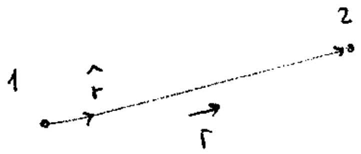
BÖLÜM - 9

TERS - KARE KUVVET YASASI

Durgun iki noktasal parçacık arasındaki elektrostatik ve çekim kuvvetleri

$$F = \frac{c}{r^2} \quad \text{(Merkezcil (ters-kare) kuvvetler)}$$



$$\vec{F} = \frac{c}{r^2}\,\hat{r} \quad \text{(2. parçacığa etkiyen kuv.)}$$

M_1, M_2

$C = -G M_1 M_2$

$G = 6.67\times10^{-8}\ cm^3/gr\text{-}s^2$

$\quad = 6.67\times10^{-11}\ m^3/kg\text{-}s^2$

q_1, q_2

$C = q_1 q_2$

$\quad = 9.0\times10^{9}\, q_1 q_2$ (UBS)

$F = \frac{c}{r^2}$ 'de r'nin üssünün 2.000... olduğu deneyler ile belirlenmiş. Bu elektrostatik kuvvetlerde 10^{-13} cm mertebesindeki uzaklıklara kadar doğrulanmış.

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{c}{r^2}$$

$$U(r) = \frac{c}{r} + Sbt$$

parçacıklar birbirinden sonsuz uzaklıkta iken $U(\infty)=0 \Leftrightarrow Sbt=0 \Rightarrow \boxed{U(r) = \frac{c}{r}}$

(2)

$$U(r) = G\frac{M_1M_2}{r} \qquad U(r) = \frac{q_1q_2}{r} = k\frac{q_1q_2}{r}$$

(+) protonlarla, nötronlarla

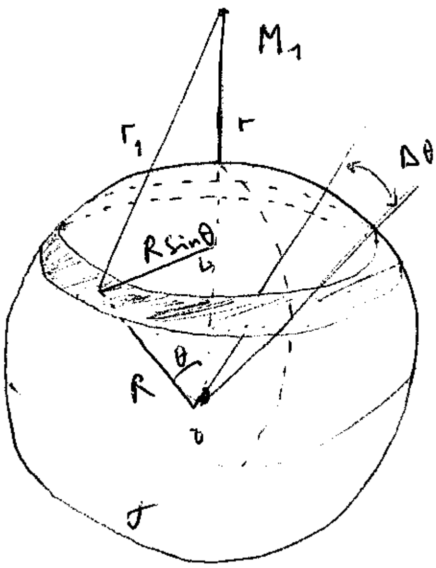
proton nötron (aran mesafeler $2\cdot10^{-13}$ cm)

kuvvetler daha şiddetli (Nükleer kuvvet)

(+) Elektronlar arası Coulomb.

çift kutuplar ve ters-kare.

NOKTASAL BİR KÜTLE İLE KÜRESEL KABUK ARASINDAKİ (P.E) ve KUVVET

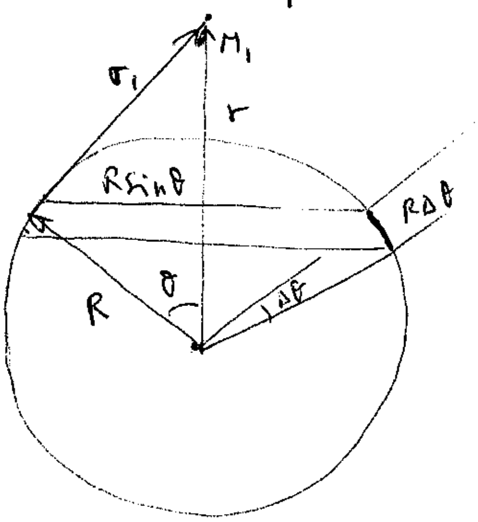


Genişlik: $R\Delta\theta$

$$(2\pi R\sin\theta)(R\Delta\theta) = 2\pi R^2\sin\theta\,\Delta\theta = \text{halkanın alanı}$$

$$M_H = (2\pi R^2\sin\theta\,\Delta\theta)\sigma$$

$$U_H = -G\frac{M_1M_H}{r_1} = -G\frac{M_1(2\pi R^2\sin\theta\,\Delta\theta)\sigma}{r_1}$$



$$\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{R}$$

$$r_1^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta$$

$$\cancel{2}r_1\Delta r_1 = -2rR\,\Delta(\cos\theta)$$

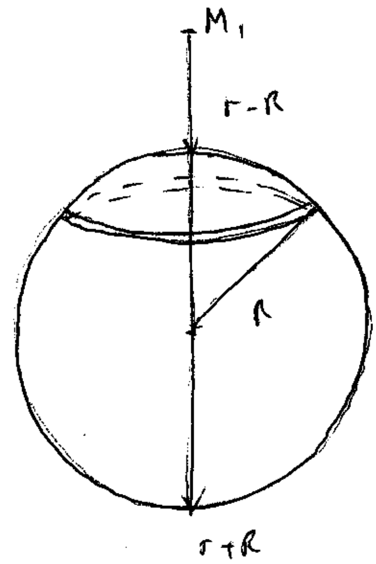
$$= \cancel{2}rR\sin\theta\,\Delta\theta$$

$$\boxed{R\sin\theta\,\Delta\theta = \frac{r_1}{r}\Delta r_1}$$

BS K

$$u_H = -G\frac{M_1\, 2\pi R\, \frac{r_1}{r}\,\Delta r_1}{\cancel{r_1}}\,\sigma = -\frac{GM_1\,(2\pi R\,\Delta r_1)\,\sigma}{r}$$

r_1; $(r-R)$ ile $(r+R)$ arasında değişiyor

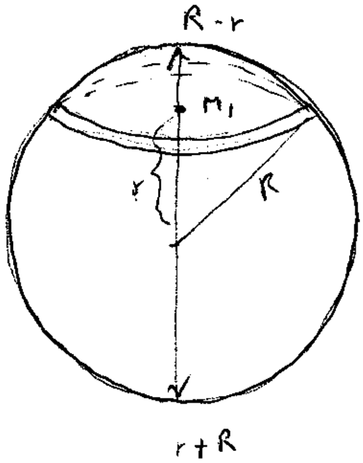


$$\sum \Delta r_1 = (r+R)-(r-R) = 2R$$

$$u_{kabuk} = \sum u_H = -\frac{GM_1\, 2\pi R\sigma}{r}\sum \Delta r_1$$

$$= -\frac{GM_1\, 4\pi R^2\sigma}{r}$$

$$= -\frac{GM_1 M_K}{r} \quad (r>R) \quad \text{(Merkezde toplanmış gibi)}$$



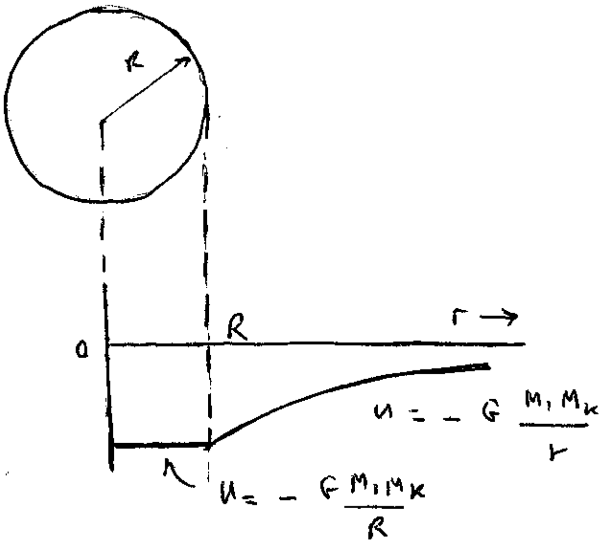
$$\sum \Delta r_1 = (R+r)-(R-r) = 2r$$

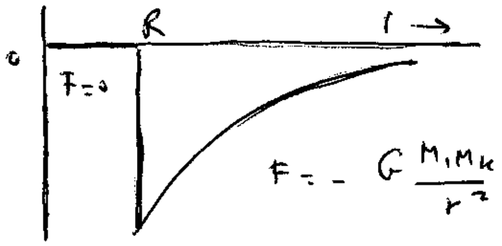
$$\Rightarrow u_{kabuk} = \sum u_H = -G\frac{M_1\, 2\pi R\sigma}{r}\sum \Delta r_1$$

$$= -GM_1\, 4\pi R\sigma = -GM_1\frac{4\pi R^2\sigma}{R}$$

$$= -\frac{GM_1 M_K}{R} \quad (r<R) \quad \text{(sabit.}$$

$$F = -\frac{\partial u}{\partial r} = \begin{cases} -G\dfrac{M_1 M_K}{r^2} & (r>R) \\ 0 & (r<R) \end{cases}$$





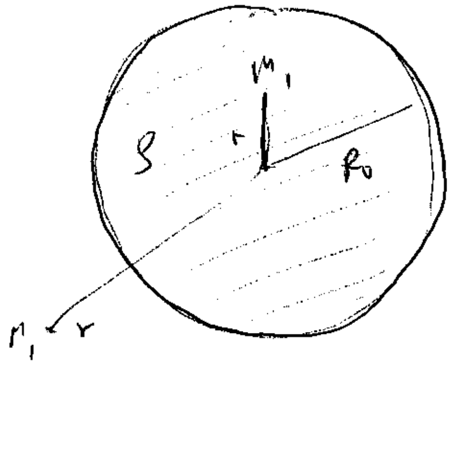
NOKTASAL KÜTLE İLE DOLU KÜRE ARASINDAKİ (P.E) ve KUVVET

$$U_{küre} = \sum U_{kabuk} = -G\frac{M_1}{r}\sum M_k = -G\frac{M_1 M}{r} \qquad r > R_0$$

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r} = -G\frac{M_1 M}{r^2} \qquad r > R_0$$

Noktasal kütle kürenin içinde ise; kuvvet $-G\frac{M_1 M_{iç}}{r^2}$ merkeze doğru.

$$M_{iç} = \frac{4}{3}\pi r^3\rho \qquad M = \frac{4}{3}\pi R_0^3\rho$$



$$\Rightarrow F = -G\frac{M_1 \frac{4}{3}\pi r^3\rho}{r^2} = -\frac{4}{3}\pi G M_1\rho r$$

$$= -\frac{G M_1 M}{R_0^3} r$$

$r < R_0$ için pot. enerji $-GM_1M/R_0$'a

M_1 kütlesini R_0'dan r'ye getirmek için

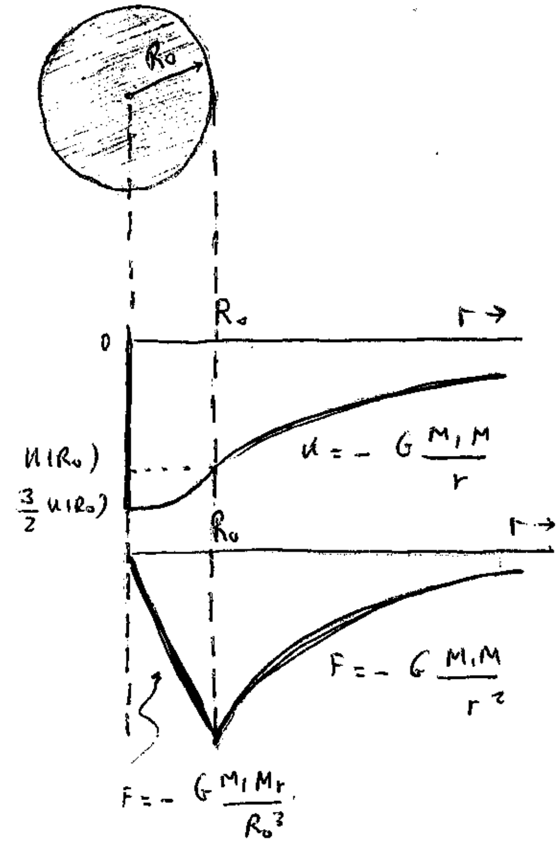
gerekli enerji kullanılarak bulunur.

$$\int_{R_0}^{r} \frac{GM_1M}{R_0^3}\, r\, dr = -G\frac{M_1M}{2R_0^3}(R_0^2 - r^2)$$

$$U(r) = -G\frac{M_1M}{R_0} - G\frac{M_1M}{2R_0^3}(R_0^2 - r^2)$$

$$= -G\frac{M_1M}{R_0}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{R_0^2}\right)$$

$$\Rightarrow U(0) = -\frac{3}{2}u(R_0)$$



ÇEKİM ve ELEKTROSTATİK ÖZ-ENERJİ

Öz-enerji: Başlangıçta birbirinden sonsuz uzaklıkta bulunan sonsuz küçük parçaların bir araya getirilmesi için yapılan iş bir cismin öz-enerjisi adını alır. Gekim kuvveti çekici olduğu için bu işin işareti negatiftir.

N tane ayrı kütlenin karşılıklı çekimlerinden meydana gelen pot. enerji

$$U_i = -G\sum_{i \neq j}^{N} \frac{M_iM_j}{r_{ij}}$$

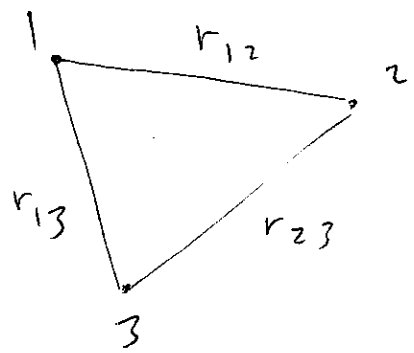
BS K

ÖRNEK:

Galaksinin Çekim Enerjisi:

Galaksimizin kaba yapısı, yaklaşık olarak M kütleli N yıldızdan oluşsun ve her yıldız çifti arasındaki uzaklık R mertebesinde olsun. Bu durumda

$$\mathcal{U} \approx -\frac{1}{2} G (N-1) N \frac{M^2}{R} .$$



$$\mathcal{U} = -G \left(\frac{M_1 M_2}{r_{12}} + \frac{M_1 M_3}{r_{13}} + \frac{M_2 M_3}{r_{23}} \right)$$

$N \approx 1.6 \times 10^{11}$

$R \approx 10^{23}$ cm

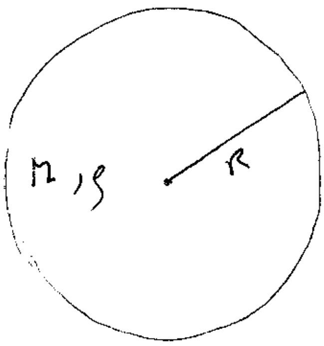
$M \approx 2 \times 10^{33}$ gr (Güneşin Kütlesi)

$$\mathcal{U} \approx -\frac{1}{2} \frac{(7.10^{-8})(1.6 \times 10^{11})^2 (2.10^{33})^2}{10^{23}} \approx -4.10^{58} \text{ erg}$$

$$\mathcal{U} \approx -\frac{1}{2} \frac{(7.10^{-11})(1.6 \times 10^{11})^2 (2.10^{30})^2}{10^{21}} \approx -4.10^{51} \text{ J} \quad (\text{UBS})$$

ÖRNEK :

Düzgün Bir Kürenin Çekim Enerjisi :



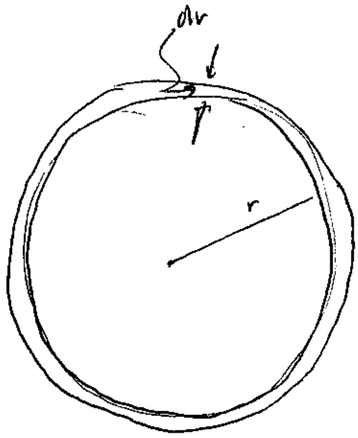
$$U_0 \approx -G\frac{M^2}{R}$$ olabilir mi?

Dolu Kürenin Kütlesi :

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

Kabuğun Kütlesi :

$$4\pi r^2 dr\, \rho$$



kabuğun, iç kürenin varlığından ileri gelen çekim pot. enerjisi

$$-G\frac{\left(\frac{4}{3}\pi r^3\rho\right)\left(4\pi r^2 dr\,\rho\right)}{r} = -\frac{1}{3}G(4\pi\rho)^2 r^4 dr$$

$$U_ö = -\frac{1}{3}G(4\pi\rho)^2\int_0^R r^4 dr = -\frac{1}{2}G(4\pi\rho)^2\frac{R^5}{5}$$

$$= -\frac{3}{5}G\left(\frac{4}{3}\pi R^3\rho\right)^2\frac{1}{R} = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

Güneşin öz-çekim enerjisi : $M_G \simeq 2.10^{33}$ gr $R_G \simeq 7.10^{10}$ cm

$$U_G \simeq -2.10^{48}\ \text{erg} \approx -2.10^{41}\ J$$

BS K

⑧

ÖRNEK :

Elektronun Yarıçapı:

$$E = Mc^2$$

$\frac{3}{5}$ bir hesaba sokulur.

$$U_ö = \frac{3e^2}{5R} = mc^2 \qquad \frac{e^2}{r_0} \equiv mc^2 \qquad r_0 = \frac{e^2}{mc^2} = 2.82 \times 10^{-13}\ \text{cm}$$

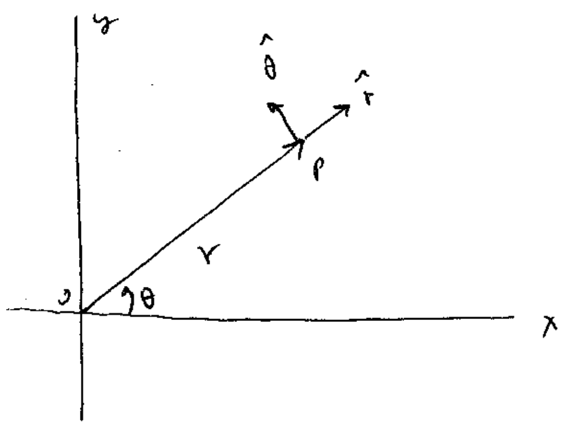
Elektronlar arası elektrik kuvvetinin 10^{-15} cm 'ye kadar e^2/r^2 olduğunu biliyoruz.

YÖRÜNGELER: DENKLEM ve DIŞ-MERKEZLİK.

Çekici bir ters-kare-yasası alanında, dairesel yörüngede hareket eden parçacık problemi incelendi. Böyle bir yörünge için hızla, uzaklık arasında özel bir bağıntı bulunmalıdır. $-(Mv^2/r)\hat{r}$ merkezcil kuvvettir. (−) işareti de dairenin merkezine yönelik olduğunu gösterir. Bu $(C/r^2)\hat{r}$ kuvvetine eşit olmalıdır. $C = -GMM_z$ (9.11) C negatif olmazsa dairesel yörünge olmaz ; $\Rightarrow$ $v = (GM_z/r)^{1/2}$ Bu özel bağıntı sağlanmazsa yörüngenin şekli ne olur? <u>KEPLER PROBLEMİ</u>.

Hareket Denklemi;

$$M\vec{a} = \frac{C}{r^2}\hat{r}$$



$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow M(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \frac{C}{r^2}\ ; \quad \frac{d}{dt}(Mr^2\dot{\theta}) = 0$$

$$J = Mr^2\dot{\theta}\ , \quad \text{Açısal Momentum.} \quad (I)$$

$$\dot{\theta} = \frac{J}{Mr^2} \Rightarrow \ddot{r} - r\frac{J^2}{M^2r^4} = \ddot{r} - \frac{J^2}{M^2r^3} = \frac{C}{Mr^2} \quad (II)$$

(II) denklemi doğrudan çözülemediğinden I ve II'den t yok edilir.

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{J}{Mr^2}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{d\theta^2}\left(\frac{J}{Mr^2}\right)^2 - \frac{2J}{Mr^3}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\frac{J}{Mr^2}$$

(10)

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{J^2}{M^2r^4}\left[\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]$$

$\omega(\theta) = \dfrac{1}{r(\theta)}$ alsın : $\quad \dfrac{d\omega}{d\theta} = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{dr}{d\theta}$

$$\frac{d^2\omega}{d\theta^2} = -\frac{1}{r^2}\frac{d^2r}{d\theta^2} + \frac{2}{r^3}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{J^2}{M^2r^2}\frac{d^2\omega}{d\theta^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{J^2}{M^2}\frac{d^2\omega}{d\theta^2} - \frac{J^2}{M^2}\omega = \frac{C}{M} \; ; \quad \boxed{\frac{d^2\omega}{d\theta^2} + \omega = -\frac{CM}{J^2}}$$

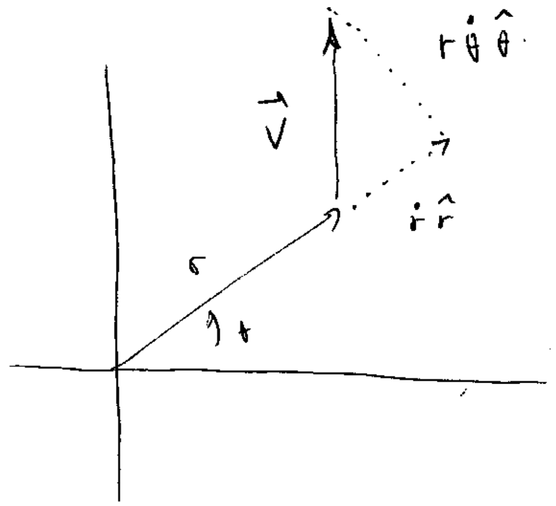
$$\omega = A\cos(\theta + \varphi) - \frac{CM}{J^2} \quad (\text{BSL } 7, (7.1))$$

(sin)

$\varphi = 0$ yörüngenin r, θ düzlemindeki yönelimi önemsiz (?)

$$\boxed{\frac{1}{r} = -\frac{CM}{J^2} + A\cos\theta}$$

(11) A'yı bulalım.



$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{c}{r}$$

$$= \frac{1}{2}M\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{c}{r}$$

$$= \frac{1}{2}M\left(-\frac{J^2}{M^2r^4}\right)\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right] + \frac{c}{r}$$

r ve $\dfrac{d\dot{r}(\theta)}{d\theta}$ konulur
A çözülür

BS K

$$A = \left(\frac{2ME}{J^2} + \frac{C^2 M^2}{J^4} \right)^{1/2} = \frac{CM}{J^2} \left(1 + \frac{2EJ^2}{C^2 M} \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{r} = -\frac{CM}{J^2} \left[1 - \left(1 + \frac{2EJ^2}{C^2 M} \right)^{1/2} \cos\theta \right]} \quad (9.26)$$

Kuvvet çekici olursa C negatif olur. $C = -GMM_2$

$$\frac{1}{r} = \frac{GM^2 M_2}{J^2} \left[1 - \left(1 + \frac{2EJ^2}{G^2 M^3 M_2^2} \right)^{1/2} \cos\theta \right]$$

(9.26) bir konik kesit (koninin düzlem ile kesiti) (elips, daire, hiperbol, parabol) denkleminin kutupsal şeklidir.

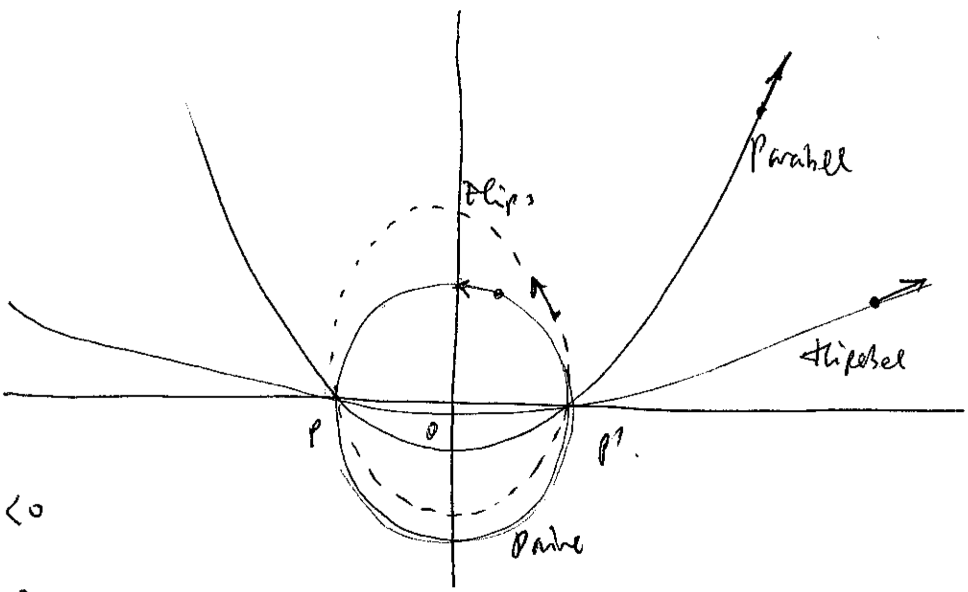
Konik kesit Denklemi: $\frac{1}{r} = \frac{1}{se}(1 - e\cos\theta)$ (9.27) $\left\{ \begin{array}{l} e: \text{dışmerkezlik} \\ s: \text{şeklin ölçeği} \end{array} \right.$

$e > 1$ Hiperbol

$e = 1$ Parabol

$e = 0$ Çember

$0 < e < 1$ Elips.



Yörünge	Dışmerkezlik	
Daire	$e = 0$	$E < 0$
Elips	$e = 1/3$	
Parabol	$e = 1$	$E = 0$
Hiperbol	$e = 3$	$E > 0$

BS K

(12)

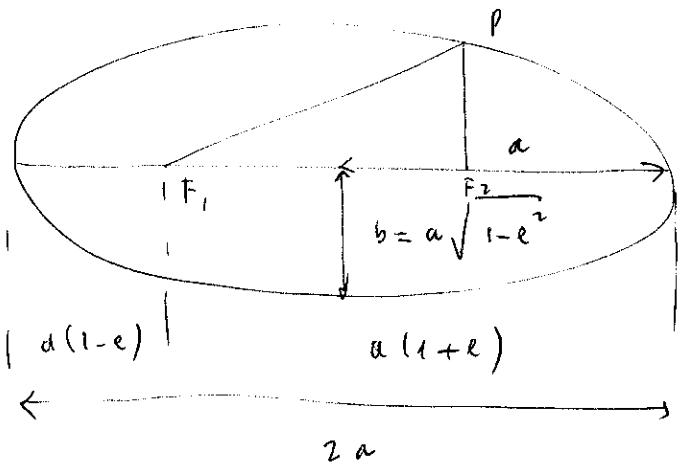
$$e = \left(1 + \frac{2EJ^2}{C^2 M}\right)^{1/2}$$

(#) $C > 0 \Rightarrow E$ daime pozitif $\therefore$ $e \overset{\text{daima}}{>} 1$ Hiperbol

(#) $C < 0 \Rightarrow E$'de K.E, P.E'den büyükse
$E > 0$ ve K.E $r = \infty$ hala pozitiftir.
ters durumda $E < 0$ olur. (sonsuza ulaşamaz.)

Parabol $E = 0$

(#) Verilen bir r için J'nin değeri büyüdükçe E büyür; K.E büyür olmasıyla
fakat J ne kadar büyük olursa olsun $E < 0$ olacak şekilde yörüngeler elde etmek mümkündür.



$F_1P + F_2P = \text{sbt} = 2a$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{(1 - e\cos\theta)} \quad (0 < e < 1)$$

$$b = \sqrt{1-e^2}\, a$$

Alan πab

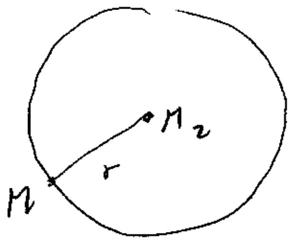
$$e = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}}$$

BS K

Dairesel Yörünge:

Bu $e=0$'a yol açıyor mu?

$$\frac{\cancel{M}v^2}{\cancel{r}} = G\frac{\cancel{M}M_2}{r^{\cancel{2}}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_2}{r}}$$



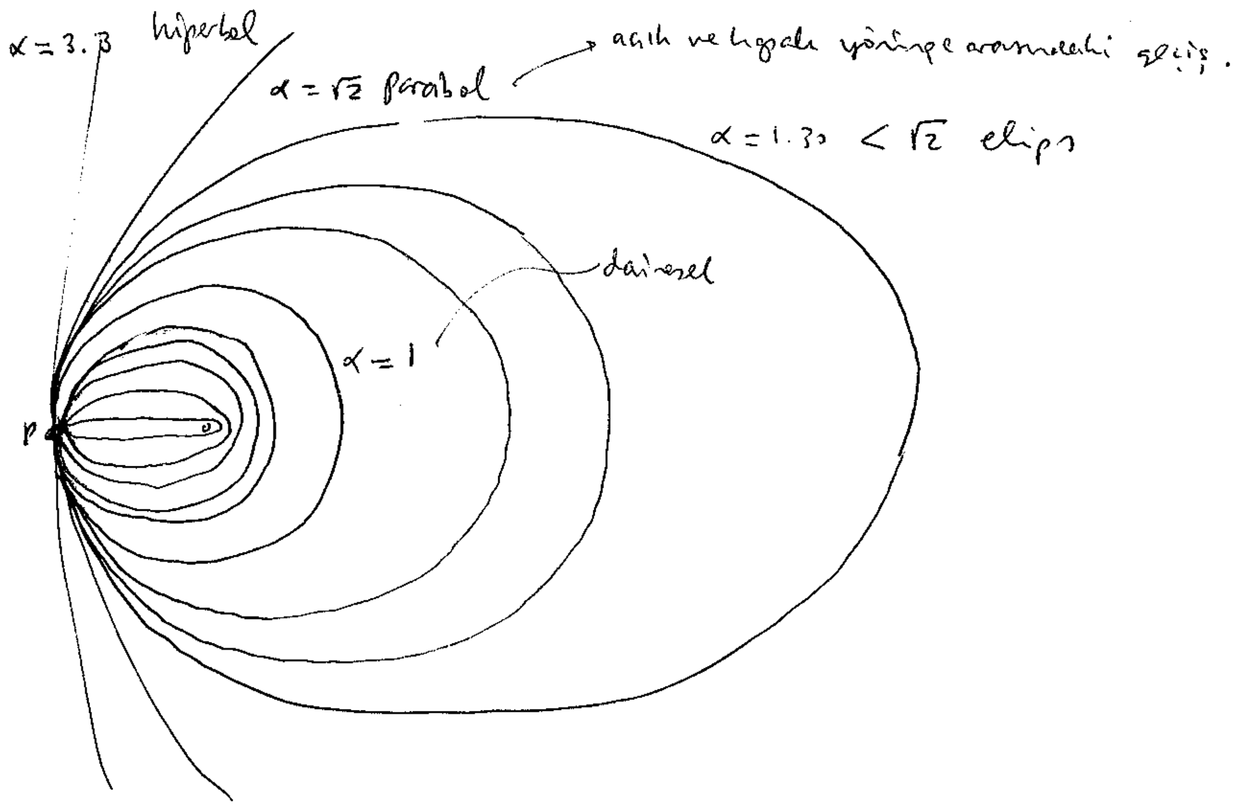
$$J = Mvr = M\sqrt{\frac{GM_2}{r}}\,r = \sqrt{GM^2M_2r}$$

Toplam Enerji: $E = \frac{1}{2}Mv^2 - G\frac{MM_2}{r} = -\frac{1}{2}\frac{GMM_2}{r}$

$$e = \sqrt{1+\frac{2EJ^2}{c^2M}} = \sqrt{1+\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{G}\cancel{M}\cancel{M_2}}{\cancel{r}}\right)\frac{\cancel{2}}{\cancel{G^2}\cancel{M^2}\cancel{M_2^2}}\cdot\frac{1}{\cancel{M}}\cdot\cancel{G}\cancel{M^2}\cancel{M_2}\cancel{r}}$$

$$= 0$$

Kapalı yörüngelerin tümü dairesel yörünge değildir!



BS K

(14)

$$\frac{v_p}{v_0} \equiv \alpha$$

P0 arasındaki hız.

$$E = \frac{1}{2} M v_p^2 - \frac{G M M_2}{r_0} = \frac{1}{2} M \alpha^2 v_0^2 - \frac{G M M_2}{r_0}$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha^2 - 1) M v_0^2 + \frac{1}{2} M v_0^2 - \frac{G M M_2}{r_0}$$

$$= E_0 + \frac{1}{2}(\alpha^2 - 1) M v_0^2$$

ve v_0 dairesel yörüngedeki enerji ve hız.

Dairesel yörüngede $\frac{M v_0^2}{\cancel{r_0}} = \frac{G M M_2}{r_0^{\cancel{2}}}$

$$E_0 = \frac{1}{2} M v_0^2 - \frac{G M M_2}{r_0} = \frac{1}{2} M v_0^2 - M v_0^2 = -\frac{1}{2} M v_0^2$$

$$\Rightarrow E = E_0 - (\alpha^2 - 1) E_0 = (2 - \alpha^2) E_0 = (\alpha^2 - 2)|E_0|$$

$\alpha^2 > 2 \Rightarrow E > 0$ yörünge açık

$\alpha^2 < 2 \Rightarrow E < 0$ yörünge kapalı.

$\alpha^2 = 2 \Rightarrow E = 0$ yörünge parabol.

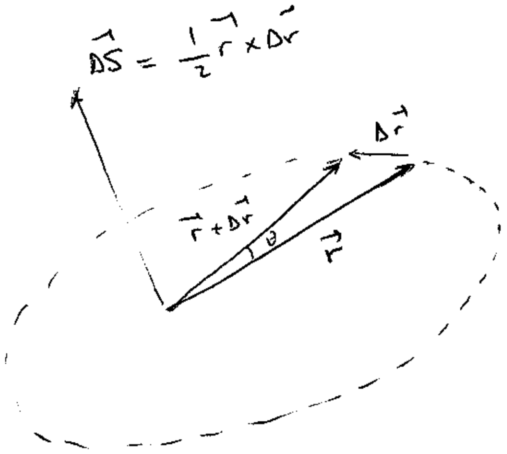
BS K

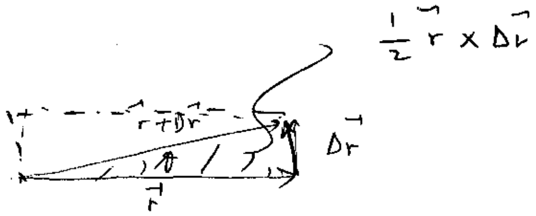
Kepler Yasaları:

(I) Gezegenler Odaklarından birinde güneş bulunan eliptik yörüngeler üzerinde dolanırlar.

(II) Güneşi gezegene bağlayan doğru parçası eşit zamanlarda eşit alanlar süpürür.

(III) Gezegenlerin dolanım sürelerinin kareleri elipslerin büyük ekseninin küpü ile orantılıdır.





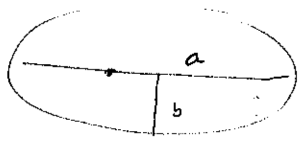
$|\vec{r}\times\vec{\Delta r}| = |\vec{r}|\,|\vec{\Delta r}|\sin\theta$ = paralel kenar alanı.

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v} = \frac{1}{2M}\vec{r}\times\vec{p} = \frac{\vec{J}}{2M}$$ $\vec{J} = sbt$ (Merkezcil kuvvetler)

$$\frac{d|\vec{S}|}{dt} = \frac{|\vec{J}|}{2m} = sbt$$

Hareketin T periyotluk süresi üzerinden entegre edilirse

$$S = \frac{JT}{2M} \quad \text{veya} \quad T = \frac{2SM}{J} = \frac{2\pi abM}{J} \qquad S = \pi ab$$



$2a = r_{max} + r_{min}$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{se}(1 - e\cos\theta) \Rightarrow r = \frac{se}{1-e\cos\theta} \Rightarrow \begin{cases} r_{max} = \dfrac{se}{1+e} \\ r_{min} = \dfrac{se}{1-e} \end{cases} \Rightarrow 2a = \frac{2se}{1-e^2}$$

16

$$2a = \frac{2}{1-e^2} \cdot \left(\frac{J^2}{GM^2 M_2}\right)^{se}$$

$$T^2 = \frac{(2\pi abM)^2}{J^2} = \frac{(2\pi abM)^2}{aGMM_2 M(1-e^2)} = \frac{4\pi^2 ab^2 \cancel{M}}{G\cancel{M}M_2(1-e^2)}$$

$$b^2 = a^2(1-e^2)$$

$$\Rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_2} a^3$$

\# 1 Astronomik Birim (AB): Güneşten dünyaya olan en uzun ve en kısa uzaklıkların yarısı.

$$1 AB = 1.495 \times 10^{13} \text{ cm}$$

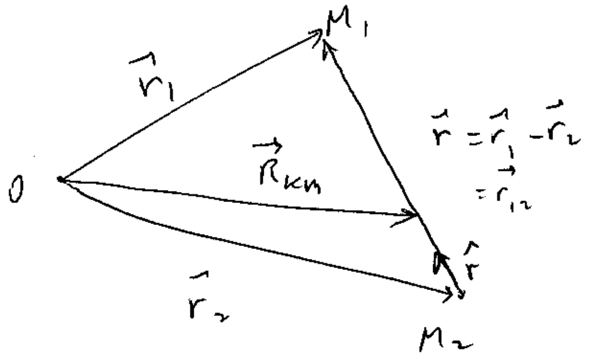
\# 1 parsek: 1 AB 'nin bir saniyelik yaydaki açıyı gördüğü uzaklık.

$$1 \text{ parsek} = 3.084 \times 10^{18} \text{ cm}$$

Güneşten en yakın yıldıza olan uzaklık 1.31 parsek.

BS K

İki cisim problemi : İndirgenmiş Kütle.



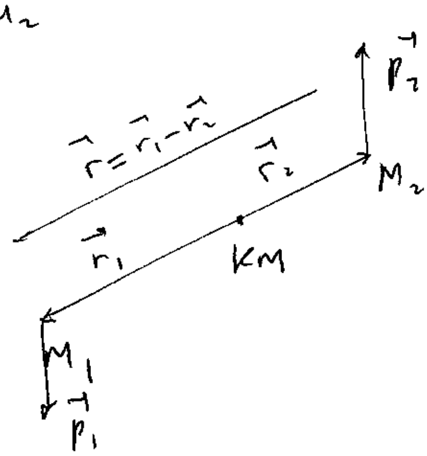
$$\vec{R}_{KM} = \frac{M_1\vec{r}_1 + M_2\vec{r}_2}{M_1+M_2}$$

M_1, M_2'ye etkiyen kuvvetler KM'ne doğru

$$M_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = F(r_{12})\hat{r} \qquad M_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -F(r_{12})\hat{r}$$

$$\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \frac{d^2(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{dt^2} = \underbrace{\left(\frac{1}{M_1}+\frac{1}{M_2}\right)}_{\frac{1}{\mu}} F(r_{12})\hat{r}$$

$$\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G\frac{M_1M_2}{r^2}\hat{r} \qquad \mu = \frac{M_1M_2}{M_1+M_2}$$



$M_1\vec{r}_1 + M_2\vec{r}_2 = \vec{0}$ (KM'nin durgun ve başlangıç noktasında olduğu bir eylemsizlik sisteminde)

$M_1\vec{r}_1 = -M_2\vec{r}_2 \Rightarrow M_1\dot{\vec{r}}_1 = -M_2\dot{\vec{r}}_2$

$$\vec{J} = \vec{r}_1 \times M_1\dot{\vec{r}}_1 + \vec{r}_2 \times M_2\dot{\vec{r}}_2 = (\vec{r}_1-\vec{r}_2)\times M_1\dot{\vec{r}}_1$$

$$= (\vec{r}_1-\vec{r}_2)\times\frac{M_1M_2}{M_1+M_2}(\dot{\vec{r}}_1-\dot{\vec{r}}_2) = \vec{r}\times\mu\dot{\vec{r}}$$

$$M_1\dot{\vec{r}}_1 = \frac{M_1(M_1+M_2)}{M_1+M_2}\dot{\vec{r}}_1 = \frac{M_1}{M_1+M_2}\left(-M_2\dot{\vec{r}}_2 + M_2\dot{\vec{r}}_1\right) = \frac{M_1M_2}{M_1+M_2}(\dot{\vec{r}}_1-\dot{\vec{r}}_2)$$

kullanıldı.

(18)

$$E = \frac{1}{2} M_1 \dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1 + \frac{1}{2} M_2 \dot{\vec{r}}_2 \cdot \dot{\vec{r}}_2 - G \frac{M_1 M_2}{r}$$

$$= \frac{1}{2}\left(M_1 + M_2 \frac{M_1^2}{M_2^2} \right) \dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1 - G \frac{M_1 M_2}{r}$$

$$= \frac{1}{2} M_1 \left(\frac{M_1 + M_2}{M_2} \right) \left[\frac{M_2^2 (\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2) \cdot (\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2)}{(M_1 + M_2)^2} \right] - \frac{G M_1 M_2}{r}$$

$$= \frac{1}{2} \mu (\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2) \cdot (\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2) - \frac{G M_1 M_2}{r}$$

$$= \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^{\,2} - G \frac{M_1 M_2}{r}$$ μ hem M_1'den hemde M_2'den küçük olmalı.

$$M_1 = M_2 = M \Rightarrow \mu = \left(\frac{2}{M} \right)^{-1} = \frac{M}{2}$$

$M_1 \ll M_2$

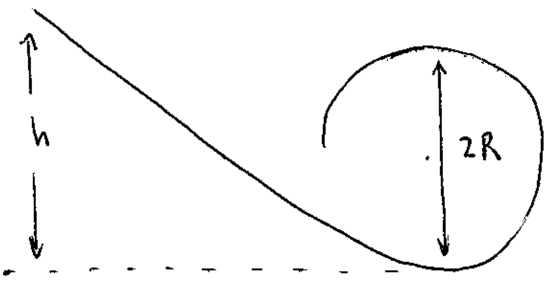
$$\Rightarrow \mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} = M_1 \frac{1}{1 + (M_1/M_2)} \approx M_1 \left(1 - \frac{M_1}{M_2} \right)$$

$$\mu = m \left(1 - \frac{1}{1836} \right)$$

BS K

BS K

5.13.) Çember Problemi: sürtünmesiz bir raydan aşağıya kayan m kütleli bir cisim, tabanda R yarıçaplı düşey bir çembere girerek yükselir. Çekim kuvveti etkisiyle düşmeksizin çemberin tamamını geçmesi için, durgun halden bırakılması gereken yüksekliği bulunuz.



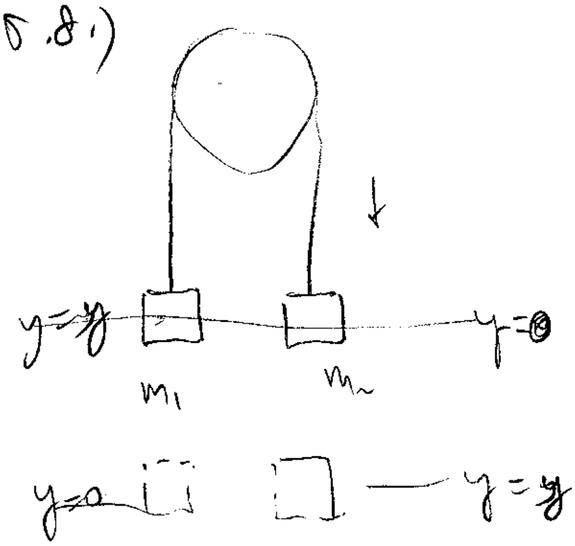
$$\frac{mv^2}{R} = mg \quad \text{(en tepede)}$$

$$v^2 = gR$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mg(2R)$$

$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}gR + 2\cancel{m}gR \qquad h = \frac{5}{2}R$$

5.8.)



BS K

5.4.) Dairesel yörüngede uydu: (a) Yer merkezinden r uzaklıkta yer etrafında dairesel yörüngede dolanan uyduya etkiyen merkezkaç kuvvet nedir? Uydunun yer merkezine göre hızı V, kütlesi M'dir. (b) (a)'daki merkezkaç kuvveti çekim kuvvetine eşitleyiniz. (c) V'yi r, G ve My cinsinden ifade ediniz. (d) r=∞ da U=0 varsayarak, kinetik enerjinin pot. enerjiye oranı nedir?

(a) Merkezkaç Kuvvet := mv^2/r

(b) $m\dfrac{v^2}{r} = G\dfrac{mM_y}{r^2}$ (merkezkaç sanki kuvvettir)

(c) $V = \sqrt{GM_y/r}$

(d) $\dfrac{1}{2}Mv^2 = \dfrac{1}{2}G\dfrac{MM_y}{r}$ = kin. Enerji

$G\dfrac{MM_y}{r}$ = pot. "

$\dfrac{KE}{PE} = \dfrac{1}{2}$

5.6.) Harmonik olmayan yay: Özel bir yay $F = -Dx^3$ kuvvet yasasına uymaktadır. (a) $x=0$'da $U=0$ alınırsa x noktasında pot. enerji nedir? (b) Yayı 0'dan x'e germekle ne kadar iş yapılır?

$\vec{F}_{et} = -\vec{F} \Rightarrow F_{et} = Dx^3 \Rightarrow W = \int^x Dx^3\,dx = \frac{1}{4}Dx^4$

a) $U = \frac{1}{4}Dx^4$

b) $W = \frac{1}{4}Dx^4$

BS K

5.1. Potansiyel Enerji ve Kinetik Enerji: (a) Kütlesi 1kg olan cismin yerden 1km yüksekte iken potansiyel enerjisi nedir? Cevabınızı erg ve Joule cinsinden bulunuz ve pot. enerjiyi yerin yüzeyine göre yazınız. (b) Bu cismin yere vardığı andaki kinetik enerjisi ne kadardır? Sürtünmeyi ihmal ediniz. (c) Aynı kütlenin yarı yolda iken kinetik enerjisi ne kadardır? (d) yarıyola düştüğü andaki pot. enerjisi ne kadardır?

(a) $PE = Mgh = 10^3 \times 980 \times (1.10^5) = 9.8 \times 10^{10}$ erg $= 9.8 \times 10^3$ Joule

(b) $\frac{1}{2}\cancel{M}v^2 = \cancel{M}gh = 9.8 \times 10^{10}$ erg

(c) $\frac{1}{2}Mv'^2 + Mg\frac{h}{2} = Mgh$; $\frac{1}{2}Mv'^2 = Mg\frac{h}{2} = 4.9 \times 10^{10}$ erg.

(d) $P.E = Mg\frac{h}{2} = 4.9 \times 10^{10}$ erg.

5.2.) Yerden yukarıdan potansiyel enerji: (a) 1kg'lık bir kütlenin, sonsuz uzaklıktaki potansiyel enerjiyi sıfır alarak, yer yüzündeki $U(R_y)$ potansiyel enerjisini bulunuz. (b) Yerin merkezinden 10^5 km uzakta bulunan 1kg'lık bir cismin potansiyel enerjisi, sonsuz uzaklıktaki pot. enerjisi sıfır olduğuna göre, ne kadardır? (c) Kütleyi yeryüzünden, yer merkezinden 10^5 km uzağa götürmek için yapılacak iş ne kadardır?

(a) $U(R_y) = -G\frac{mM_y}{R_y} = -\frac{6.67 \times 10^{-8} \times 1000 \times 5,98 \times 10^{27}}{6.4 \times 10^8} = -6.25 \times 10^{14}$ erg

(b) $U(r) = -G\frac{mM_y}{r} = -3.98 \times 10^{13}$ erg.

(c) $W = U(r) - U(R_y) = 5.85 \times 10^{14}$ erg

BS K

BÖLÜM-9

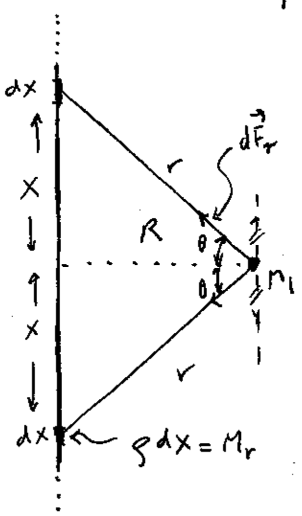
TERS KARE KUVVET YASASI

(1)

9.1.) [redacted]: Sonsuz uzunlukta, birim uzunluğunun kütlesi ρ olan maddesel bir çizginin R uzaklıktaki M_1 kütlesi üzerindeki çekim kuvvetinin $2G\rho M_1/R$ olduğunu gösteriniz. (Bir çizgi öğesinden ileri gelen kuvvetin yönünü belirtir iken dikkatli olunuz.)

Çözüm:

ρ: çizgisel kütle yoğunluğu $= \dfrac{\text{Kütle}}{\text{cm}}$; $d\vec{F}_r = G\dfrac{M_1 M_r}{r^2}\hat{r}$



$d\vec{F}_r = G\dfrac{M_1\rho dx}{r^2}\hat{r}$: Her bir dx kütlesinin çekim kuvveti

$dF = dF_r\cos\theta = G\dfrac{M_1\rho dx}{r^2}\cos\theta$, $\tan\theta = \dfrac{x}{R} \Rightarrow x = R\tan\theta = R\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$dx = \dfrac{R}{\cos^2\theta}d\theta$

$\cos\theta = \dfrac{R}{r} \Rightarrow r = \dfrac{R}{\cos\theta}$

$$\Rightarrow dF = \frac{GM_1\rho\cos\theta}{\cancel{R^2}/\cancel{\cos^2\theta}}\cdot\frac{\cancel{R}}{\cancel{\cos^2\theta}}d\theta = \frac{GM_1\rho}{R}\cos\theta\, d\theta$$

$$F = \frac{GM_1\rho}{R}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos\theta\, d\theta = \frac{GM_1\rho}{R}\sin\theta\Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{2GM_1\rho}{R}$$ ✓

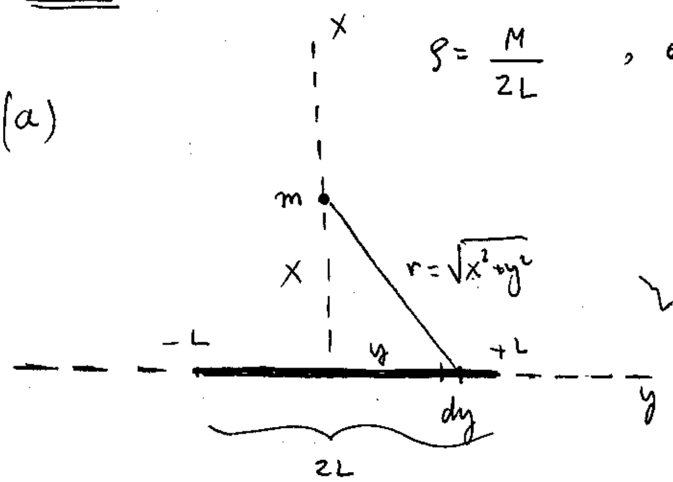
BS K

(2)

9.2.) ~~Sonlu çizginin çekimi:~~ Uzunluğu 2L olan bir doğru parçasının orta dikmesi üzerinde x noktasındasınız. Doğru parçasının kütlesi M'dir, ve koordinat sisteminin başlangıç noktası doğru üzerindedir. (a) Noktasal bir m kütlesinin $x=\infty$'da $U=0$ olan potansiyel enerjisi için bir ifade bulunuz. (b) doğrunun x'deki m noktasal kütlesine ettiği çekim kuvveti için bir ifade bulunuz. Kuvvet hangi yöndedir? (c) (a)'da bulduğunuz sonucun $x \gg L$ için $U \simeq -GMm/x$'e indirgendiğini gösteriniz. (2 metre uzunluğunda ve çizgisel yoğunluğu 2 g/cm olan ince bir tel alınız.)

Çözüm:

(a)



$$\rho = \frac{M}{2L}, \quad dU = -G\,\frac{m\overbrace{\left(\frac{M}{2L}\right)dy}^{\rho\,dy}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{y}{x} = \tan\theta \Rightarrow y = x\tan\theta \Rightarrow \boxed{dy = \frac{x}{\cos^2\theta}\,d\theta}$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = x\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \boxed{x\sqrt{1+\tan^2\theta} = \frac{x}{\cos\theta} = r}$$

$$U = -G\frac{mM}{2L}\int_{-L}^{+L}\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = -G\frac{mM}{2L}\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)\Big|_{-L}^{+L} = -G\frac{mM}{2L}\ln\left[\frac{\sqrt{x^2+L^2}+L}{\sqrt{x^2+L^2}-L}\right]$$

$$\ln\left[\frac{\sqrt{x^2+L^2}+L}{\sqrt{x^2+L^2}-L}\right] = \ln\left[\frac{\sqrt{x^2+L^2}+L}{\sqrt{x^2+L^2}-L}\cdot\frac{\sqrt{x^2+L^2}+L}{\sqrt{x^2+L^2}+L}\right] = \ln\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+L^2}+L\right)^2}{x^2+\cancel{L^2}-\cancel{L^2}}\right] = 2\ln\left[\frac{\sqrt{x^2+L^2}+L}{x}\right]$$

$$\Rightarrow U = -\frac{GmM}{2L}\,2\ln\left[\left(\sqrt{x^2+L^2}+L\right)/x\right]$$

(b)

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = G\frac{mM}{L}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+L^2}+L}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{x^2+L^2}+L}{x}\right)$$

$$\boxed{F_x = -G\frac{mM}{x\sqrt{L^2+x^2}}}$$ Çizginin merkezine doğru.

(c) $$V = -G\,\frac{mM}{L}\,\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+L^2}+L}{x}\right)$$

$$x \gg L \Rightarrow \sqrt{x^2+L^2}+L = x\sqrt{1+(L/x)^2}+L \simeq x+L$$

$$\Rightarrow V = -G\,\frac{mM}{L}\,\ln\left(\frac{x+L}{x}\right) = -G\,\frac{mM}{L}\,\ln\left(1+\frac{L}{x}\right)$$

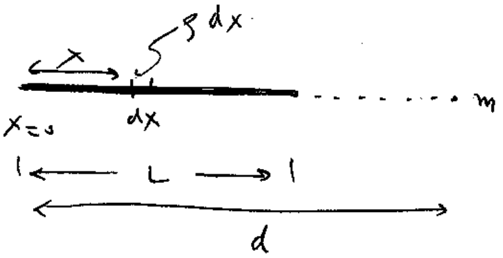
$$x \gg L \Rightarrow \ln\left(1+\frac{L}{x}\right) \simeq \frac{L}{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{V = -G\,\frac{mM}{x}}$$

(d) Telin ekseni üzerinde 3m uzaklıkta bulunan $m = 0.5\,g$'lık noktasal kitleye telin ettiği çekim kuvvetinin büyüklüğü (dyn) ne kadardır? (e) Noktasal kitlenin (d)'de verilen konumdaki potansiyel enerjisi (erg) ne kadardır?

$L = 2m$; $\rho = 2\,g/cm$

(d)



$$dF = -G\,\frac{m\rho\,dx}{(d-x)^2}$$

$d-x=u$

$dx = -du$

$$\Rightarrow F = -Gm\rho\int_0^L \frac{dx}{(d-x)^2} = -G\,\frac{m\rho L}{d(d-L)}$$

$$-\int_d^{d-L}\frac{du}{u^2}$$

$$\frac{1}{u}\Big|_d^{d-L} = \frac{1}{d-L} - \frac{1}{d} = \frac{\cancel{d}-\cancel{d}+L}{d(d-L)}$$

$$F = -(6.67\cdot10^{-8})\,\frac{(0.5)(2)(200)}{300\,(300-200)} = -1.67\times10^{-10}\ \text{dyn}$$

(e) $$dV = +G\,\frac{m\rho\,dx}{d-x} \Rightarrow V = +Gm\rho\int_0^L \frac{dx}{d-x} = +Gm\rho\ln\frac{d-L}{d}$$

$$= (6.67\cdot10^{-8})(0.5)(2)\ln(1/2)$$

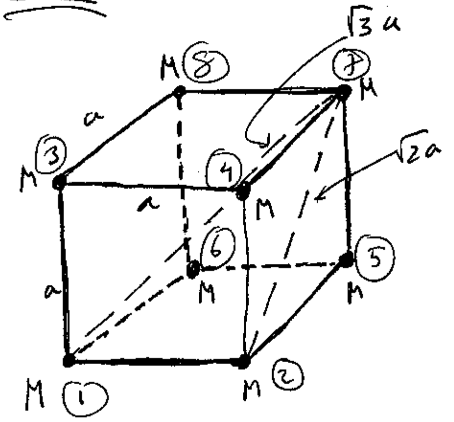
$$= -4.6\cdot10^{-8}\ \text{erg.}$$

BS K

④ ✓

9.3.) ~~[illegible]~~: Kenarının uzunluğu 1 parsek olan bir kübün köşelerinde bulunan ve herbirinin kütlesi güneş kütlesine eşit olan 8 yıldızlı bir sistemin karşılıklı çekim potansiyel enerjisini (erg) hesaplayınız. (Yıldızların öz enerjisini ihmal ediniz.)

Çözüm :



$a = 1$ parsek $= 3.084 \cdot 10^{18}$ cm

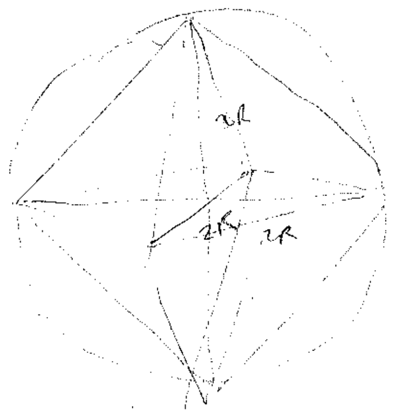
$$U_0 = U_{12} + U_{13} + U_{16} = -3\frac{GMM}{a} = -\frac{GM^2}{a}\left(3 + \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3}}\right)$$

$$+ U_{14} + U_{15} + U_{18} \quad -3\frac{GMM}{\sqrt{2}\,a}$$

$$+ U_{17} \quad -3\frac{GMM}{\sqrt{3}\,a}$$

$$= -4.94 \times 10^{41} \text{ erg.}$$

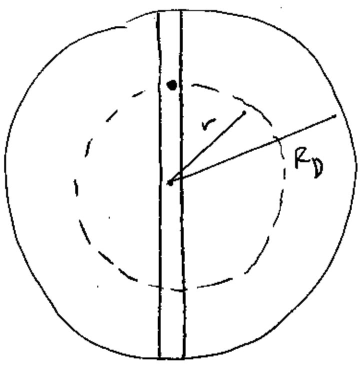
$$U_{Top} = \frac{1}{2} 8 U_0 = 4 U_0 = -1.98 \times 10^{42} \text{ erg.}$$



BS K

9.4.) [redacted]: Dünyanın merkezinden geçen bir delik düşünelim. Dünyanın dönmesi ve sürtünme ihmal edilir ise, bir parçacığın hareketinin basit harmonik olacağını gösteriniz. Bununla dünyanın yüzeyine yakın dolanan bir uydunun periyodu arasındaki bağıntıyı karşılaştırınız. (Not: Dünyanın dönmesi hareketin basit harmonik olmasını önlemez, fakat periyodu biraz değiştirir. Bunun doğru olduğunu gösterebilir misiniz? Periyod nasıl etkilenir?

Çözüm:



ρ : dünyanın yoğunluğu (sbt)

$$F(r) = -G\frac{mM_D}{r^2} = -G\frac{m\frac{4}{3}\pi r^3\rho}{r^2} = -Gm\frac{4}{3}\pi r\rho$$

$$F = ma = m\frac{d^2r}{dt^2} = -Gm\frac{4}{3}\pi r\rho \Rightarrow \ddot{r} + \overbrace{\left(G\frac{4}{3}\pi\rho\right)}^{w^2} r = 0$$

$$\Rightarrow r = R_d\cos\left(\sqrt{\tfrac{4}{3}\pi G\rho}\,t\right) \quad \left(\Leftarrow t=0 \text{ da } r=R_d \text{ ve } \dot{r}=0 \text{ ise}\right)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho}} \qquad \boxed{M_d = \frac{4}{3}\pi R_d^3\rho} \qquad g = G\frac{M_d}{R_d^2} = G\frac{\frac{4}{3}\pi R_d^{\cancel{3}}\rho}{\cancel{R_d^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{g = \frac{4}{3}\pi\rho G R_d}$$

$$\Rightarrow \frac{g}{R_d} = \frac{4}{3}\pi G\rho \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{g/R_d}} = 84.6 \text{ dak.}$$

Dünya yüzeyine yakın hareket eden bir uydu için: $m\frac{v^2}{R_d} = mw^2R_d = mg \Rightarrow w = \sqrt{g/R_d}$

Aynı.

Merkezcil Kuvveti Hesaba katarsak: $m\ddot{r} = -G\frac{mM_d}{R_d^3}r + m\omega_d^2 r \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{R_d} - w_d^2}}}$

$$m\ddot{r} = -Gm\left(\frac{4}{3}\pi\rho\right)r \text{ idi} \Rightarrow m\ddot{r} = -G\left(\frac{(4/3)\pi\rho R_D^3}{R_D^3}\right)r = -G\frac{M_d}{R_d^3}r \text{ olur.}$$

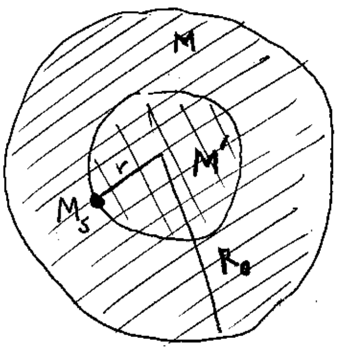
(6)

9.5.) ~~Bir Galaksideki Hareket~~ Toplam kütlesi **M** ve yarıçapı R_0 olan bir galakside yıldızların düzgün küresel dağıldığını varsayalım. Merkezden $r < R_0$ uzaklıktaki M_s kütleli bir yıldız, büyüklüğü **r** yarıçaplı kürenin içinde kalan kütleye bağlı bir merkezcil kuvvetin etkisi altında hareket eder (a) r'deki kuvvet ne kadardır? (b) Merkeze göre çembersel bir yörüngede hareket eder ise yıldızın çevresel hızı ne olur?

Çözüm :

(a)

Galaksinin Kütle Yoğunluğu : $\rho = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R_0^3}$



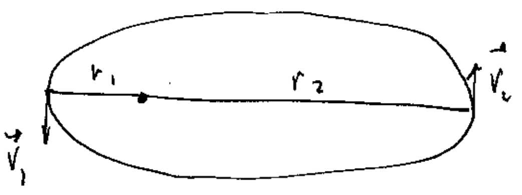
$$F(r) = -G\,\frac{M_s\left(\frac{4}{3}\pi\rho r^3\right)}{r^2} = -G\,\frac{M_s M}{R_0^3}\,r$$

(b) Çembersel Yörünge için : $M_s\dfrac{V^2}{r} = G\,\dfrac{M_s M}{R_0^3}\,r \Rightarrow V^2 = G\dfrac{M r^2}{R_0^3} \Rightarrow \boxed{V = \sqrt{\dfrac{GMr^2}{R_0^3}}}$

BS K

9.6. [illegible]: Bir meteorun yörüngesinin Güneş'e en yakın noktasında (perihelion) hızı 7.0×10^{6} cm/s ve Güneş'e uzaklığı 5.0×10^{12} cm'dir. Güneş'e en uzak noktada (aphelion) meteorun güneş'e uzaklığını, hızını ve yörüngesinin dış merkezliğini (denk. 9.21), (denk. 9.25 - 9.28)'i kullanarak bulunuz.

Çözüm :



Denk. 9.21 : $\cancel{m} V_1 r_1 = \cancel{m} V_2 r_2$ (Aç. Mom. Kon.) $\quad V_2 = V_1\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$

Denk. 9.25 : $E = \frac{1}{2}mV_1^2 - G\frac{mM_G}{r_1}$
$= \frac{1}{2}mV_2^2 - G\frac{mM_G}{r_2}$

$$-\frac{2E}{m} = \mathcal{E} = \frac{2GM_G}{r_1} - V_1^2 = \frac{2GM_G}{r_2} - V_2^2 \quad ; \ V_1, r_1 \text{ biliniyor.}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = \frac{2GM_G}{r_1}\left(\frac{r_1}{r_2}\right) - V_1^2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{V_1^2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - 2G\frac{M_G}{r_1}\left(\frac{r_1}{r_2}\right) + \mathcal{E} = 0}$$

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = \frac{2\frac{GM_G}{r_1} \pm \sqrt{\frac{4G^2M_G^2}{r_1^2} - 4V_1^2\mathcal{E}}}{2V_1^2}$$

$$\sqrt{\frac{4G^2M_G^2}{r_1^2} - 4V_1^2\left(\frac{2GM_G}{r_1} - V_1^2\right)} = 2\sqrt{\left(\frac{GM_G}{r_1} - V_1^2\right)^2} = 2\left(\frac{GM_G}{r_1} - V_1^2\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{r_1}{r_2}\right) = \frac{GM_G}{r_1V_1^2} \pm \left(\frac{GM_G}{r_1V_1^2} - 1\right) \Rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 & (-) \\ \left(\frac{r_1}{r_2}\right) = \frac{2GM_G}{r_1V_1^2} - 1 \ ; \ r_2 = \frac{r_1}{\frac{2GM_G}{r_1V_1^2} - 1} & (+) \end{cases}$$

Eğer $\frac{V_1^2}{r_1} > \frac{GM_G}{r_1^2}$ ya da $\frac{GM_G}{r_1V_1^2} < 1 \Rightarrow \boxed{r_2 > r_1}$

$\frac{V_1^2}{r_1} < \frac{GM_G}{r_1^2}$ ya da $\frac{GM_G}{r_1V_1^2} > 1 \Rightarrow \boxed{r_1 > r_2}$

$\longrightarrow$

BS K

8

Bizimkinde ; $\frac{2GM_G}{r_1 V_1^2} = \frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{33}}{(7 \cdot 10^6)^2 \cdot 5 \cdot 10^{12}} = 1.089 \Rightarrow \boxed{\frac{GM_G}{r_1 V_1^2} < 1 \text{ ilk durum } r_1 < r_2}$

$r_2 = \frac{r_1}{0{,}089} = \frac{5 \cdot 10^{12}}{0{,}089} = \boxed{5{,}6 \cdot 10^{13} = r_2} \Rightarrow V_2 = V_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right) = 7 \cdot 10^6 \cdot 0{,}089$

$\Rightarrow \boxed{V_2 = 6.23 \times 10^5 \text{ cm/s}}$

$\varepsilon = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} = 0.84 < 1$ Elips. ✓

$\frac{J}{m} = Vr = 7 \cdot 10^6 \times 5 \cdot 10^{12} = 35 \cdot 10^{18}$

Denk. 9.28 $\quad \frac{2E}{m} = -\frac{2 \times 6{,}67 \times 10^{-8} (2 \cdot 10^{33})}{5 \cdot 10^{12}} + (7 \cdot 10^6)^2 = -4.36 \times 10^{12}$ erg/s

$\varepsilon = \left(1 + \frac{2EJ^2}{C^2 m}\right)^{1/2}$

$C = -GM_G m$

$\varepsilon = \left(1 + \frac{2E}{m}\left(\frac{J}{m}\right)^2 \frac{1}{G^2 M_G^2}\right)^{1/2}$

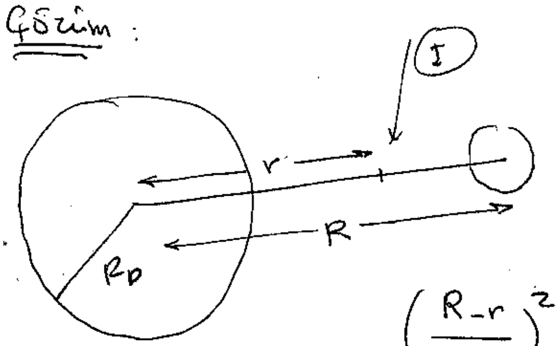
$= \left[1 - \frac{4.36 \cdot 10^{12} \times (35 \cdot 10^{18})^2}{(6.67 \times 10^{-8})^2 \times (2 \cdot 10^{33})^2}\right]^{1/2} = \sqrt{1 - 0.3}$

$= 0.836 \simeq 0.84$ ✓

BS K

9.8.) ~~Kurtulma~~ Hızı : Sürtünmeyi ihmal ederek, bir uydunun dünya ile ay arasında, çekim kuvvetinin sıfır olduğu bir noktaya ulaşması için uyduya yeryüzünde verilmesi gereken hızı bulunuz. Bu noktayı biraz geçerse aya ne hızla çarpar?

Çözüm :



Denge Noktası :

$$\frac{G M_D \cancel{m}}{r^2} = \frac{G M_A \cancel{m}}{(R-r)^2} \Rightarrow \frac{M_A}{M_D} = \left(\frac{R-r}{r}\right)^2$$

$$\left(\frac{R-r}{r}\right)^2 = \frac{7,34\cdot10^{25}}{5.98\cdot10^{27}} = 0.0123 \Rightarrow \frac{R-r}{r} = 0.111$$

$$\frac{R}{r} = 1.111 \Rightarrow r = \frac{R}{1.111} = \frac{3.84\cdot10^{10}}{1.11} = 3.46\cdot10^{10}\ \text{cm}$$ (Ay'a yakın)

E.K. : $\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - G\frac{M_D \cancel{m}}{R_D} - \frac{G M_A \cancel{m}}{R-R_D} = 0 - \frac{G M_D \cancel{m}}{r} - \frac{G M_A \cancel{m}}{R-r}$ I'e ulaşması için gerekli hız

$$\Rightarrow V^2 = 2GM_D\left(\frac{1}{R_D} - \frac{1}{r}\right) - 2GM_A\left(\frac{1}{R-r} - \frac{1}{R-R_D}\right) = 1.22\cdot10^{12} - 2.32\cdot10^{9} = 1.22\cdot10^{12}\ \text{cm}^2/\text{s}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{Kaç} = 1.11\times10^{6}\ \text{cm/s}}$$

E.K. : $0 - G\frac{M_D m}{r} - \frac{G M_A m}{R-r} = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{G M_D m}{R-\cancel{R_A}} - G\frac{M_A m}{R_A}$ $R_A \approx 1.74\cdot10^{8}$ cm.

$$\Rightarrow V'^2 = 2GM_D\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right) + 2GM_A\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R-r}\right)$$

$$= -0.228\cdot10^{10} + 5.37\cdot10^{10} = 5.14\times10^{10} \Rightarrow \boxed{V' = 2.27\cdot10^{5}\ \text{cm/s}}$$

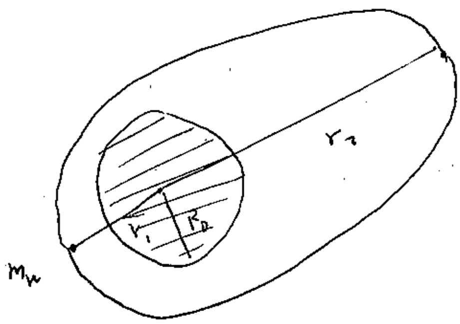
aya çarpma hızı

BS K

9.7.) ~~Dünya Uydusu~~: Ayın kütlesiz olduğunu ve bir uydunun yörüngesini etkilemediğini düşünün. Dünya yüzeyinden 320 km uzaklıkta bulunan uydunun eliptik yörüngesinin öteki ucunun ayda (dünya merkezinden 384.000 km) olabilmesi için, dünyanın merkezinden geçen yarıçap vektörüne dik hızı ne olmalıdır?

Çözüm:

$$\varepsilon = \frac{\overbrace{384 \cdot 10^3}^{r_2} - \overbrace{(6400+320)}^{r_1}}{\underbrace{384 \cdot 10^3}_{r_2} + \underbrace{(6400+320)}_{r_1}} = 0.966 < 1 \quad (\text{dar bir elips})$$



Aç. Mom. Kor: $V_1 r_1 = V_2 r_2$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{384 \cdot 10^3}{6.72 \cdot 10^3} = 57.1$$

En. Kor: $\frac{1}{2}\cancel{m} V_1^2 - G\frac{M_D \cancel{m}}{r_1} = \frac{1}{2}\cancel{m} V_2^2 - G\frac{M_D m}{r_2}$

$$\Rightarrow V_1^2 - V_2^2 = V_1^2\left[1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2\right] = V_1^2\left[1 - \underbrace{\left(\frac{1}{57.1}\right)^2}_{\approx 0}\right] = 2\frac{GM_D}{r_1} - \frac{2GM_D}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right) r_1}$$

$$\Rightarrow V_1^2 = \frac{2GM_D}{r_1} - \frac{2GM_D}{57.1 \cdot r_1} = 2GM_D\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{57.1 \cdot r_1}\right) \approx 2\frac{GM_D}{r_1}(0.98)$$

$$r_1 = 6720 \text{ km} = \frac{6720}{6400} R_D = 1.1 R_D$$

$$V_1^2 = \frac{2GM_D}{R_D}\left(\frac{0.98}{1.10}\right) = \frac{2GM_D}{R_D}(0.9), \quad g = \frac{GM_D}{R_D^2}$$

$$= 2gR_D(0.9) \Rightarrow V_1 \simeq 1.08 \times 10^6 \text{ cm/s}$$

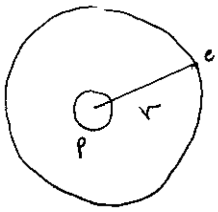
BS K

9.10.) ~~[illegible]~~: Hidrojendeki −13.6 eV'luk enerji düzeyinin, bir elektronun çembersel yörüngede olması sonucu olduğunu varsayalım. (a) Açısal momentumu hesaplayınız. (b) Aynı açısal momentum ile, He çekirdeği (yükü 2e) etrafında çembersel yörüngede dolanan bir elektronun yarıçapı ve enerjisi ne olur?

Çözüm:

$E = -13,6 \text{ eV} = -13,6 \times 1,6 \times 10^{-12}$ erg

$= -\dfrac{e^2}{2r}$



$\Rightarrow r = +\dfrac{e^2}{2E} = \dfrac{(4.8 \times 10^{-10})^2}{2 . 13,6 \times 1,6 \times 10^{-12}}$

$= 0,53 \times 10^{-8}$ cm $= 0.5$ Å

(a) $J = mvr \Rightarrow J^2 = m^2 v^2 r^2$

$\dfrac{mv^2}{r} = \dfrac{e^2}{r^2} \Rightarrow mv^2 = \dfrac{e^2}{r}$

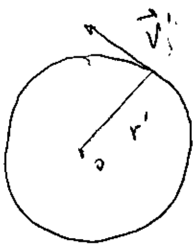
$\Rightarrow J^2 = m e^2 r \Rightarrow J = e\sqrt{mr}$

$= 4.8 . 10^{-10} \sqrt{9.1 \times 10^{-28} \times 5.3 . 10^{-9}}$

$= 1.05 \times 10^{-27}$ g cm²/s (erg-s)

$= \hbar$

(b)



dnm:

$J' = mv'r' \Rightarrow v' = \dfrac{J'}{mr'} \Rightarrow v'^2 = \dfrac{J'^2}{m^2 r'^2} \Rightarrow \dfrac{mv'^2}{r'} = \dfrac{mJ'^2}{m^2 r'^3}$

$E' = \dfrac{1}{2} mv'^2 - \dfrac{2e^2}{r'}$

$m\dfrac{v'^2}{r'} = \dfrac{2e^2}{r'^2}$

$\Rightarrow \dfrac{mJ'^2}{m^2 r'^3} = \dfrac{2e^2}{r'^2}$

$\Rightarrow r' = \dfrac{J'^2}{2me^2} = \dfrac{J^2}{2me^2}$

$r' = \dfrac{(1.05 . 10^{-27})^2}{2 . 9.1 \times 10^{-28} (4.8 . 10^{-10})^2} = 0.263 . 10^{-8}$ cm

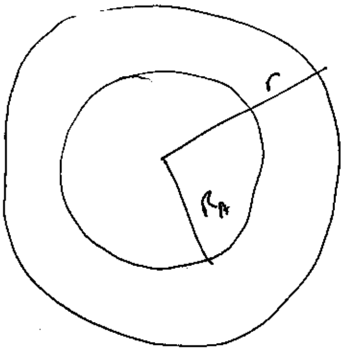
$= 0.263$ Å

$E = -\dfrac{1}{2}\dfrac{2e^2}{r'} = -\dfrac{e^2}{r'} = \dfrac{2e^2}{r_H} = 4 E_H = -54.4 \text{ eV} = -87.04 . 10^{-12}$ erg.

BS K

9.14.) ~~Ayın Etrafında Uydu~~: Kitabın kapağında verilen verileri kullanarak ayın etrafında dolanan bir uydunun periyodunu bulunuz.

Çözüm:



$r \approx R_A$ alalım. $m\frac{v^2}{r} = G\frac{\cancel{m}M_A}{r^2} = \cancel{m}\omega^2 r$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{GM_A/r^3} = \sqrt{GM_A/R_A^3}$$

$$= \sqrt{\frac{6.67\times10^{-8}\times 7,34\times10^{25}}{(1,74\cdot10^{8})^3}}$$

$$= 9.64\times10^{-4}\ \text{rad/s}$$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.652\cdot10^{4}\,s = 1.81$ saat $= 109$ dak.

(Dünyanın yüzeyine yakın hareket eden bir uydununkinden değil)

$$\frac{T_D}{T_A} = \frac{\sqrt{GM_D/R_D^3}}{\sqrt{GM_A/R_A^3}} = 0.776 \Rightarrow T_D = 0.78\,T_A$$

BS K