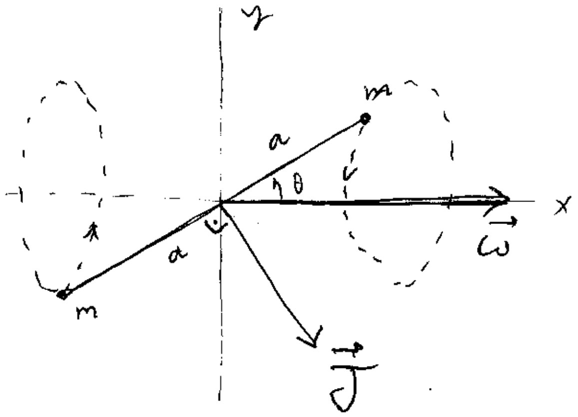
Örnek

$I_c = Mr^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{2r}}$ 2r uzunluklu basit sarkaç.

SABİT EKSENLERE GÖRE DÖNME:

AÇISAL MOMENTUM VEKTÖRÜNÜN DAVRANIŞI:

$\frac{dJ_a}{dt} = N_a$ skaler bağıntısı üzerinde durmustuk. Şimdi dönme ekseni, katı cismin simetri özelliklerine belirli bir şekilde bağlı değil ise $\vec{J}$'nin dönme eksenine paralel olmadığını görelim.



$$\vec{J} = \vec{r}_1 \times m(\vec{\omega} \times \vec{r}_1) + \vec{r}_2 \times m(\vec{\omega} \times \vec{r}_2)$$

$$\vec{r}_1 = a\cos\theta\,\hat{x} + a\sin\theta\,\hat{y}$$

$$\vec{r}_2 = -a\cos\theta\,x - a\sin\theta\,\hat{y}$$

$$\hat{\omega} = \omega\hat{x}$$

$\Rightarrow \vec{J} = 2m\omega a^2 \sin\theta\,(\hat{x}\sin\theta - \hat{y}\cos\theta)$ "x ekseni etrafında döner,

("$d\vec{J}/dt \neq 0$'dır")

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{J} \qquad \left(\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{J}}{dt} = -2m\omega^2 a^2 \sin\theta\cos\theta\,\hat{z} = \vec{N}$$

EYLEMSİZLİK MOMENTLERİ ve ÇARPIMLARI:

ANA EKSENLER ve EULER DENKLEMLERİ

Katı cismin açısal momentumu

$$\vec{J} = \sum_i \vec{r_i} \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r_i})$$

$$\vec{r_i} = x_i \hat{x} + y_i \hat{y} + z_i \hat{z} \qquad \vec{\omega} = \omega_x \hat{x} + \omega_y \hat{y} + \omega_z \hat{z}$$

(x, y, z) eksenleri katı cisme göre sabit.

$$J_x = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) \omega_x - \sum_i m_i x_i y_i \omega_y - \sum_i m_i x_i z_i \omega_z$$

$$J_y = - \sum_i m_i y_i x_i \omega_x + \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2) \omega_y - \sum m_i y_i z_i \omega_z$$

$$J_z = - \sum_i m_i z_i x_i \omega_x - \sum_i m_i z_i y_i \omega_y + \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \omega_z$$

$$\left\{ \begin{aligned} J_x &= I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z \\ J_y &= I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z \\ J_z &= I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z \end{aligned} \right.$$

$I_{xy} = I_{yx}$ (Eylemsizlik çarpımları)'nın sıfır olduğu her zaman katı cisme göre sabit bir koordinat sistemi bulunabileceğidir.

bunların sıfır olduğu koordinat eksen takımlarına katı cismin ana eksenleri denir.

BS K

$\vec{\omega} = \omega_x \hat{x} + \omega_y \hat{y} + \omega_z \hat{z}$ Ana eksenleri saptamış olalım.

$$\vec{J} = I_{xx} \omega_x \hat{x} + I_{yy} \omega_y \hat{y} + I_{zz} \omega_z \hat{z}$$

$$= I_x \omega_x \hat{x} + I_y \omega_y \hat{y} + I_z \omega_z \hat{z}$$

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = I_x \frac{d\omega_x}{dt} \hat{x} + I_y \frac{d\omega_y}{dt} \hat{y} + I_z \frac{d\omega_z}{dt} \hat{z}$$

$$+ I_x \omega_x \frac{d\hat{x}}{dt} + I_y \omega_y \frac{d\hat{y}}{dt} + I_z \omega_z \frac{d\hat{z}}{dt}$$

(#) Birim vektörler $\vec{\omega}$'dan dolayı değişirler.

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{x} \quad , \quad \frac{d\hat{y}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{y} \quad , \quad \frac{d\hat{z}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{z}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d'\vec{J}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{J}$$

$$= \vec{N}$$

$$\begin{cases} I_x \frac{d\omega_x}{dt} - (I_y - I_z)\omega_y \omega_z = N_x \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} - (I_z - I_x)\omega_z \omega_x = N_y \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} - (I_x - I_y)\omega_x \omega_y = N_z \end{cases}$$

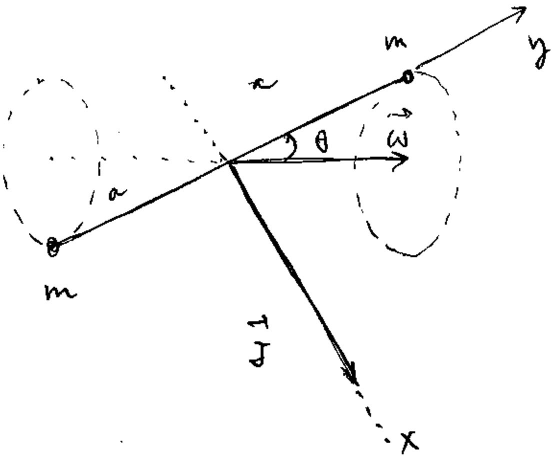
// Euler Denklemleri

$$K = \frac{1}{2} \left(I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2 \right)$$

BS K

Dönen İki parçacıklı çubuk - Sabit eksen :

Problemi bir de ana eksenlerde inceleyelim.



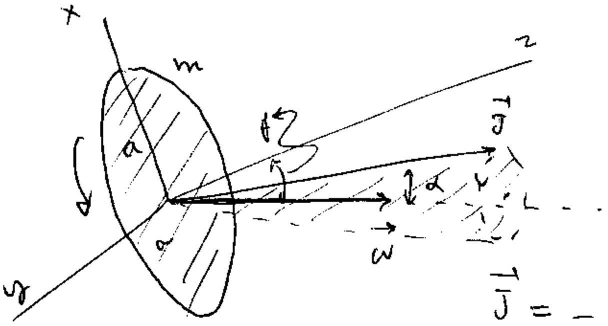
$$I_x = 2ma^2 \qquad I_y = 0 \qquad I_z = 2ma^2$$

$$\omega_x = \omega \sin\theta \qquad \omega_y = \omega\cos\theta \qquad \omega_z = 0$$

$$\vec{J} = 2ma^2\omega\sin\theta\,\hat{x}$$

$$N_z = -2ma^2\omega^2\sin^2\theta\cos\theta$$

Dairesel Disk, Normalle Açı Yapan Sabit Eksen



$$\hat{I}_x = \hat{I}_y = \frac{1}{4}ma^2 \qquad I_z = \frac{1}{2}ma^2$$

$$\omega_x = -\omega\sin\theta \qquad \omega_y = 0 \qquad \omega_z = \omega\cos\theta$$

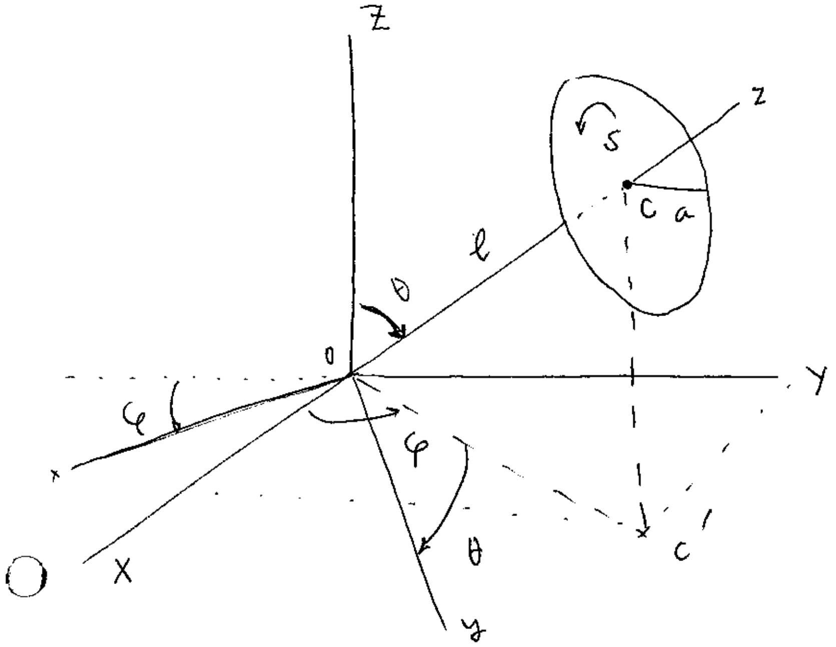
$$\vec{J} = -\frac{1}{4}ma^2\omega\sin\theta\,\hat{x} + \frac{1}{2}ma^2\omega\cos\theta\,\hat{z}$$

$$\vec{\omega}\cdot\vec{J} = \omega J\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{\omega}\cdot\vec{J}}{\omega J} = \frac{1+\cos^2\theta}{1+3\cos^2\theta}$$

$$\vec{N} = \vec{\omega}\times\vec{J} = \frac{1}{4}ma^2\omega^2\sin\theta\cos\theta\,\hat{y}$$

Dönen Topaç veya Jiroskop - Yaklaşık inceleme



XYZ eylemsizlik çerçevesi

xyz dönen ana eksenler çerçevesi

$$\hat{Z} = -\sin\theta\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}$$

$$\vec{\omega} = -\dot{\theta}\,\hat{x} + \dot{\varphi}\,\hat{Z} + s\,\hat{z}$$

$$= -\dot{\theta}\,\hat{x} - \dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{y} + (\dot{\varphi}\cos\theta + s)\,\hat{z}$$

$$I_z = \frac{1}{2}Ma^2 \qquad I_x = \frac{1}{4}Ma^2 + M\ell^2 = I_y$$

$$\vec{J} = \left(\frac{1}{4}Ma^2 + M\ell^2\right)\left(-\dot{\theta}\,\hat{x} - \dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{y}\right) + \frac{1}{2}Ma^2\left(\dot{\varphi}\cos\theta + s\right)\hat{z}$$

$\dot{\theta} = 0 \Rightarrow$ OZ veya Oz etrafında momentler yok $\dot{\varphi}$ ve s sabit olurlar.

$s \gg \dot{\varphi}$ $\dot{\varphi}$'li terimler ihmal

$$\Rightarrow \vec{J} = \frac{1}{2}Ma^2 s\,\hat{z} \quad ?$$

$\vec{\omega}' = \dot{\varphi}\,\hat{Z}$ Dönmeyen koordinat eksenlerinin açısal hızı

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{\omega}' \times \vec{J} = \dot{\varphi}\,\hat{Z} \times \frac{1}{2}Ma^2 s\,\hat{z} = \frac{1}{2}Ma^2 s\dot{\varphi}\,(\hat{Z}\times\hat{z})$$

$$= -\frac{1}{2}Ma^2 s\,\dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{x} \quad ?$$

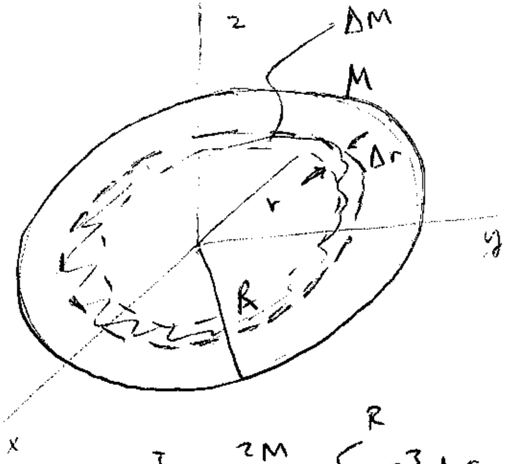
BÖLÜM 8

KATI CİSİMLERİN TEMEL DİNAMİĞİ

8.1. Paralel Eksen Teoremi: İnce bir diskin çapsal bir eksene göre eylemsizlik momentinin $\frac{1}{4}ma^2$ olduğu gerçeğinden başlayarak, M kütleli, a yarıçaplı ve L uzunluklu, dairesel, dolu bir silindirin, K.M'den geçen, enine bir eksene göre eylemsizlik momentinin $(Ma^2/4)+(ML^2/12)$ olduğunun gösteriniz.

Çözüm:

Not: Dairesel Disk:



$$\pi R^2 \qquad M$$

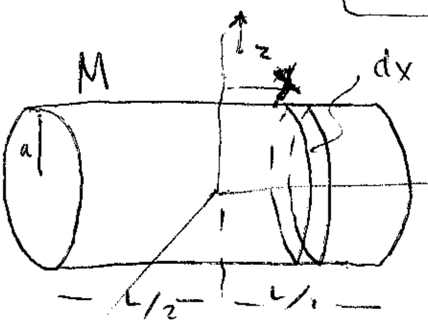
$$\pi(r+\Delta r)^2-\pi r^2 \qquad \Delta M$$

$$\Delta M = \frac{\pi(r+\Delta r)^2-\pi r^2}{\pi R^2} M \approx 2r\frac{\Delta r}{R^2}M$$

$$\Delta I = r^2\Delta M \approx \frac{2M}{R^2} r^3 \Delta r$$

$$I_z = \frac{2M}{R^2}\int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}MR^2$$

$$I_x + I_y = 2I = I_z \Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{4}MR^2}$$



$$\Delta M = \pi a^2 dx \rho \qquad \rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi a^2 L}$$

$$\Rightarrow M = \pi a^2 L \rho$$

$$\Delta I = \frac{1}{4}\Delta M a^2$$

$$= \frac{1}{4}(\pi a^2 \rho\, dx)a^2$$

Paralel Eksen Teoremi:

$$\Delta I_{z_{km}} = \frac{1}{4}(\pi a^2 \rho dx) a^2 + \Delta M x^2$$

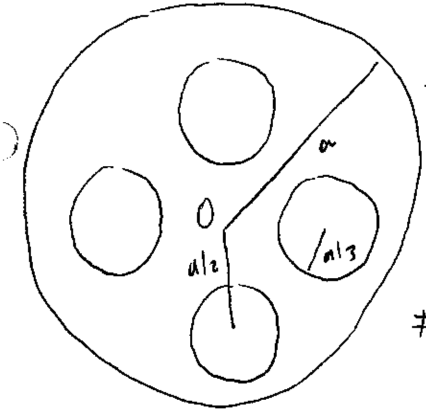
$$= \frac{1}{4}\pi a^4 \rho dx + \pi a^2 \rho x^2 dx$$

$$I_{z_{km}} = \frac{1}{4}\pi a^4 \rho \int_{-L/2}^{+L/2} dx + \pi a^2 \rho \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 dx = \frac{1}{4}\pi a^4 \rho L + \pi a^2 \rho \left(\frac{2L^3}{24}\right)$$

$$= \frac{1}{4} M a^2 + \frac{1}{12} M L^2$$

8.2. Eylemsizlik Momentlerinin Toplanabilirliği: Eylemsizlik momentlerinin basit olarak toplanabileceği ilkesini kullanarak şek. 8.15 deki silindirsel cismin merkezsel eksene göre eylemsizlik momentini hesaplayınız. Cismin kütlesi M, yarıçapı a 'dır. ; Dört silindiriksel delikten herbirinin yarıçapı a/3 ve eksenin merkezsel eksene uzaklığı a/2 'dir.

Çözüm :



İçi Dolu Silindirin Eylemsizlik Momenti ; $I' = \frac{1}{2} M' a^2$

a/3 yarıçaplı dolu silindirlerin herbirinin eylemsizlik momenti:

$$I_1 = \frac{1}{2} m \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{1}{18} m a^2$$

P.E. Teoremi kullanılır ise, bunların herbirinin O 'ya göre eylemsizlik momenti

$$I_1' = \frac{1}{18} m a^2 + m \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{11}{36} m a^2$$

$$I_{Top} = \frac{1}{2} M' a^2 - 4 \times \frac{11}{36} m a^2 = \frac{1}{2} M' a^2 - \frac{11}{9} m a^2$$

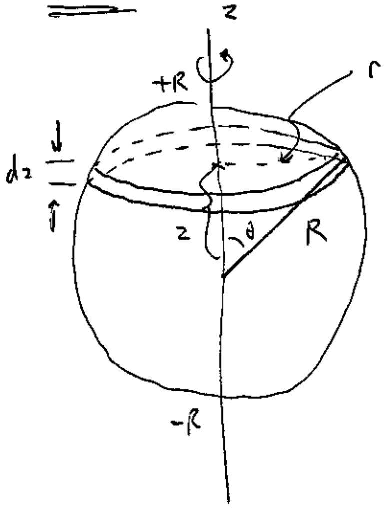
$$\boxed{M' = \pi a^2 L \rho \quad , m = \pi \left(\frac{a}{3}\right)^2 L \rho = \frac{\pi a^2 \rho L}{9}}$$

$$M_{boş} := \pi a^2 \rho L - 4 \times \pi \left(\frac{a}{3}\right)^2 \rho L = \frac{5}{9} \pi a^2 \rho L$$

$I_{Top} = \frac{1}{2} \pi a^4 L \rho - \frac{11}{9} \pi a^4 \rho \frac{L}{9} = \frac{59}{162} \pi a^4 \rho L = \frac{59}{162} \frac{9}{5} M_{boş} a^2 = \frac{59}{90} M a^2$

8.3.) **Dolu Kürenin Eylemsizlik Momenti:** Dolu bir kürenin, çapına göre eylemsizlik momentinin $\frac{2}{5}Mr^2$ olduğunu gösteriniz. Küreyi sonsuz küçük kalınlıklı, küresel yüzey ile sınırlayan dairesel diskler yığını olarak alırsak bu iş yapılır.

Çözüm:



r = R sinθ (Her bir diskin yarıçapı)

$$R^2\sin^2\theta + z^2 = R^2 \Rightarrow \boxed{r^2 = R^2 - z^2}$$

$$dI = \frac{1}{2}dM\,r^2 \qquad \boxed{dM = \pi r^2 dz\,\rho}$$

$$= \frac{\pi}{2} r^4 \rho\, dz$$

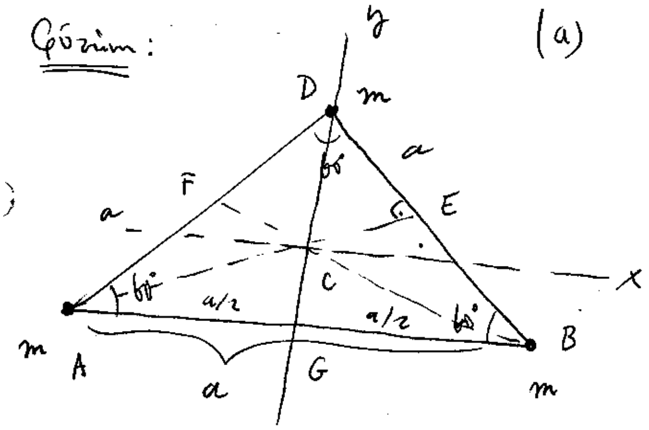
$$I = \frac{\pi\rho}{2}\int_{-R}^{+R} r^4 dz = \frac{\pi\rho}{2}\int_{-R}^{+R}(R^2-z^2)^2 dz = \frac{\pi\rho}{2}\int_{-R}^{+R}(R^4+z^4-2z^2R^2)\,dz$$

$$= \frac{\pi\rho}{2}\,\frac{16}{15}R^5 = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\rho\right)\frac{2}{5}R^2 = \frac{2}{5}MR^2$$ ✓

BS K

8.4. Üçgenin Eylemsizlik Momentleri: Eşkenar bir üçgenin köşelerindeki üç eşit kütle (bkz. şek. 8.16) kütlesi ihmal edilebilecek üçgensel bir levhaya bağlıdırlar. (a) C kütle merkezinden geçen normal eksene göre I_z eylemsizlik momentini bulunuz. (b) Gösterilen y-eksenine göre eylemsizlik (I_y) momentini hesaplayınız. (c) Dik eksen teoremi ile I_x'i hesaplayınız.

Çözüm:



(a)

$$I_z = m|CD|^2 + m|AC|^2 + m|BC|^2$$

$$= 3m|CD|^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos 30^\circ = \dfrac{|DE|}{|CD|} \Rightarrow |CD| = \dfrac{|DE|}{\cos 30^\circ} \\ \cos 60^\circ = \dfrac{|DE|}{a} \Rightarrow |DE| = a\cos 60^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow |CD| = \frac{a\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{a(1/2)}{\sqrt{3}/2} = a/\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow I_z = 3m|CD|^2 = ma^2$$

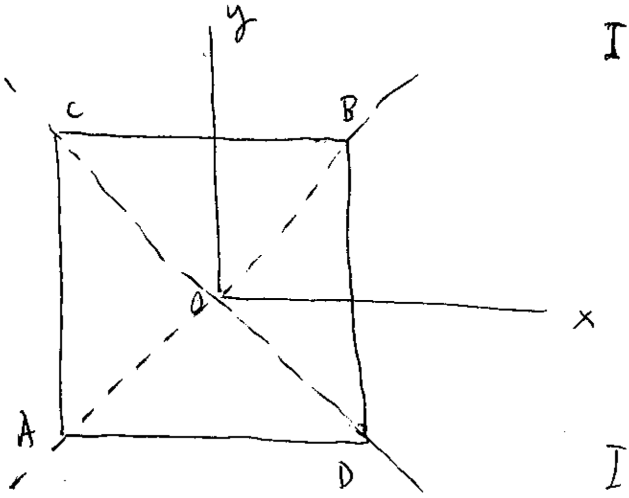
(b) $I_y = m\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}ma^2$

(c) $I_z = I_x + I_y \Rightarrow I_x = ma^2 - \frac{1}{2}ma^2 = \frac{1}{2}ma^2 = I_y$

BS K

8.5. **Kare Plaka** : Katı kare bir plakanın kendi düzlemindeki köşegensel bir eksene göre eylemsizlik momentinin düzlemde, merkezden geçen, karenin kenarlarına paralel bir eksene göre eylemsizlik momenti ile aynı olduğunu ispat ediniz. (Dik eksen teoremi, simetri ile birlikte, hesap yapmaksızın ispatı sağlar.)

Çözüm:



$$I_{AB} \overset{?}{=} I_x$$

Simetri;

$$I_{AB} = I_{CD}$$

Dik Eksenler Teoremi;

$$I_z = I_{AB} + I_{CD} \ (\text{ya da}) \ I_z = I_x + I_y$$

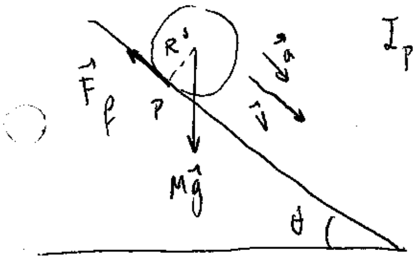
$$= 2 I_{AB} = 2 I_{CD} \qquad = 2 I_x = 2 I_y$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{AB} = I_x} \quad \boxed{I_{CD} = I_y}$$

8.6. Yuvarlanan Katı Cisimler: Dolu bir silindir, ince duvarlı silindirsel bir kabuk ve ince duvarlı küresel bir kabuk, θ eğim açılı bir eğik düzlemde yuvarlanıyor. Cisimlerin R yarıçapları aynıdır. Herbirinin ivmesini bulunuz.

Çözüm:

Not: Kaymadan Yuvarlanma: Kütle dağılımı merkeze göre simetrik, dairesel kesitli bir cismin eğik düzlemde yuvarlanması:



$I_p = I_c + MR^2$ P etrafındaki ani dönmenin açısal hızı : $\omega = \frac{v}{R}$

$$J_p = I_p\,\omega = (I_c + MR^2)\frac{v}{R}$$

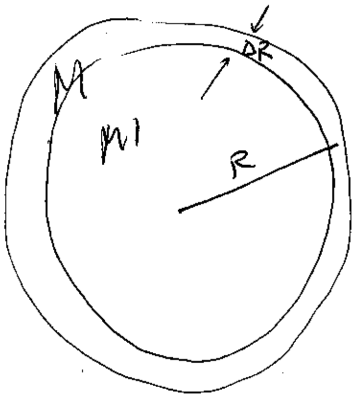
$$\vec{N}_p = \vec{R} \times M\vec{g} \Rightarrow N_p = MgR\sin\theta$$

$$\frac{dJ_p}{dt} = N_p \Rightarrow (I_c + MR^2)\frac{a}{R} = MgR\sin\theta \Rightarrow \boxed{a = \frac{g\sin\theta}{1 + I_c/MR^2}}$$

İnce duDolu ~~silindirsel~~ Kabuk: $I_c = \frac{1}{2}MR^2 \Rightarrow a = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{(1/2)\cancel{MR^2}}{\cancel{MR^2}}} = \frac{2}{3}g\sin\theta$

Katı (Dolu) Küre: $I_c = \frac{2}{5}MR^2 \Rightarrow a = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{(2/5)\cancel{MR^2}}{\cancel{MR^2}}} = \frac{5}{7}g\sin\theta$

İnce Duvarlı Küre:



$$I_c = \frac{2}{5}MR^2 - \frac{2}{5}M'(R-\Delta R)^2 \quad \begin{cases} M' = \frac{4}{3}\pi (R-\Delta R)^3 \rho \\ M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \end{cases}$$

$$M_{KABUK} = 4\pi R^2 \Delta R \rho$$

$$= \frac{2}{5}\frac{4}{3}\pi\rho\left(R^5 - (R-\Delta R)^5\right) = \frac{2}{5}\frac{4}{3}\pi\rho\left(\cancel{R^5} - \cancel{R^5} + 5\frac{\Delta R}{\cancel{R}}R^{\overset{4}{\cancel{5}}} + \cdots\right.$$

$$= \frac{2}{15}4\pi\rho R^2 \Delta R\, 5R^2 = \frac{2}{3}M_{KABUK}R^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{(2/3)\cancel{M_K R^2}}{\cancel{M_K R^2}}} = \frac{3}{5}g\sin\theta$$

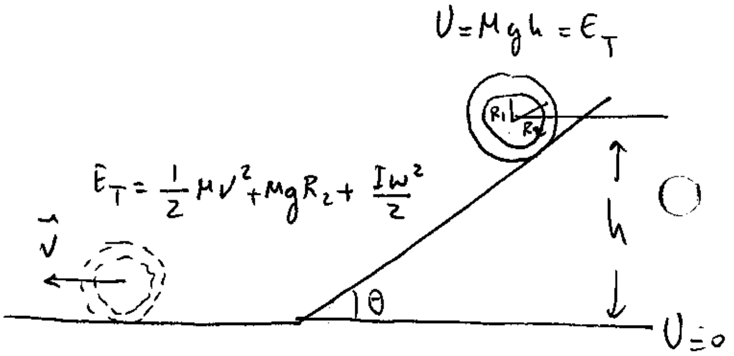
BS K

8.7. <u>İçi Boş Kürenin Yuvarlanması</u>: İç yarıçapı R_1, dış yarıçapı R_2 olan içi boş bir küre yatayla θ açısı yapan eğik bir düzlemde kaymadan yuvarlanıyor. (a) Açısal ve çizgisel ivmeleri bulunuz. (b) Alt ucunda düzlem kısa bir geçiş kısmı ile birleşir. ve geçiş kısmı yatay bir düzleme dönüşür. Cisim durgun halden kütle merkezi, yatay düzlemden h yüksekliğinden bırakılmış ise, son yatay düzlemde ne kadar hızla hareket eder? (Enerjinin korunumunu kullanınız.

Çözüm :

(a)

$$M = \frac{4}{3}\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right)\rho$$



$$I = \frac{2}{5}\left(\frac{4}{3}\pi R_2^3\rho\right)R_2^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{4}{3}\pi R_1^3\rho\right)R_1^2$$

$$= \frac{2}{5}\,\frac{4}{3}\pi\rho\left(R_2^5 - R_1^5\right)$$

$$a = \frac{g\sin\theta}{1 + \dfrac{\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\pi\rho\left(R_2^5 - R_1^5\right)}{\frac{4}{3}\pi\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right)R_2^2}} = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{2}{5}\left(1 - R_1^5/R_2^5\right)/\left(1 - R_1^3/R_2^3\right)}$$

$$V = \omega R \Rightarrow a = \frac{dV}{dt} = \frac{d\omega}{dt}R \Rightarrow \alpha R = a \Rightarrow \alpha = a/R = a/R_2$$

$R = R_2$ merkezin dönme noktasına olan uzaklığı :

(b)

$$Mgh = \frac{1}{2}MV^2 + MgR_2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad \omega = \frac{V}{R_2}$$

$$= \frac{1}{2}MV^2 + MgR_2 + \frac{1}{2}I\frac{V^2}{R_2^2}$$

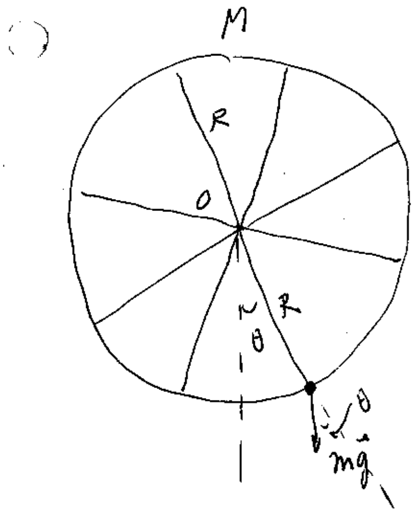
$$= \frac{1}{2}MV^2\left(1 + \frac{I}{MR_1^2}\right) + MgR_2 \Rightarrow \boxed{V^2 = \frac{2g\left(h - R_1\right)}{\left(1 + I/MR_1^2\right)}}$$

BS K

✓

8.11. Dengelenmemiş Katı Cisim: M kütleli R yarıçaplı ince bir çember ya da halka düşey düzlemde, merkezinden geçen yatay bir düzleme göre serbestçe dönecek şekilde, kütlesiz çubuklar ile tutturulmuştur. Çevredeki bir noktaya m kütleli bir parçacık yapıştırılıyor ve bu parçacık sistemi m aşağıda olacak şekilde dengeye getiriliyor. Küçük salınımlar için frekansı bulunuz. Ayrıca m tepede iken sistem durgun halden bırakılır ise maksimum açısal hızı bulunuz.

Çözüm:



" Halka simetrik olduğundan dolayı halkaya etkiyen (yerçekiminden dolayı) moment yoktur ".

Parçacığa etkiyen moment: $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow N = -mgR\sin\theta = -mg\theta$

$$\vec{N} = \frac{d\vec{J}}{dt} = I_0 \frac{d\vec{w}}{dt} = I_0 \frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2} \Rightarrow \boxed{N = I_0 \ddot{\theta}} \quad I_0 = MR^2 + mR^2 = (M+m)R^2$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{mg\cancel{R}}{(m+M)R^{\cancel{2}}}\theta \Rightarrow \boxed{w^2 = \frac{mg}{(m+M)R}} \quad w = \sqrt{\frac{mg}{(m+M)R}}$$

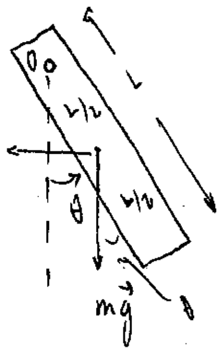
(b) m tepede iken $P.E = T.E = mg(2R); (v = 0, \theta = 0)$

$$\Rightarrow mg(2R) = \frac{1}{2}Jw^2 = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(m+M)R^2\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{4mg\cancel{R}}{(m+M)R^{\cancel{2}}}} = 2w$$ (Açısal hız)

8.9.) Bileşik Sarkaç : (Eşdeğer Uzunluk) Bir ucundan, bileşik sarkaç gibi asılan, L uzunluklu düzgün bir çubuğun, küçük titreşimler için uzunluğu 2L/3 olan basit bir sarkaç ile aynı frekansta olacağını ispat ediniz.

Çözüm:



O etrafında Moment alalım

$\vec N = \vec r \times \vec F \Rightarrow N = -Mg\frac{L}{2}\sin\theta$ (θ'ya zıt.)

$\vec N = \frac{d\vec J}{dt} = I\frac{d\vec\omega}{dt} \Rightarrow -Mg\frac{L}{2}\sin\theta = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = I\ddot\theta$

Küçük salınımlar $\sin\theta \simeq \theta$

$\Rightarrow -Mg\frac{L}{2}\theta = I\ddot\theta \Rightarrow \ddot\theta + \left(\frac{MgL}{2I}\right)\theta = 0 \rightsquigarrow \omega^2 = \frac{MgL}{2I}$, $I = \frac{1}{3}ML^2$ (K.M. den geçen eksene göre)

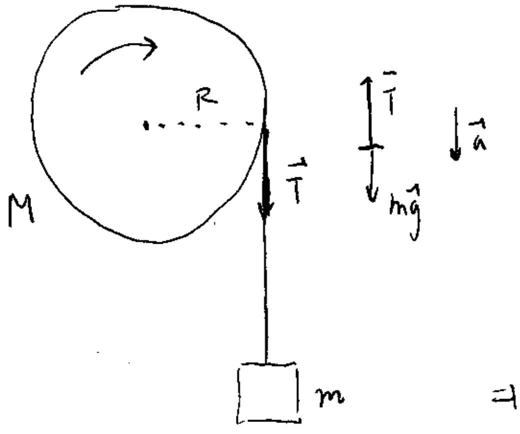
$$\omega^2 = \frac{Mg\cancel{L}}{\frac{2}{3}ML^{\cancel{2}}} = \frac{3g}{2L} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{3}L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow \boxed{l = \frac{2}{3}L}$$

BS K

8.16. Açısal ivme: 2.0 kg kütleli ve 4.0 cm yarıçaplı dolu bir silindir yatay olan eksenine göre dönmeye sınırlıdır. Çevresine bir ip sarılıyor ve ipin serbest ucuna 150 g'lık bir kütle serbestçe asılıyor. (bkz şek. 8.7) Kütlenin çizgisel ivmesini, ipteki gerilme kuvvetini ve silindiri tutan düşey kuvveti bulunuz.

Çözüm:



$$N = \frac{dJ}{dt} = J\frac{dw}{dt} = J\alpha \quad \Big\} \; TR = I\alpha$$

$$\vec{N} = \vec{r}\times\vec{F} \Rightarrow N = TR \qquad \alpha = \frac{a}{R} \quad \Big\} \; TR = I\frac{a}{R}$$

$$J = \frac{1}{2}MR^2$$

$$mg - T = ma$$

$$\Rightarrow mg = ma + I\frac{\alpha}{R} = ma + I\frac{a}{R^2} = \left(\frac{I}{R^2} + m\right)a$$

$$\# \Rightarrow a = \frac{m}{m + \frac{I}{R^2}}g = \frac{m}{m + \frac{(1/2)M\cancel{R^2}}{\cancel{R^2}}}g \Rightarrow a = \frac{m}{m + \frac{M}{2}}g = \frac{150}{150 + \frac{2000}{2}}980 = 128\,cm/s^2$$

$$\# \; \alpha = \frac{a}{R} = \frac{128}{4} = 32\,rad/s^2$$

$$T = \frac{I}{R}\alpha = \frac{1}{2}M\overset{a}{\boxed{R\alpha}} = \frac{1}{2}2000.128 = 1,28\cdot10^5\,dyn.$$

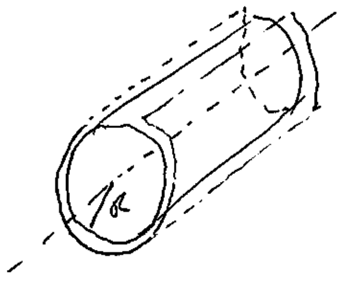
Silindirin K.M sabit, ivmelenmez. Öyle ise;

$$F = mg + T = 2000\times980 + 1.28.10^5 = 20.9\times10^5\,dyn$$ (Yukarı doğru.)

④ ✓

8.8. Sürtünme dönme momenti: Yarıçapı 50 cm, kalınlığı 20 cm ve kütlesi 1200 kg olan dolu silindir şeklindeki bir kasnak, yataklar üzerinde 150 dönme/s başlangıç hızla serbestçe dönmektedir. Bir sürtünme freni ile durdurulmak isteniyor. Fren sisteminde bir fren pabucu kasnak çevresine 40 kg ~~ağırlığı~~ eşdeğer bir kuvvet ile bastırılmaktadır. Sürtünen yüzeyler arasındaki sürtünme katsayısı 0.4'dür. ve bağıl yüzey hızından bağımsız varsayılmaktadır. (a) Fren hızlı olarak uygulanır ise, kasnak duruncaya kadar ne kadar açısal yol alır? (b) Duruncaya kadar geçen zaman ne kadardır?

Çözüm



$R = 50$ cm

$M = 1200$ kg

$$\hat{N} = \bar{r} \times \bar{F} \Rightarrow N = F_s R = \mu N R = I\alpha$$

a)

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{\mu N R}{I} = -\frac{\mu N R}{\frac{1}{2} M R^2} = -\frac{0.4 \times 40.10^3 \times 980 \times 50}{\frac{1}{2} . 1.2 \times 10^6 \times 50^2}$$

$$= -0.523 \text{ rad}/s^2$$

$$\cancel{w^2}_0 = w_0^2 + 2\alpha\theta \Rightarrow \theta = -\frac{w_0^2}{2\alpha} = -\frac{(150 \times 2\pi)^2}{-2 . 0.523} = 8.5 \times 10^5 \text{ rad.}$$

b)

$$\theta = w_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow t^2 + \frac{2w_0}{\alpha} t + \frac{w_0^2}{\alpha^2} = 0 \Rightarrow t = -\frac{w_0}{\alpha} = -\frac{150 \times 2\pi}{-0.523}$$

$$= 1.8 . 10^5 s.$$

θ

$\dot{\theta} = w$

$\ddot{\theta} = \alpha$

x

$\dot{x} = v$

$\ddot{x} = a$

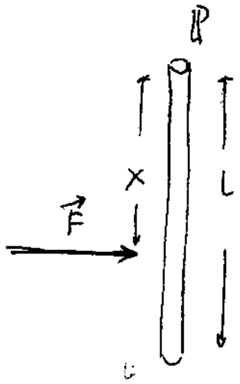
$v^2 = v_0^2 + 2ax$

BS K

8.10. Vurma Merkezi: Bir ucundan P noktasındaki mesnede asılı, L uzunluklu katı bir çubuk alalım. Çubuğu sarkaç hareketlerine başlatmak için şek. 8.17'de gösterildiği gibi kısa bir süre ile etkiyen $\vec{F}$ kuvveti (yani bir itme kuvveti) uygulanacaktır. P'deki mesnet düzeni çok kırılgandır ve F'yi P'de bir teğet kuvveti meydana getirmeyecek bir x uzaklıkta uygulamak gereklidir. Bu koşulu sağlayacak x değerini bulunuz. Bu konuma, P asılma noktasının vurma merkezi denir. (Yardım: F'nin etkisi K.M'ni ivmelendirmek ve P etrafındaki momenti ile P'ye göre açısal ivme vermek olacaktır. P'de bir teğet kuvveti olmadığı varsayımı ile, bu iki ivmenin uyuşumu x'in değerini L cinsinden belirtecektir.)

Çözüm:

P'de $\sum_P \vec{F} = \vec{0}$



$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \Rightarrow \int \vec{F}dt = \int d(m\vec{v}) = \Delta(m\vec{v})$$

$$\vec{N} = I\frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{d}{dt}(I\vec{w}) \Rightarrow \int \vec{N}dt = \int d(I\vec{w}) = \Delta(I\vec{w})$$

$$\vec{N} = \vec{x} \times \vec{F} \Rightarrow \boxed{N = xF}, \quad \boxed{V_{KM} = w\frac{L}{2}}, \quad I_{PM} = \frac{1}{3}ML^2$$

$$\int |\vec{F}|dt = \Delta(m\vec{v}) = mw\frac{L}{2}$$

$$x\int |\vec{F}|dt = \Delta(I|\vec{w}|) = \frac{1}{3}ML^2w$$

$$\Rightarrow \int Fdt = \frac{1}{3}ML^2\frac{w}{x}$$

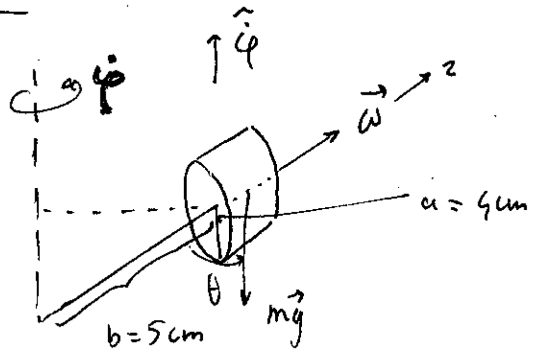
$$\Rightarrow \frac{\cancel{M}\cancel{w}L^{\cancel{2}}}{3x} = \cancel{m}\frac{\cancel{w}\cancel{L}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{3}L}$$

BS K

8.15.) Jiroskop: Belirli bir jiroskop $a = 4\,cm$ yarıçaplı, dolu bir silindirden oluşmaktadır. Jiroskop kütlesiz bir sap ile tutulmaktadır. ve sapın ucu, silindirin kütle merkezinden 5cm ötede serbestçe mesnetlenmiştir. Düşeyden belli bir eğiklik açısında kararlı preseseryonla hareket ettiği ve presesyonun her 3 s'de bir tam çembersel harekette oluştuğu gözleniyor. Jiroskobun kendi eksenine göre açısal dönme hızını hesaplayınız.

Çözüm:



$$J = \frac{1}{2} M a^2$$

$$w = ?$$

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow N = b\,mg \sin\theta$$

$\dot{\varphi}$: presesyon açısal hızı, $\Rightarrow \frac{2\pi}{\dot{\varphi}} = 3$; $\boxed{\dot{\varphi} = \frac{2\pi}{3}}$

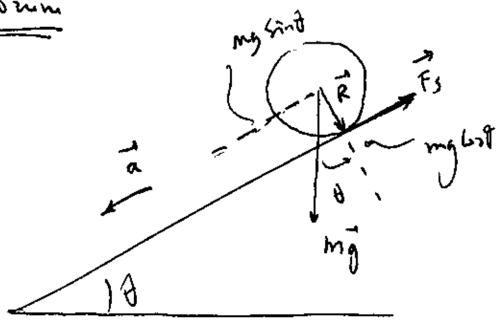
$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{\dot{\varphi}} \times I_z \vec{w} \Rightarrow \frac{dJ}{dt} = I_z w \dot{\varphi} \sin\theta \qquad J = I w$$

$$\vec{N} = \frac{d\vec{J}}{dt} \Rightarrow mgb \cancel{\sin\theta} = I_z w \dot{\varphi} \cancel{\sin\theta} \Rightarrow w = \frac{bmg}{I \dot{\varphi}} = \frac{bmg}{\frac{1}{2} m a^2 \dot{\varphi}} = \frac{2bg}{a^2} \frac{3}{2\pi}$$

$$w = \frac{2 \times 980 \times 5 \times 3}{16 \times 2\pi} = 292\,rad/s$$

8.19. Minumum Sürtünme Katsayısı: Simetrik bir cismin eğik bir düzlemde kaymadan yuvarlanması için $\mu \geq \tan\theta \Big/ \left[1+\frac{MR^2}{I_c}\right]$ olması gerektiğini gösteriniz.

Çözüm



$$mg\,\text{Sin}\theta - F_s = ma$$

$$\left.\begin{aligned}\vec N &= \vec R \times \vec F_s \\ &= I\vec\alpha\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} N = RF_s &= I\alpha \\ \alpha &= \frac{a}{R}\end{aligned}\right\}$$

Değme Noktasının durgun olması kaymadan yuvarlandığı anlamına gelir. Eğer kayma varsa,

$F_s = \mu N = \mu\, mg\,\text{Cos}\theta$ ve $mg\,\text{Sin}\theta - \mu mg\,\text{Cos}\theta = ma$ olur.

$a = \dfrac{g\,\text{Sin}\theta}{1 + I/MR^2}$ olduğunu biliyoruz.

$$\Rightarrow mg\,\text{Sin}\theta - \mu mg\,\text{Cos}\theta = \frac{mg\,\text{Sin}\theta}{1+I_c/MR^2}\ ;\ \cancel{mg}\,\text{Sin}\theta\left(1-\frac{1}{1+I_c/MR^2}\right) = \mu\cancel{mg}\,\text{Cos}\theta$$

$$\mu = \tan\theta\left(1-\frac{1}{1+I_c/MR^2}\right) = \tan\theta \cdot \frac{I_c/MR^2}{1+I_c/MR^2} = \frac{\tan\theta}{1+(I_c/MR^2)^{-1}}$$ # μ bundan büyük olmalı.

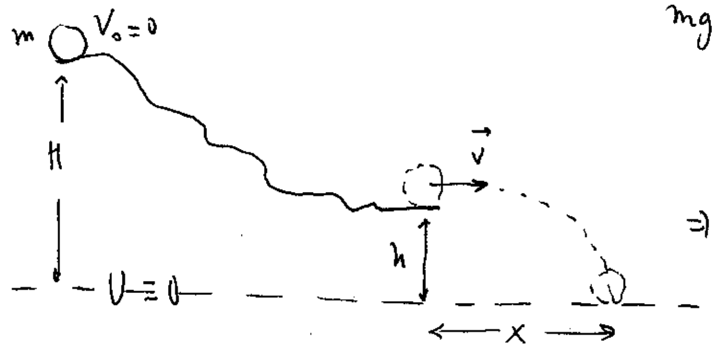
$$\boxed{\mu \geq \tan\theta \Big/ \left[1 + MR^2/I_c\right]}$$

BS K

BÖLÜM 8. (EK)

#1) Şekilde gösterilen yolun üst başından bir küre hareketsiz durumdan başlayarak, yolun sağ ucuna kadar kaymadan yuvarlanıyor. (H= 60m , h= 20m) Yolun sağ ucu yatay doğrultudadır. Cismin tabana çarptığı uzaklığı bulunuz.

Çözüm:



$$mgH = mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Iw^2 \quad , \quad I = \frac{2}{5}mR^2$$

$$w = \frac{v}{R}$$

$$\Rightarrow mg(H-h) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{R}\right)^2\left(\frac{2}{5}mR^2\right)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{10g(H-h)}{7}}$$

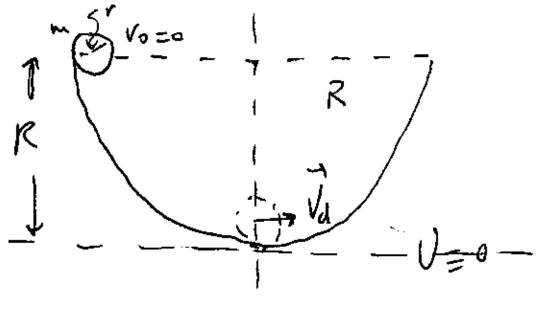
Küre t saniyede h kadar düşer ise;

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

Aldığı yol ; $X = vt \Rightarrow X = \sqrt{\frac{10g(H-h)}{7}}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2h}{9}\,\frac{10g(H-h)}{7}} = 47.8\text{ m}$

#2) Küçük bir küre simetri ekseni düşey doğrultulu olan büyük bir yarım kürenin iç yüzeyinde kaymadan yuvarlanmaktadır. Küre en üst noktada hareketsiz başlayarak yuvarlanmaktadır. (a) Kürenin dip noktadaki kinetik enerjisi nedir? (b) enerjinin kaçta kaçı dönmeden kaynaklanır? (b) Küçük kürenin dip noktada büyük yarı küre yüzeyine dik doğrultuda uyguladığı kuvvet nedir? Küçük kürenin yarıçapı r, kütlesi m, büyük kürenin yarıçapı ise R'dir.

Çözüm:



$$mgR = \frac{1}{2}mV_d^2 + \frac{1}{2}Jw^2 + mgr \qquad J = \frac{2}{5}mr^2 \qquad w = \frac{V_d}{r}$$

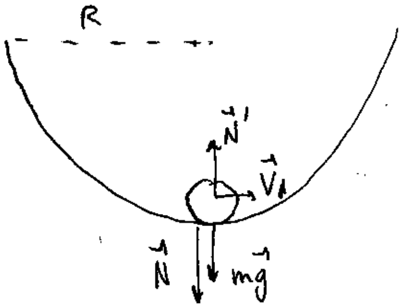
(Kürenin tüm kütlesi merkezde toplanmış)

$$V_d = \sqrt{\frac{10g(R-r)}{7}}$$

Kürenin dip noktadaki K.E= $K_{Top} = \frac{1}{2}mV_d^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mg(R-r)$

$$\left.\begin{aligned} K_{dön} &= \frac{1}{2}Jw^2 = \frac{1}{2}\,\frac{2}{5}m\cancel{r^2}\frac{V_d^2}{\cancel{r^2}} = \frac{m}{5}V_d^2 = \frac{10mg(R-r)}{35} \\ K_{Top} &= mg(R-r) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{K_{dön}}{K_{Top}} = \frac{2}{7}$$

② (b)



$$\vec{N} = -\vec{N}'$$

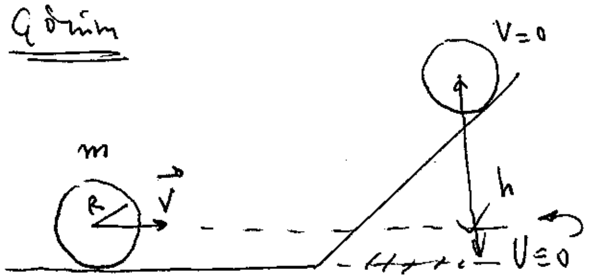
$$N' - mg = m\frac{V_1^2}{R} \quad \text{merkezcil kuvvet}$$

$$N' = mg + m\frac{V_1^2}{R} \; ; \; V_1^2 = \frac{10g(R-r)}{7}$$

$$N' = mg + \frac{m}{R}\,\frac{10g(R-r)}{7} = mg\left(1 + \frac{10(R-r)}{7}\right) \quad N' = N = mg\left(\frac{17R-10r}{7R}\right)$$

#3) Kütlesi m ve yarıçapı R olan bir cisim, yatay düzlem üzerinde kaymaksızın $\vec{V}$ hızı ile yuvarlanmaktadır. Cisim sonra değeri $h = 3V^2/4g$ ile verilen bir maksimum yüksekliğe kadar tırmanıyor. (a) Cismin eylemsizlik momentini bulunuz. (b) Cismin şekli hakkında ne söyleyebilirsiniz?

Çözüm



$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgh \quad , \omega = \frac{V}{R} \quad , h = \frac{3V^2}{4g}$$

$$\frac{1}{2}m\cancel{v^2} + \frac{1}{2}I\frac{\cancel{v^2}}{R^2} = mg\frac{3\cancel{v^2}}{4g}$$

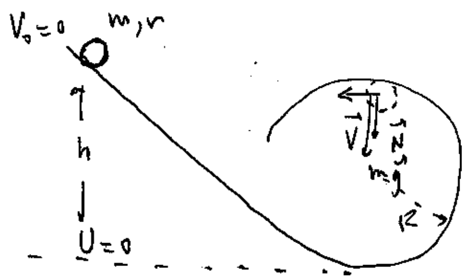
$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

(b) Katı bir silindir yada disk ;

BS K

#4) Şekilde gösterilen yol üzerinde, yarıçapı **r**, kütlesi **m** olan küçük bir mermer bilye kaymadan yuvarlanmaktadır. Bilye yolun düz olan kısmı üzerindeki bir noktadan kaymadan yuvarlanmaktadır. (a) Bilyenin şekilde gösterilen halkanın en üst noktasında düşmeden yoluna devam edebilmesi için, serbest bırakıldığı minimum yüksekliği bulunuz. (b) Eğer bilye tabandan itibaren 6R kadar yükseklikten bırakılırsa Q noktasında halka şeklindeki yola etkiyen yatay doğrultudaki kuvvetin büyüklüğünü bulunuz. $(r \ll R)$

Çözüm :



h minimum olduğunda $\vec{N}=0$ olacaktır. Ve bilyenin bu noktadaki hızı da minimum olacaktır;

$$mg = m\frac{V_{min}^2}{R} \Rightarrow \boxed{V_{min} = \sqrt{gR}}$$

$r \ll R$

$$mgh = \frac{1}{2}mV_{min}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mg(2R - \cancel{r}) \quad \begin{cases} \omega = \frac{V_{min}}{r} \\ I = \frac{2}{5}mr^2 \end{cases}$$

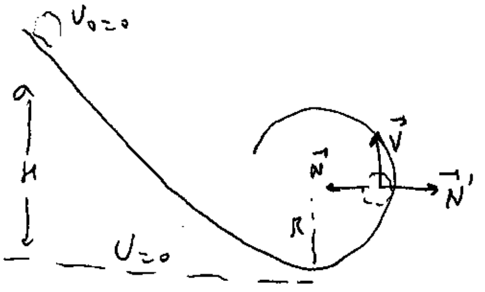
$$mgh = \frac{1}{2}mgR + \frac{1}{2}\frac{2}{5}m\cancel{r^2}\frac{gR}{\cancel{r^2}} + mg(2R)$$

$$\Rightarrow h = 2.7R$$

(b) $H = 6R$

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgR$$

$$6mgR = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\frac{V^2}{r^2} + mgR$$



$$\Rightarrow V = \sqrt{\frac{50gR}{7}}$$

$$N = m\frac{V^2}{R} = m\frac{50g\cancel{R}}{7\cancel{R}} = \frac{50}{7}mg$$

$$\vec{N} = -\vec{N}' \Rightarrow N' = \frac{50}{7}mg$$