BÖLÜM — 11

ÖZEL GÖRELİLİK: LORENTZ DÖNÜŞÜMÜ

Işığın hızı, ışık kaynağı ve alıcının hareketinden bağımsızdır.

Uzay izotrop ve tekdüzedir. Fiziğin temel yasaları, düzgün göreli hareket halindeki iki gözlemci için aynıdır.

Nokta kaynaktan yayılan bir ışık dalgası düşünelim. Dalga cephesi (eşit fazların yüzeyi) kaynağın hareketsiz bulunduğu bir gözlem çerçevesinden bakılırsa bir küre olur. Fakat ilkemize göre kaynağa göre düzgün harekette bulunan başka bir gözlem çerçevesinden de bakılsa yine küre olacaktır. Işığın hızının kaynağın hareketinden bağımsız oluşu dalga cephesinin şeklinden kaynağın düzgün doğrusal harekette olup olmadığını bilmemizi gerektirir.

LORENTZ DÖNÜŞÜMÜ

Biri birine göre sabit V hızla hareket eden iki ayrı S ve S' çerçevesi kullanacağız.

S çerçevesinde bir ışık kaynağının başlangıç noktasında olduğunu varsayarsak, $t=0$'da yayılan küresel bir dalga cephesinin denklemi

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2$$

S''de

$$x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2$$

BS K

Bunlara uygun sonuçlar verip vermeyeceğini görmek için Galile dönüşümlerini bu denklemlerde yerleştiririz.

$$x' = x - Vt \quad , \; y' = y \; , \; z' = z \; , \; t' = t$$

$$x^2 - 2xVt + V^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

bu ilk denklemle uyuşmaz. Galile dönüşümü geçersiz. Başka bir dönüşüm bulmalıyız. Bulacağımız düşük hızlarda Galile dönüşümüne indirgenmeli...

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha x + \varepsilon t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \sigma x + \eta t \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &x' = 0 \text{ için } \frac{dx}{dt} = V \\ &x = 0 \text{ için } \frac{dx'}{dt'} = -V \end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz.

$$x' = 0 \Rightarrow x = -\frac{\varepsilon}{\alpha} t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = +V = -\frac{\varepsilon}{\alpha} \Rightarrow \boxed{V = \frac{-\varepsilon}{\alpha}}$$

$$x' = \alpha x + \varepsilon \frac{1}{\eta}(t' - \sigma x)$$

$$x = 0 \Rightarrow x' = \frac{\varepsilon}{\eta} t' \Rightarrow \frac{dx'}{dt'} = -V = \frac{\varepsilon}{\eta} \Rightarrow \boxed{V = \frac{-\varepsilon}{\eta}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\alpha = \eta}$$

BS K

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

$$(\alpha x + \xi t)^2 + y^2 + z^2 = c^2 (\sigma x + \alpha t)^2$$

$$\alpha^2 x^2 + 2\alpha \xi x t + \xi^2 t^2 + y^2 + z^2 = c^2 (\sigma^2 x^2 + \alpha^2 t^2 + 2\alpha\sigma x t)$$

$$\underbrace{(\alpha^2 - c^2\sigma^2)}_{=1} x^2 + y^2 + z^2 + \underbrace{(2\alpha\xi - 2c^2\alpha\sigma)}_{=0} x t = c^2 \underbrace{\left(\alpha^2 - \frac{\xi^2}{c^2}\right)}_{=1} t^2$$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha^2 - c^2\sigma^2 = 1 \\ &2\alpha\xi = 2c^2\sigma\alpha \\ &\alpha^2 c^2 - \xi^2 = c^2 \end{aligned}\right\}$$

$\xi = -V\alpha$ 'yı kullanır ξ'u yok ederiz.

$$\alpha^2 c^2 - V^2 \alpha^2 = c^2 \Rightarrow \alpha^2 (c^2 - V^2) = c^2$$

$$\alpha^2 \cancel{c^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = \cancel{c^2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}} = \eta$$

$$\Rightarrow \boxed{\xi = \frac{-V}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}}$$

$$\cancel{2}\cancel{\alpha}\xi = \cancel{2}c^2\sigma\cancel{\alpha} \Rightarrow \sigma = \xi/c^2 \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{-V/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}}$$

BS K

(4)

$$x' = \frac{x - Vt}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}} \qquad y' = y \qquad z' = z$$

$$t' = \frac{t - (V/c^2)x}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}}$$ Lorentz Dönüşümü.

$V/c \to 0$ limitinde Galile dönüşümüne indirgenir.

Bunlar: $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$ verir yani $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$.

$\beta \equiv \frac{V}{c}$ kullanacağız. yani $c = 1$ olan birim sisteminde ölçülen hız.

$$\gamma \equiv \frac{1}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \equiv \frac{1}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

$$\begin{cases} x' = \gamma\,(x - \beta c t) & y' = y, \quad z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c} x\right) \end{cases}$$

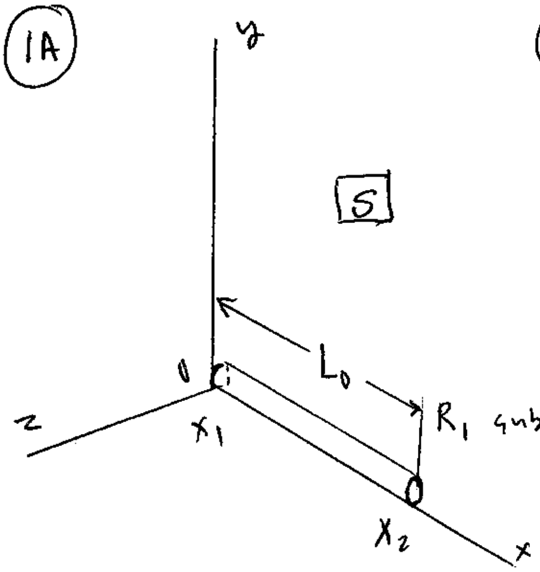
$$\begin{cases} x = \gamma\,(x' + \beta c t') & y = y', \quad z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c} x'\right) \end{cases}$$

Ters Dönüşüm.

Öğrenciye çıkar.

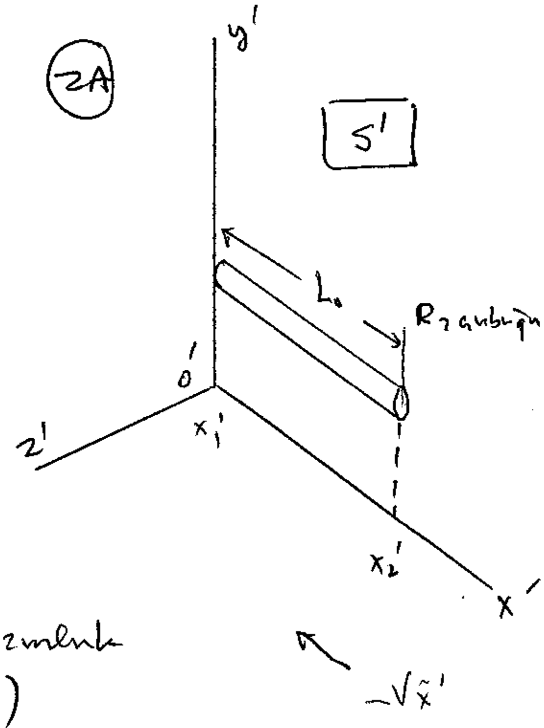
BS K

Uzunluk Büzülmesi :



(#) Çubuk [S]'de durgun olduğundan uçlarının yer koordinatları x_1 ve x_2'den bağımsızdır.

∴ $L_0 = x_2 - x_1$ has uzunluk

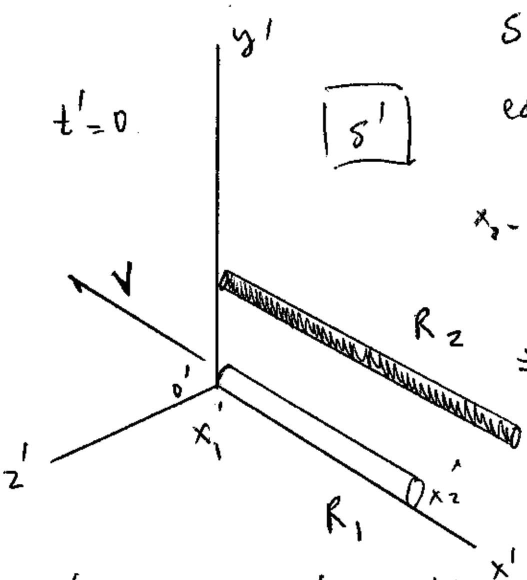


[S'] 'de durgun olan ve x' ekseni üzerinde duran bir çubuk için aynı nedenle

$$L_0 = x_2' - x_1' \quad : \quad S'\text{'deki durgun uzunluk}$$
(has uzunluk)

(#) Çubukların uzunluklarını hareketli bir gözlem çerçevesinden bakıldığında bulmak istiyoruz.

S'de durgun çubuğa göre $V\hat{x}$ hızı ile hareket eden gözlem çerçevesinden bakalım.



$$x_2 - x_1 = \gamma(x_2' - x_1') + \beta c\gamma(\cancel{t_2' - t_1'})$$

$$\Rightarrow L_0 = \gamma L'$$

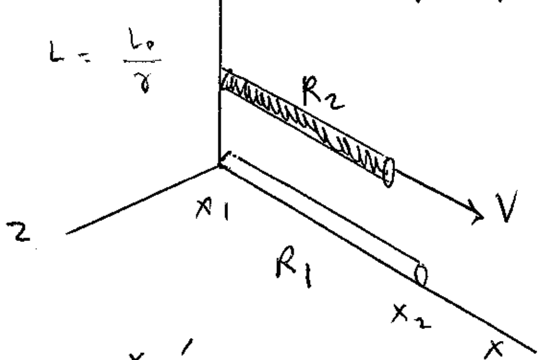
$$\downarrow \quad L' = \frac{L_0}{\gamma}$$

$$x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - x_1) - \beta c\gamma(\cancel{t_2 - t_1})$$

$$L_0 = \gamma L$$

$$L = \frac{L_0}{\gamma}$$

$$L = L_0\sqrt{1 - V^2/c^2}$$



(t' zamanı x_1' ve x_2' için aynı.)

$x_1 = x_1' = 0$

$$L' = L_0\sqrt{1 - V^2/c^2}$$

$x_1' = x_1 = 0$

⑥

LD
$$x_1 = \gamma(x_1' + V t_1')$$

$$x_2 = \gamma(x_2' + V t_2')$$

$$x_2 - x_1 = \gamma(x_2' - x_1') + \gamma V \underbrace{\cancel{(t_2' - t_1')}}_{0\ (t_1' = t_2')}$$

$$L_0 = \gamma(x_2' - x_1') = \gamma L$$

$$\boxed{L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 (1 - \beta^2)^{1/2}}$$

∴ Hareketli çerçevedeki ölçüm, durgun çerçevedeki ölçümden daha kısa bir uzunluk verir.

$$x_1' = \gamma(x_1 - V t_1)$$

$$x_2' = \gamma(x_2 - V t_2)$$

$$x_2' - x_1' = L_0 = \gamma(x_2 - x_1) - \gamma V \underbrace{\cancel{(t_2 - t_1)}}_{0\ (t_1 = t_2)}$$

$$L_0 = \gamma L$$

$$\boxed{L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 (1 - \beta^2)^{1/2}}$$

(Lorentz - Fitzgerald Büzülmesi)

(#) "Çubuğun uçlarının konumları eşzamanlı yapıldı."

#! Hareketli $\boxed{S'}$ çerçevesindeki gözlemciden, $\boxed{S}$ deki durgun çubuğun uzunluğunu L_0/γ sonucuyla ölçer iken x_2', x_1' eş zamanlı ölçüldü.

#! Uç noktalarını $\boxed{S'}$'de eşzamanlı kaydetme işlemi $\boxed{S}$'de x_1 ve x_2 uç noktalarında eşzamanlı olaylara dönüşmediğini bilmek önemlidir; tersine Lorentz denklemleri $\boxed{S'}$'de eş zamanlı kaydedilen uç noktalar için $\boxed{S}$'de

$$t_2 - t_1 = \frac{\beta}{c}(x_2 - x_1)$$

zaman aralığını gösterir.

$(t_1' = t_2' = 0)$

$$\left.\begin{aligned} t_2 &= \gamma\left(t_2' + \frac{\beta}{c}x_2'\right) \\ t_1 &= \gamma\left(t_1' + \frac{\beta}{c}x_1'\right)\end{aligned}\right\} \quad t_2 - t_1 = \gamma\,\cancelto{0}{(t_2' - t_1')} + \gamma\frac{\beta}{c}(x_2' - x_1')$$

$$= \gamma\frac{\beta}{c}(x_2' - x_1')$$

$$= \frac{\beta}{c}(x_2 - x_1)$$

#! y-ekseni üzerindeki bir çubuk için eşzamanlılık problem değil ama x-ekseni " " " " " önemli

<u>Örnek</u>:

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ x &= L_0 \end{aligned}\right\} \boxed{S}\text{'de}$$

konumlarındaki saatler $t=0$ anında y doğrultusunda birer ışık işareti yayarlar. Bu iki işaret $\boxed{S'}$'de x' doğrultusunda sıralanmış bir dizi sayaçtan ikisi tarafından alınır. Uyarılan iki sayaç arasındaki uzaklık nedir?

BS K

8

$$x_1' = \gamma\,(x_1 - \beta c t_1) = \gamma\,(0 - \beta c.0) = 0$$

$$x_2' = \gamma\,(x_2 - \beta c t_2) = \gamma\,(L_0 - \beta c.0) = \gamma L_0$$

$$\Rightarrow\; x_2' - x_1' = L_0 \gamma = \frac{L_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$: ikisi arasındaki uzaklık.

("Bu evvelki bulduğumuz sonuç ile uyuşmaz")

\# Önceki deney $\boxed{S'}$'de eşzamanlık gereğini kullanarak, $\boxed{S'}$'de uzunluğun doğal tanımına dayanıyordu. $\Delta t' = 0$ olduğunda $\Delta x'$'nün Δx ile karşılaştırılmasını içeriyordu.

\# İkinci deney $\Delta t = 0$ olduğunda $\Delta x'$'nün Δx ile karşılaştırılmasına dayanıyor.

<u>İkinci deneyin sonucu:</u> $\boxed{S}$'de eşzamanlı olan iki olayın genelde $\boxed{S'}$'de eşzamanlı olmadığıdır. LD'den $\boxed{S}$'de Δx uzaysal aralıkla <u>eşzamanlı</u> ($\Delta t = 0$) olan iki olayın $\boxed{S'}$'de hem uzay hem de zamanda ayrılmış olduklarını görünüz.

$$\boxed{\Delta x' = \gamma\,\Delta x}$$

$$t_2' - t_1' = \gamma\,(\cancel{t_2 - t_1}) - \gamma \frac{\beta}{c}\,(x_2 - x_1)$$

$$c\,\Delta t' = -\beta\gamma\,\Delta x \leftarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{c\,\Delta t' = -\beta\gamma\,\Delta x}$$

BS K

Göreli Hıza Dik Uzunluğun Ölçülmesi:

$$x' = \gamma(x - \beta c t)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

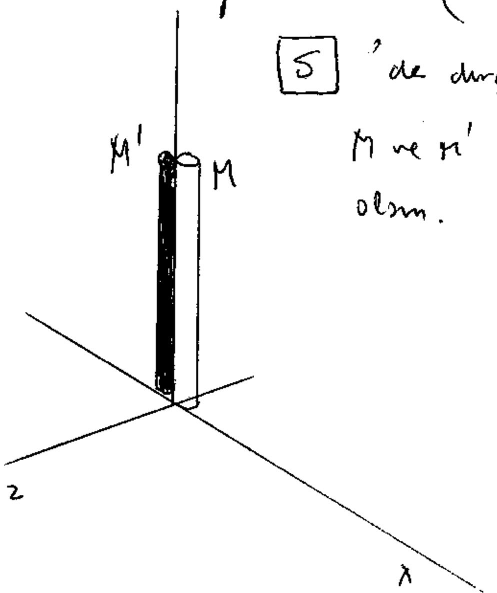
"Kendi uzunluğuna dik hareket eden bir çubuk metrenin uzunluk ölçüsünün hızı bağımsız olduğu anlamına gelir."

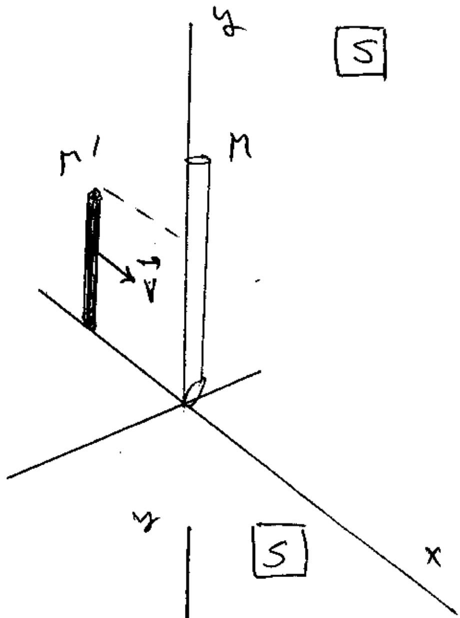
$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c} x\right)$$

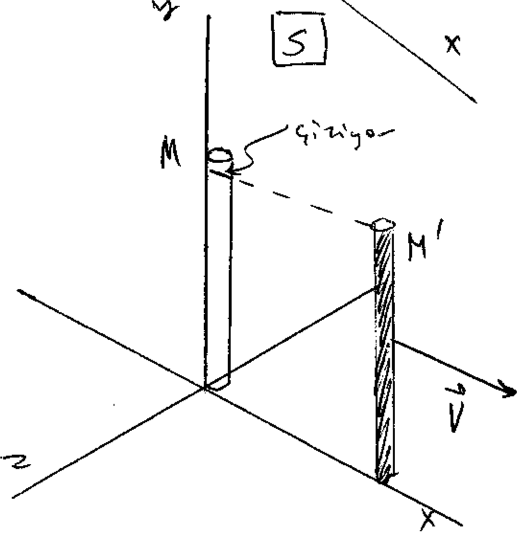
Bir çubuk metre alıp sabit hızla hareket ettirir ve durgun olanın yanından geçiririz.

(başlangıç noktalarını çakıştırırız.)

$\boxed{S}$ 'de durgun, özdeş M ve M' çubukları olsun.





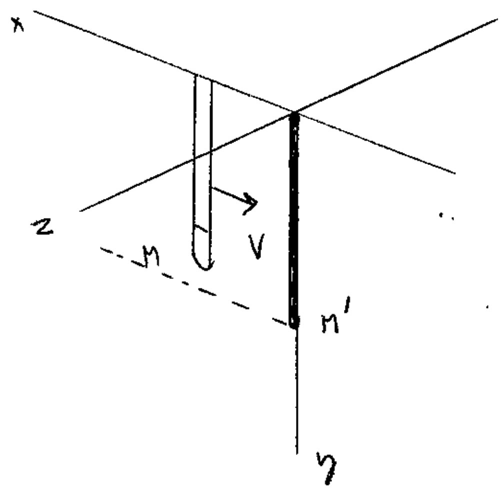


S: çubuk metrelerden birinin, S' diğerinin hareketsiz bulunduğu çerçeve. Hareketin görünen uzunluğu değiştirdiğini varsayalım. S ve S''de bulunan iki gözlemciye göre fizik yasaları aynı kalmak zorunda ise S'de bulunan gözlemciye göre kısa görünen çubuk S''de birine göre uzun görünmelidir.

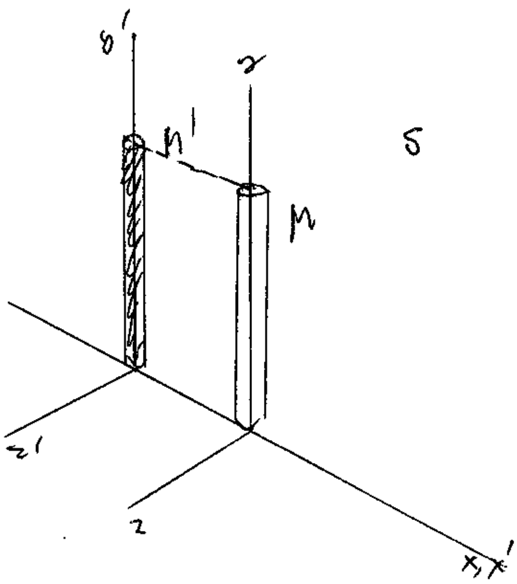
Fakat rollerin bu değişimi çubuk metrelerden birinin ötekinden kısa olduğunu gösteren fiziksel kayıtlarımızla uyuşmaz

BS K

(#) Bu nedenle uzunluklar S ve S′'den gözlendiklerinde eşit olmalıdırlar.



Çizik deneyin fiziksel sonucudur ve başka bir çerçevede, örneğin M′'nün durgun çerçevesinde ters olarak gözlenebilmelidir. Fakat bu durumda M, M′'den daha kısa görünür. Çelişki !!!!
(Çünkü M hareketli M′'de durgundur.)



Bu çelişki ancak M′ ve M'nin biri hareketli de olsa aynı uzunlukta olmalarıyla giderilir.

$y' = y$

benzer şekilde $z' = z$.

Sonuç: 1) Harekete dik olan bileşenlerde değişim yok.

2) x eksenine göre yapılan açı ölçümlerinin iki çerçevede farklı olduğu görülür (prb 5) Burada önemli olan nokta uzunluğun uçlarının hangi çerçevede eşzamanlı olduğunu bulmaktır.

BS K

Hareketli Saatlerde Zaman Genleşmesi : (zaman aralığının uzaması)

(S) gözlem çerçevesinde durgun bir saat alalım. Saatin durgun kaldığı çerçevedeki bir zaman aralığının ölçümünün sonucu,

$$\tau = t_2 - t_1$$

ile gösterilir ve has zaman olarak adlandırılır.

(LD) : $t_2' = \gamma \left(t_2 - \frac{\beta}{c} x_2 \right) \qquad t_1' = \gamma \left(t_1 - \frac{\beta}{c} x_1 \right)$

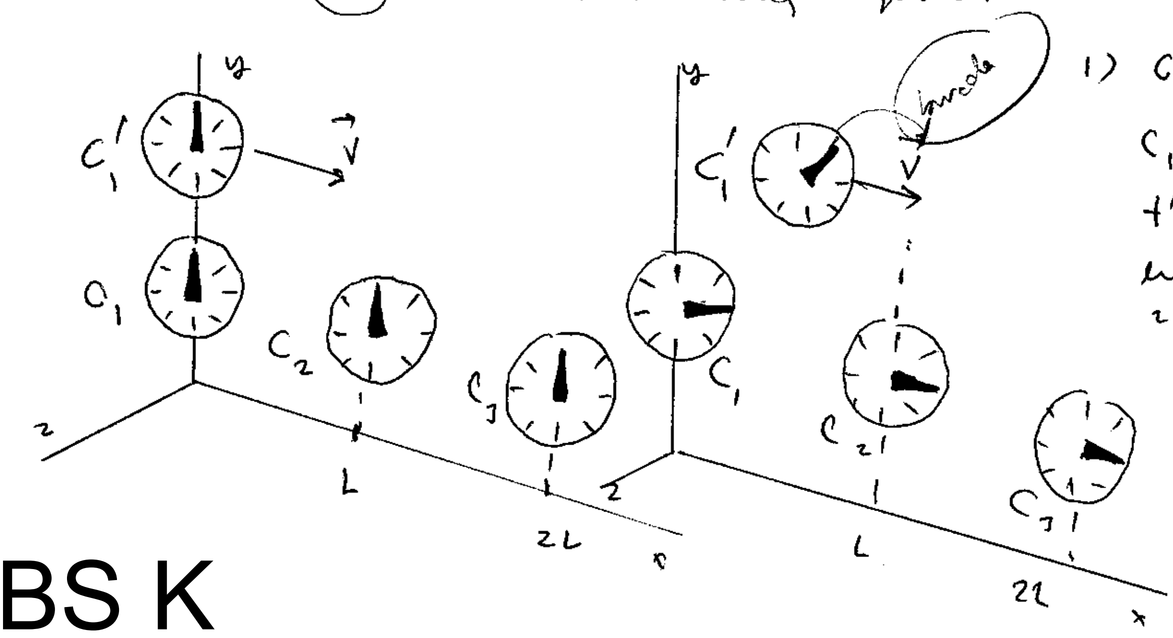
$$t_2' - t_1' = \gamma (t_2 - t_1) - \gamma \frac{\beta}{c} \cancel{(x_2 - x_1)}^{\,0}$$

Saat (S)'de aynı konumda.

$$= \gamma (t_2 - t_1) = \gamma \tau = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(#) Bu zaman aralığı, ilk saatin (S) çerçevesine göre $V\hat{x}$ hızla hareket eden (S') 'de durgun olan bir saatin ölçtüğü zaman aralığıdır. (S') 'de ölçülen zaman aralığı (S) 'dekinden daha uzundur.

(#) Fakat aşağıdaki deneyi yaparsak, (S') 'deki bir zaman aralığının (S) deki ölçümünün (S') 'den daha uzun olduğunu görürüz.



1) C_1, C_2, C_3 (S)'de durgun
C_1' 'nin V hızı var.
$t' = 0$ olduğunda $t = 0$ varsayalım

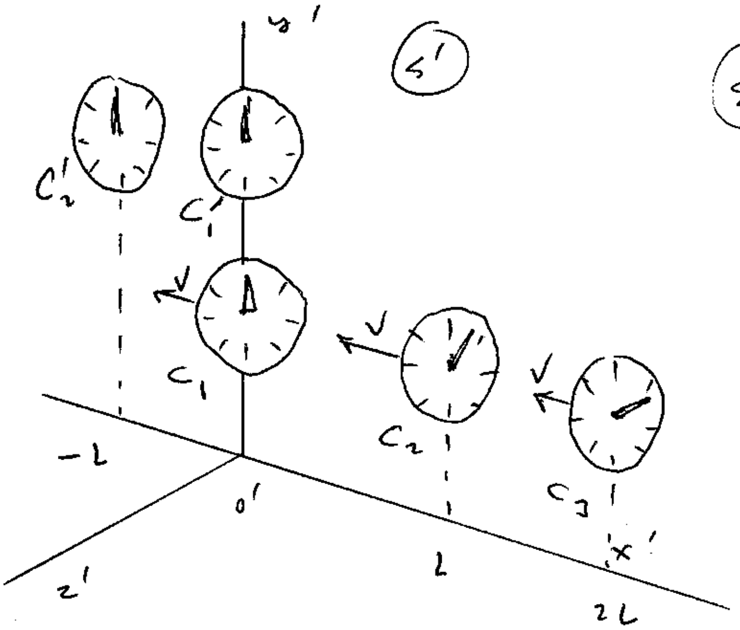
2) $t' = \gamma \left(t - x \frac{V}{c^2} \right)$

$= t \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$

$x = Vt$
$= L$

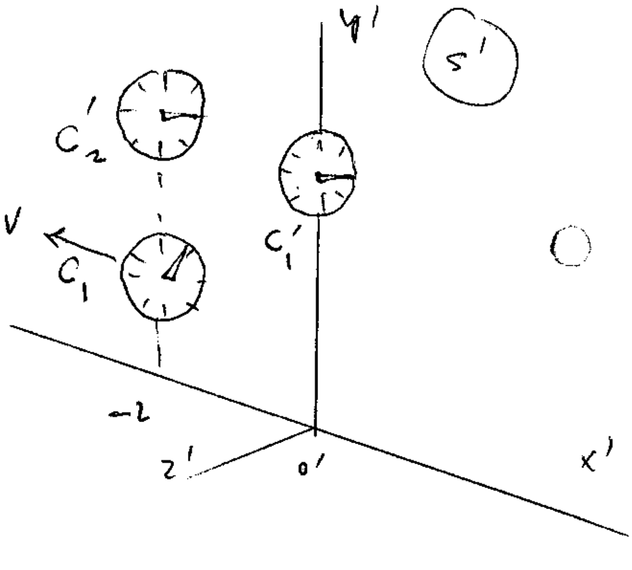
BS K

<u>Sonuç</u>: Sabit göreli hareket halindeki (S) ve (S') gözlem çerçevelerini alalım. Her çerçevede bir gözlemci ve o çerçevede durgun kalan zamandaş kılınmış saatler vardır. (S) de sabit bir konumdaki olay buradaki gözlemci tarafından t zaman aralığında ölçülürse (S') 'deki gözlemcinin ölçtüğü zaman aralığı daha uzun olur; $\Delta t' = \gamma \Delta t$. Tersine (S') 'deki sabit bir konumda $\Delta t'$ zaman aralığındaki iki olay için (S) 'deki gözlemci daha uzun bir zaman aralığı ölçer; $\Delta t = \gamma \Delta t'$



(S') deki C_1', C_2' vb saatler durgun, L aralıklarla dizilmiş ve zamandaştırlar. (S') 'deki gözlemciye göre C_1, C_2, C_3 saatleri <u>zamandaş değildir</u>? ve gösterirler.

(S') deki gözlemciye göre ise, geri kalan saat <u>hareketli</u> C_1 saatidir. Bu anda C_2, C_3 nerededir ve saat kaçı gösterirler.

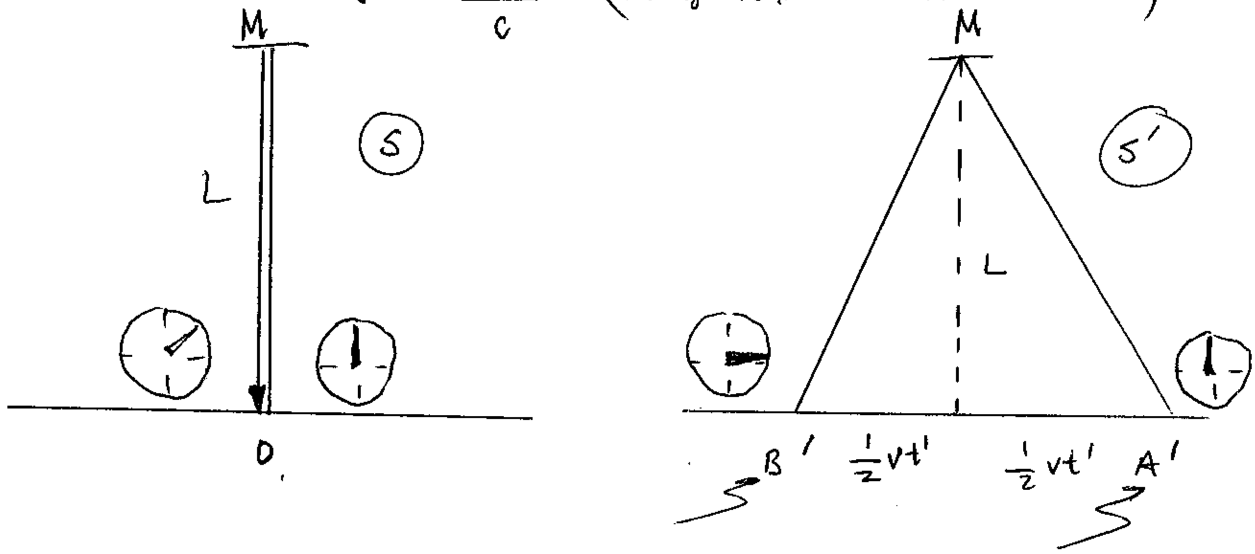


Bu olaya <u>zaman genleşmesi</u> denir. Hareketli saatler, duran saatlere göre daha yavaş ilerliyormuş gibi görünür. Bu çelişkinin kaynağı c ışık hızının değişmezliğidir. Bunu basit bir <u>problemle</u> gösterelim ⟶

BS K

(S) gözlem çerçevesinde standart bir saat yapalım. Bu saat durgun bir kaynaktan çıkan ışık atmasının L uzaklıktaki durgun bir aynaya gidip, tekrar kaynağa gelmesi için geçen τ zamanını ölçmek için kullanılabilir. Işık yolu y-ekseni boyuncadır. Böylece,

$$\tau = \frac{2L}{c}$$ (bir gösterge üzerinde olmaktadır)



A′, O ile ışığın yayılma anında çakışır. (S′)'de ışık A′ → M → B′ yolunu izler.

(S′)'nde bulunan bir gözlemci (x doğrultusunda (S)'ye göre düzgün hareket eder) (S)'de yapılmakta olan deneyin zamanını ölçer. Bunu (S′)'de hareketsiz olan bir dizi zamandaş saat ile yapar.

(#) Atmanın (S′)'de aldığı yol : $2\left[L^2+\left(\frac{1}{2}vt'\right)^2\right]^{1/2}$

Işık daima c hızı ile ilerlediğine göre bu uzaklık ct' olmalı.

$$(ct')^2 = 4L^2 + (vt')^2$$

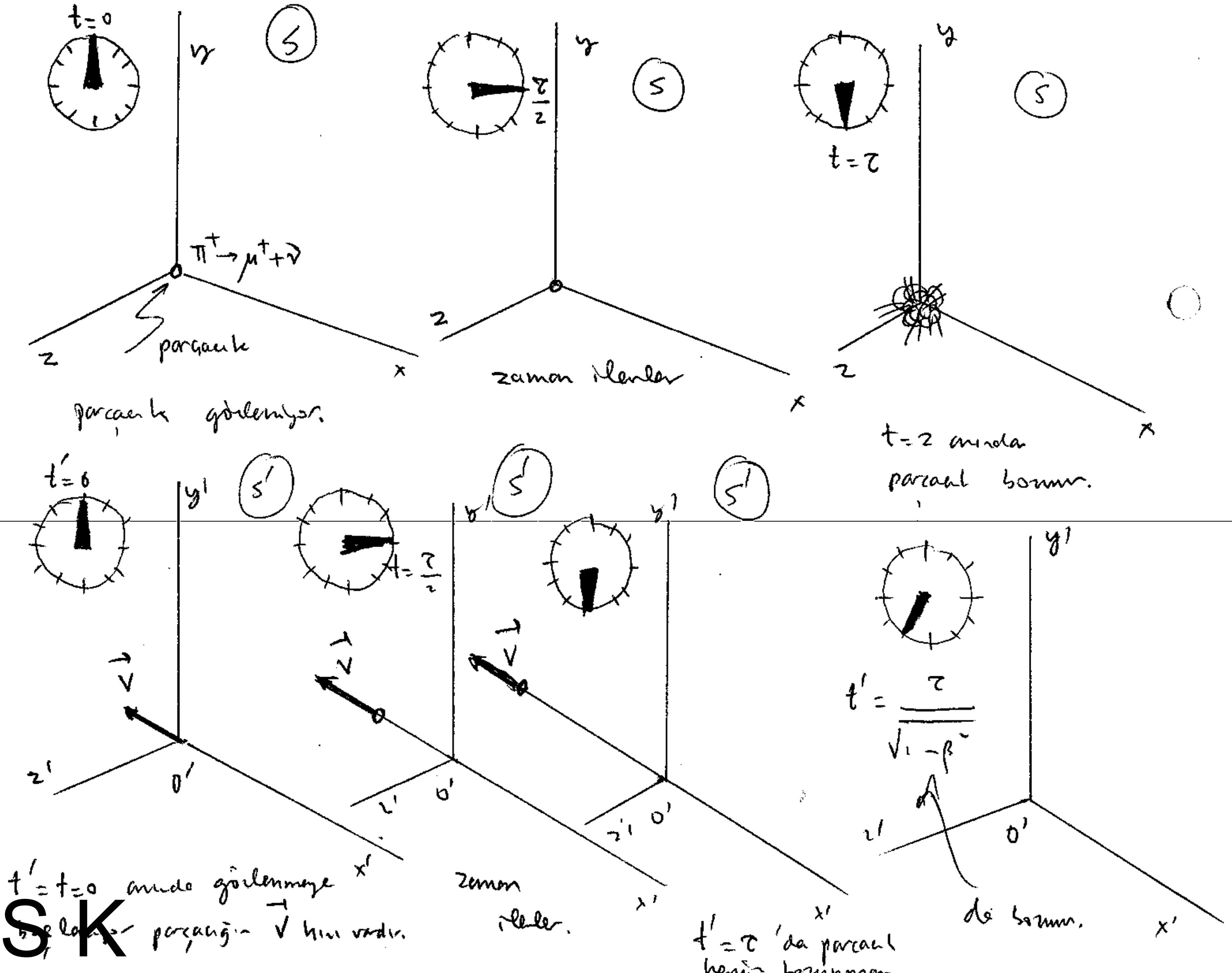
$$\Rightarrow t' = \frac{2L}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{2L}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\tau$$

(S)'deki saat (S′)'de zaman ölçenlere göre geri kalmış görünür.

Zaman genleşmesi olayı etki ölçme sürecinden ortaya çıkmaktadır. (S)'de durgun olan bir saat, yine (S)'deki durgun bir gözlemci tarafından okunduğunda τ has zamanını gösterir. τ has zamanı (S')'den gözlendiğinde daha uzun t' zamanı görülür. Her türlü saat aynı şekilde davranacaktır. Özellikle τ, (S)'deki durgun mezonların veya radyoaktif maddelerin (S)'de ölçülen bozunma yarı-ömürleri ise

$$t' = \frac{\tau}{(1-\beta^2)^{1/2}}$$

parçacıkların β hızla hareket ettikleri (S') çerçevesinde gözlenen bozunma yarı-ömrü'dür



ÖRNEK

π^+ Mezonların Hayat Süresi : $(\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \bar{\nu})$

Durgun olduğu çerçevede $\tau = 2.5\times10^{-8}$ s 'lik ortalama ömrü vardır.

$\beta \approx 0.9$ hızla π^+ mezon demeti meydana getirilir ise, Lab. gözlem çerçeve_sinde gözlenen ömrü ne olur? $m_{\pi^+} = 273\, m_e$ (+ yüklü parçacık), $m_{\mu^+} = 207\, m_e$, $m_\nu = 0$.

$\beta \approx 0.9 \Rightarrow \beta^2 \approx 0.81 \Rightarrow t' \approx \dfrac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} = 5.7\times10^{-8}$ s

Buna göre parçacık bozunmadan önce ~~ki~~ ortalama olarak göresiz haldeki hız çarpı has zamanın iki katı yol alacaktır.

(*) π^+ mezonlar (pozitif piyonlar)'ın hayat süreleri üzerine olan deneyler göreliliği destekler. Meydana getirilen π^+ mezon demetinin hızı

$$\beta = 1-(5\times10^{-5}) \text{ idi.}$$

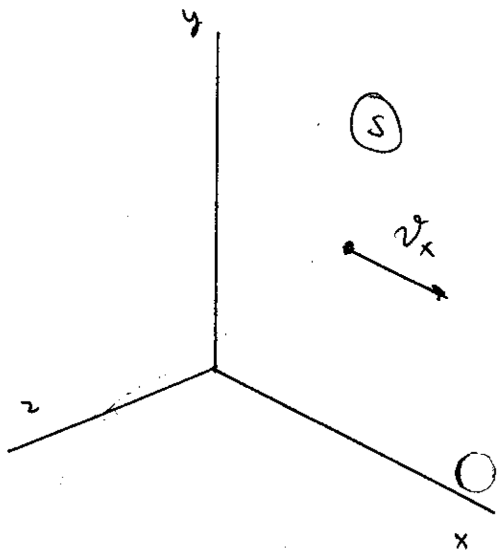
bunların demet içindeki ortalama ömürleri 2.5×10^{-6} s yani hareketsiz π^+ mezon_ların ortalama has ömürlerinin 100 katı idi.

(*) Hemen hemen c'ye eşit hızla hareket eden π^+ mezon demeti alalım. Göreli zaman genleşmesi olmasa bunlar, $(2.5\times10^{-8})(3.10^{10}) \approx 700$ cm'lik yol alırlardı. Berkeley Lawrence Işınım Lab.'ında hidrojen kabarcık odası Bevatrondaki piyon kaynağından 100 m ötededir. Piyonların bozunmadan önce aldıkları yol

$$(2.5\times10^{-6})(3.10^{10}) \approx 10^5 \text{ cm} \quad (100 \text{ katı})$$

BS K

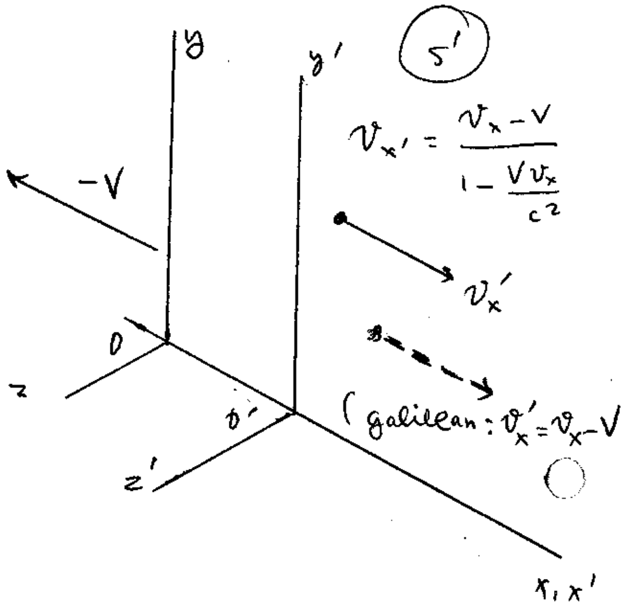
Hız Dönüşümü:



(S') gözlem çerçevesinin (S) çerçevesine göre $V\hat{x}$ düzgün hızla hareket ettiğini varsayalım. Bir parçacık (S) çerçevesine göre v_x, v_y, v_z düzgün hız bileşenleri ile hareket ediyor. Parçacığın (S')'ye göre v_x', v_y', v_z' hız bileşenleri ne olur.

$$x' = \gamma(x - \beta c t) \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right)$$

$$dx' = \gamma\, dx - \gamma\beta c\, dt \qquad dt' = \gamma\, dt - \frac{\gamma\beta}{c}dx$$



$$v_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma\, dx - \beta\gamma c\, dt}{\gamma\, dt - \gamma\beta\, dx/c}$$

$$= \frac{v_x - \beta c}{1 - v_x\beta/c}$$

$$v_x' = \frac{v_x - V}{1 - \dfrac{v_x V}{c^2}} = \frac{v_x - \beta c}{1 - \beta v_x/c}$$

$$v_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\, dt - \gamma\beta\, dx/c} = \frac{v_y}{\gamma(1 - \beta v_x/c)}$$

$$v_z' = \frac{dz'}{dt'} = \frac{v_z}{\gamma(1 - \beta v_x/c)}$$

$$v_x' = \frac{v_x - \beta c}{1 - v_x\beta/c} \; ; \; v_y' = \frac{v_y}{\gamma(1-\beta v_x/c)} \; ; \; v_z' = \frac{v_z}{\gamma(1-\beta v_x/c)}$$

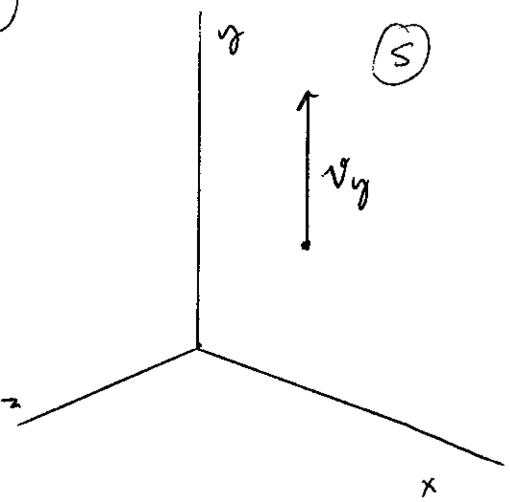
$$v_x = \frac{v_x' + \beta c}{1 + v_x\beta/c} \; ; \; v_y = \frac{v_y'}{\gamma(1+\beta v_x'/c)} \; ; \; v_z = \frac{v_z'}{\gamma(1+\beta v_x'/c)}$$

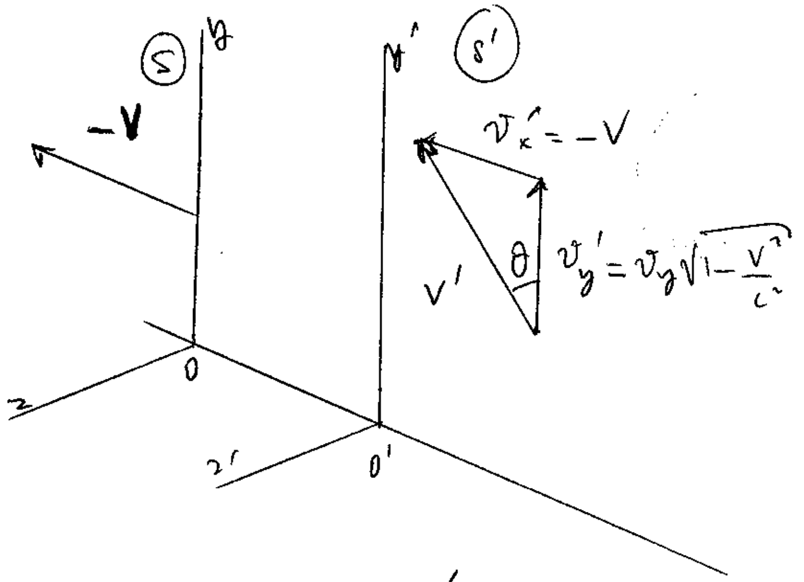
$V \ll c$ için Galile dönüşümüne indirgenir.

(A) parçacığın bir foton olduğunu ve (S)'de $v_x = c$ olduğunu varsayalım.

$$v_x' = \frac{c - V}{1 - cV/c^2} = \frac{c-V}{c-V}\,c = c$$

(A)

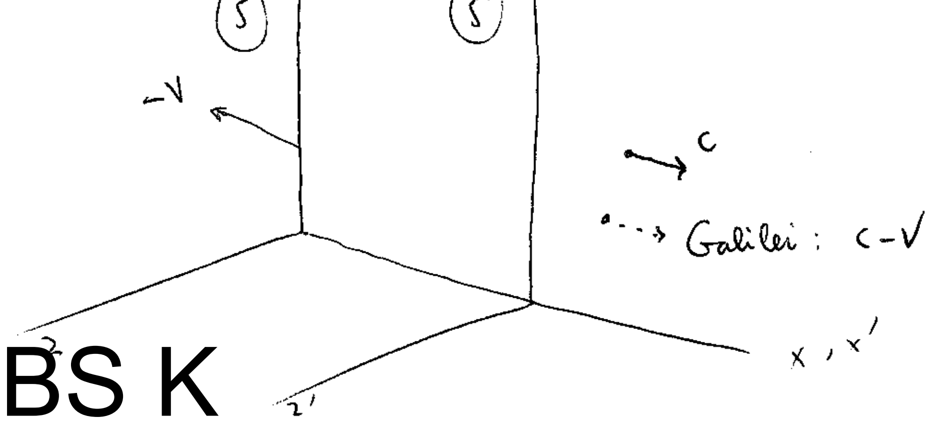




(S') 'deki hızı $\vec{v} = v_y\hat{y}$
$(v_x = 0)$

$$|\tan\theta| = \frac{V}{v_y\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

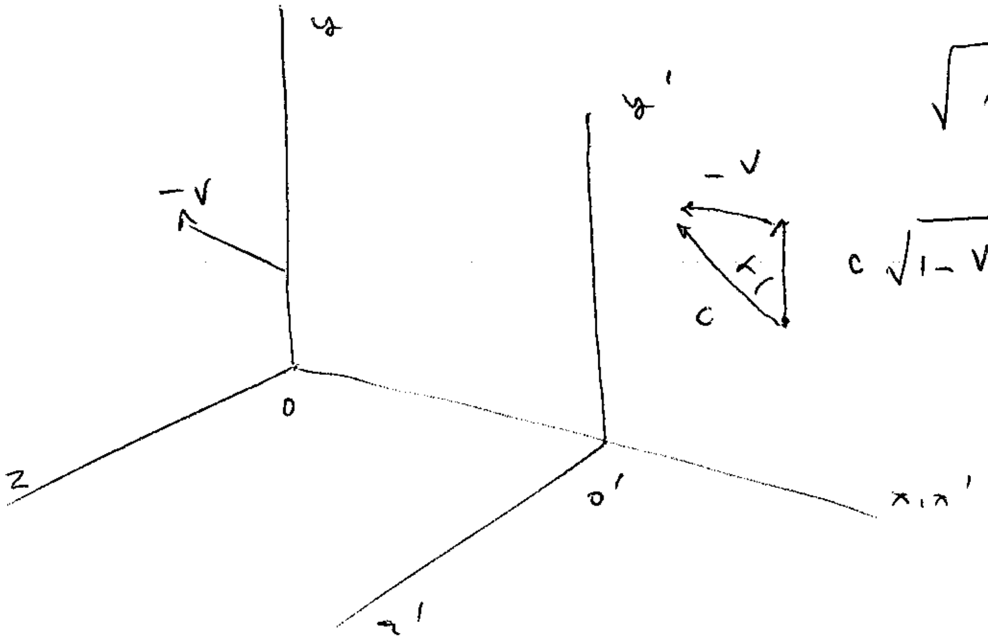
$\Longrightarrow$



BS K

$v_y = c$ ve $v_x = 0$ olsun.

$v_x' = -V$ $\quad v_y' = c\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ $\quad \Bigg\}\quad \frac{v_x'}{v_y'} = -\frac{V}{c\sqrt{1-V^2/c^2}} = \tan\alpha$



$\sqrt{v_{x'}^2 + v_{y'}^2} = c$

$c\sqrt{1-V^2/c^2}$ "ışığın aberasyonu"

ÖRNEK;

Hızların Toplanması: İki parçacığın (S') 'den bakıldığında birbirlerine göre $v_x' = \mp 0.9c$ hızla hareket ettiklerini varsayalım. Bir parçacığın diğerinden bakıldığında hızı nedir?

(S): $-0.9c$ hızla hareket eden parçacığın sbt kaldığı (hareketsiz)

(S'): hızı ((S)'ye göre) $+0.9c = V$

(S') 'de hızı $v_x' = +0.9c$ olan parçacığın (S) 'ye göre hızı.

$$v_x = \frac{v_x' + V}{1 + v_x V/c^2} \approx \frac{1.8c}{1+(0.9)^2} = \frac{1.80}{1.81}c = 0.994c < c$$

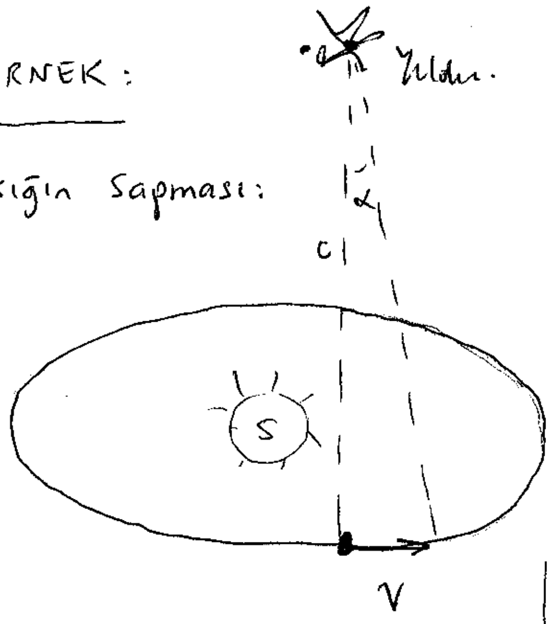
BS K

Bir foton (S′)'de $+c$ hızla, (S′)'de (S)'ye göre $+c$ hızla hareket etse (S′)'den bakılınca fotonun hızı $2c$ değil c olarak ölçülür.

fotonun hareketsiz kaldığı bir gözlem çerçevesi yok.

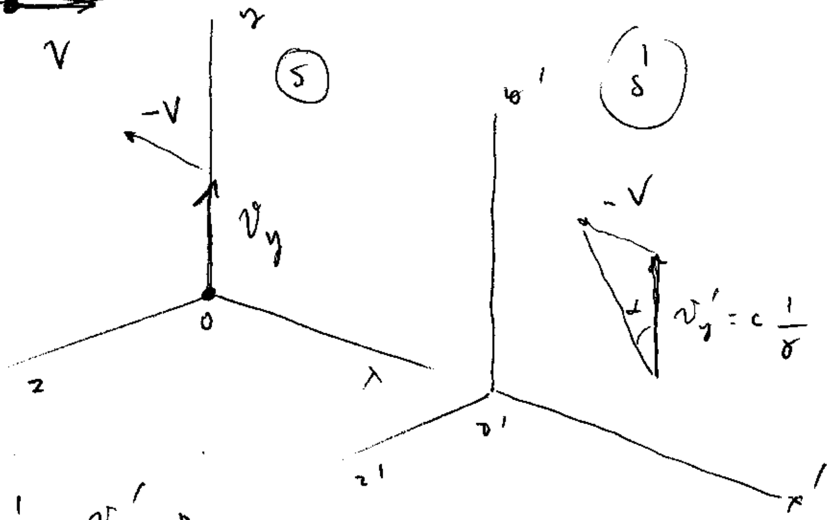
ÖRNEK:

Işığın Sapması:



$$\tan\alpha = \frac{v_y}{c} \quad \text{(göresiz)}$$

Göreli:



$$v_x' = -V \quad v_y' = c\,\frac{1}{\gamma} \quad v_z' = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{-v_x'}{v_y'} = \frac{\gamma V}{c} = \beta\gamma = \frac{V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{V}{c} = \beta$$

Doğru sonuç, bu ölçüm yukarıdaki sonuçla uyuşması yani V/c'sinin küçük olmasından.

BS K

Boyuna Doppler Olayı:

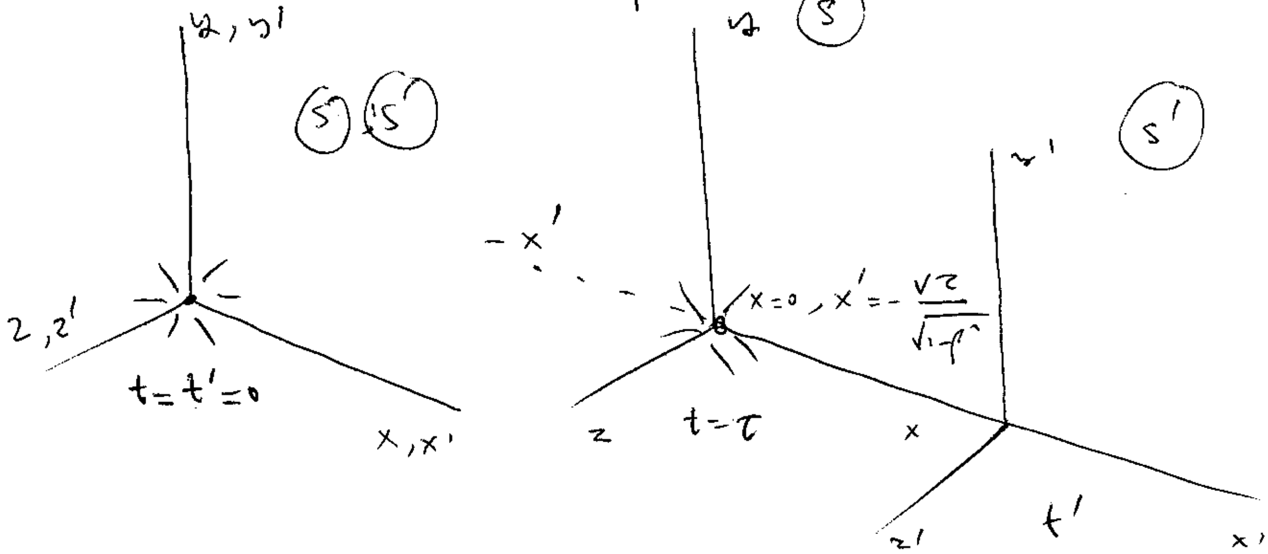
(S) : $x=0$ 'da hareketsiz bir vericinin $t=0$ ve $t=\tau$ 'da gönderdiği iki ışık atması alalım.

(S′) : (S) 'ye göre $V\hat{x}$ hızla hareket ediyor.

1. Atma (S′) 'de $x'=0$ 'da $t'=0$ anında alınıyor.

(S′) 'nin $t=\tau$ anında $x=0$ ile çakışan noktası

$$x' = \gamma(x - Vt) = -\frac{V\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (x=0 \text{ 'da } (S)$$



$$t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right) = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(S′) 'de $-V\tau/\sqrt{1-\beta^2}$ 'den $0'$ 'ye gelmesi için gerekli zaman

$$\Delta t' = \frac{\tau \frac{V}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(S′) 'de $x'=0$ noktasında iki atmanın algılanma zamanları arasında geçen toplam zaman $\quad t' + \Delta t' = \tau \dfrac{1+\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \dfrac{1+\beta}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}}\tau = \sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}\,\tau$

BS K

İki işaret arasında geçen zaman, bir ışık dalgasının iki düğüm noktası arasında geçecek zaman olarak da pekala yorumlanabilir.

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

Alıcı kaynaktan uzaklaşıyor ise $\beta = \frac{v}{c}$ $(+)$ $\quad \nu' < \nu \quad (\lambda' > \lambda)$

" " ğa yaklaşıyor " : $\beta = \frac{v}{c}$ $(-)$ $\quad \nu' > \nu \quad (\lambda' < \lambda)$

$\lambda = c/\nu$, $\lambda' = c/\nu'$

(Boyuna Göreli Doppler olayı.)

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

$$\lambda' = \lambda (1+\beta) \quad (\beta \ll 1)$$

(#) Göreriz yaklaşıklıkta Enine Doppler etkisi yok.

$$\Delta t' = \gamma \tau \Rightarrow \nu' = (1-\beta^2)^{1/2} \nu$$

BS K

BS K

BÖLÜM 11

ÖZEL GÖRELİLİK

11.1) Lorentz Değişmezi: Denklem 11.7 den $x^2-c^2t^2 = x'^2-c^2t'^2$ olduğunun doğrulayınız.

$x_1 \equiv x$, $x_4 = ict$ yazarsak $x^2-c^2t^2 \equiv x_1^2 + x_4^2$ olacağına dikkat ediniz.

<u>Çözüm</u>:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \gamma(x-\beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t-\beta\frac{x}{c}\right) \end{aligned}\right\} \text{Denk. 11.7.}$$

$$\begin{aligned} x'^2-c^2t'^2 &= \gamma^2(x-\beta ct)^2 - c^2\left[\gamma^2\left(t-\beta\frac{x}{c}\right)^2\right] \\ &= \gamma^2(x^2+\beta^2c^2t^2-2x\beta ct) \\ &\quad - c^2\left[\gamma^2\left(t^2+\beta^2\frac{x^2}{c^2}-2\beta\frac{x}{c}t\right)\right] \\ &= x^2\left[\gamma^2-\cancel{c^2}\gamma^2\beta^2\frac{1}{\cancel{c^2}}\right] \\ &\quad + c^2t^2\left[\gamma^2\beta^2-\gamma^2\right] + 2xt\underbrace{\left(-\gamma^2\beta c+\gamma^2\beta c\right)}_{0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x'^2-c^2t'^2 = x^2\gamma^2\underbrace{(1-\beta^2)}_{1/\gamma^2} + c^2t^2\gamma^2\underbrace{(\beta^2-1)}_{-1/\gamma^2}$$

$$= x^2-c^2t^2$$

11.2.) Lorentz Dönüşümü: Denk. 11.7 verildiğine göre Denk. 11.8'i çıkartınız.

<u>Çözüm</u>:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \gamma(x-\beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t-\beta\frac{x}{c}\right) \end{aligned}\right\} \text{Denk. 11.7.}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{1}{\gamma}x'+\beta tc \\ t &= \frac{1}{\gamma}t'+\beta\frac{x}{c} \end{aligned} \quad \text{olur.} \qquad \gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{\gamma}x'+\beta c\left(\frac{1}{\gamma}t'+\beta\frac{x}{c}\right) \Rightarrow x(1-\beta^2) = \frac{1}{\gamma}x'+\frac{\beta c}{\gamma}t'$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\gamma\cancel{\gamma}} = \frac{1}{\cancel{\gamma}}x'+\beta\frac{c}{\cancel{\gamma}}t' \Rightarrow \boxed{x = \gamma(x'+\beta ct')}$$

$t = \frac{1}{\gamma} t' + \frac{\beta}{c} x$ idi. [$x = \gamma(x' + \beta c t')$ bulduk].

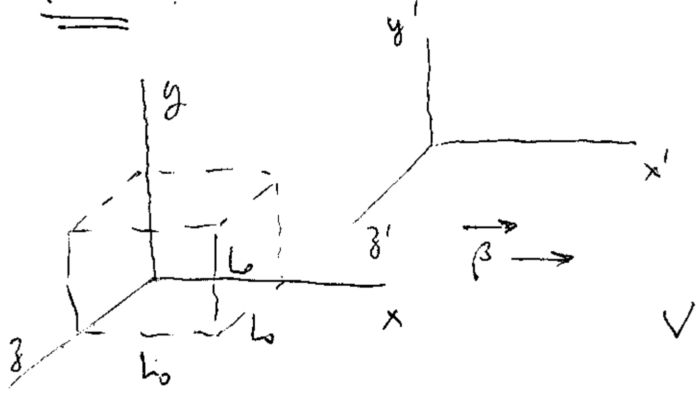
$$\Rightarrow t = \frac{1}{\gamma} t' + \frac{\beta}{c}\gamma(x' + \beta c t') \qquad \begin{cases} y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

$$= \gamma t'\left(\frac{1}{\gamma^2} + \beta^2\right) + \frac{\beta}{c}\gamma x'$$

$$= \gamma t'(\cancel{\beta^2} + 1 - \cancel{\beta^2}) + \frac{\beta}{c}\gamma x' \Rightarrow \boxed{t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right)}$$

11.3.) ~~Hacmin Değişmesi~~: L_0^3 bir kübün hacmi ise $L_0^3(1-\beta^2)^{1/2} = \frac{L_0^3}{\gamma}$'nın küp'ün bir kenarına paralel olarak hareket eden bir sistemden bakıldığı zaman görünen hacmi olduğunu gösteriniz. β hareket doğrultusundaki hıza karşılık gelmektedir.

Çözüm:



x' ekseni boyunca uzunluk $\frac{L_0}{\gamma}$

y' " " " L_0

z' " " " L_0

$$V' = \frac{L_0^3}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} V$$

BS K

11.4.) Eş zamanlık : S sisteminde eş zamanlı ($t_1 = t_2$) olan fakat farklı noktalarda bulunan ($x_1 \neq x_2$) iki olayın S' sisteminde genellikle eş zamanlı olmadığını Lorentz dönüşümlerinden yararlanarak gösteriniz.

Çözüm:

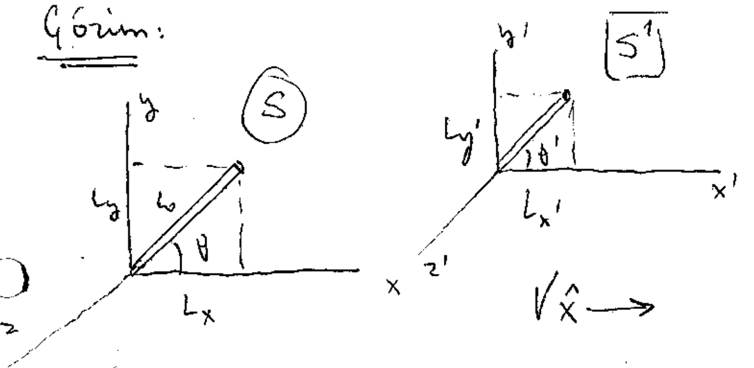
$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \gamma(x_1 - \beta c t_1) \\ x_2' &= \gamma(x_2 - \beta c t_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - x_1) - \gamma\beta c(t_2 - t_1)$$

$$t_2 = t_1$$

$$\Rightarrow x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - x_1) \Leftrightarrow t_2' \neq t_1'$$

11.5.) Açı Değişmesi : S'deki L_0 uzunluklu ve x ekseni ile θ açısı yapan bir çubuğun, S''deki uzunluğunu ve x' ekseni ile yaptığı açıyı bulunuz. S', S'ye göre $V\hat{x}$ hızı ile hareket etmektedir.

Çözüm:



S: $L_x = L_0 \cos\theta$

$L_y = L_0 \sin\theta$

S': $L_x' = \dfrac{L_x}{\gamma} = \dfrac{1}{\gamma} L_0 \cos\theta$

$L_y' = L_y = L_0 \sin\theta$

$$\frac{L_y'}{L_x'} = \tan\theta' = \frac{\cancel{L_0}\sin\theta}{\frac{1}{\gamma}\cancel{L_0}\cos\theta} = \gamma\tan\theta$$

$\gamma > 1 \Rightarrow \theta' > \theta$ olur.

$$L' = \sqrt{L_x'^2 + L_y'^2} = \sqrt{(1-\beta^2)L_0^2\cos^2\theta + L_0^2\sin^2\theta} = \sqrt{L_0^2 - L_0^2\beta^2\cos^2\theta}$$

$$= L_0\sqrt{1-\beta^2\cos^2\theta}$$

$$\boxed{L' \leq L_0}$$

BS K

11.6.) S' sisteminde $v_y' = c \sin\theta$ ve $v_x' = c\cos\theta$ ise S sisteminde $v_x^2 + v_y^2 = c^2$ olacağını gösteriniz.

Çözüm:

Denk. 11.18 'i kullanarak:

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{v_x' + V}{1 + \dfrac{v_x V}{c^2}} \; ; \; v_y = \dfrac{v_y'}{\gamma\left(1 + \dfrac{v_x' V}{c^2}\right)} \\ v_x' = c\cos\theta \qquad v_y' = c\sin\theta \qquad \gamma^2 = \dfrac{1}{1-\beta^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_x = \frac{c\cos\theta + V}{1 + \underbrace{\beta}_{(V/c)} \frac{\cancel{c}\cos\theta}{\cancel{c}}} \qquad v_y = \frac{c\sin\theta}{\gamma\left(1 + \underbrace{\beta}_{(V/c)} \frac{\cancel{c}\cos\theta}{\cancel{c}}\right)}$$

$$\Rightarrow v_x^2 + v_y^2 = \frac{1}{(1+\beta\cos\theta)^2}\left[c^2\cos^2\theta + V^2 + 2Vc\cos\theta + \frac{c^2\sin^2\theta}{\gamma^2}\right]$$

$$= \frac{1}{(1+\beta\cos\theta)^2}\left\{\left[c^2\left(\cos^2\theta + (1-\beta^2)\sin^2\theta\right)\right] + V^2 + 2Vc\cos\theta\right\}$$

$$= \frac{1}{(1+\beta\cos\theta)^2}\left\{c^2\left(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1}\right) + V^2(1-\sin^2\theta) + 2Vc\cos\theta\right\}$$

$$= \frac{1}{(1+\beta\cos\theta)^2}\, c^2\left\{1 + 2\frac{V}{c}\cos\theta + \frac{V^2}{c^2}\cos^2\theta\right\}$$

$$= \frac{1}{\cancel{(1+\beta\cos\theta)^2}}\, c^2\, \cancel{(1+\beta\cos\theta)^2} = c^2 \checkmark$$

BS K

11.7. π^+ Mezonları: (a) $\beta = 0.73$ ile hareket eden bir π^+ mezon patlamasının ortalama ömrü ne kadardır? (τ has hayat süresi 2.5×10^{-8} s'dir) (b) Bir ortalama ömür süresince $\beta = 0.73$ ile ne kadar yol alır. (c) Görelilik etkisi yok olursa (olmazsa) ne kadar yol alırdı? (d) $\beta = 0.99$ alarak (a), (b), (c)'yi tekrar ediniz.

Çözüm:

(a) $$t' = \gamma\tau = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2.5 \times 10^{-8}}{\sqrt{1-(0.73)^2}} = \frac{2.5 \times 10^{-8}}{0.683} = 3.66 \times 10^{-8}\ \text{s}$$

(b) $\boxed{S'}$'de alınan yol $= \beta c t' = 0.73 \times (10^{10} \times 3) \times 3.66 \times 10^{-8}$

$= 802$ cm $\cong 800$ cm.

(c) Zaman genişleme etkisi olmasa idi

aldığı yol $= \beta c \tau$

$= 0.73 \times 3.10^{10} \times 2.5 \times 10^{-8}$

$= 548$ cm $\cong 550$ cm.

(d)'yi y.g.

BS K

BS K

11.7.) ~~π Mezonlar:~~ (a) $\beta = 0.73$ 'le hareket eden bir π^+ mezon patlamasının ortalama ömrü ne kadardır? (τ has hayat süresi 2.5×10^{-8} s 'dir). (b) Bir ortalama ömür süresince $\beta = 0.73$ ile ne kadar yol alır. (c) Görelilik etkisi olmasa idi ne kadar yol alırdı? (d) İşlemleri $\beta = 0.99$ alarak yineleyiniz.

Çözüm:

(a) $$t' = \gamma \tau = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2.5 \times 10^{-8}}{\sqrt{1-(0.73)^2}} = \frac{2.5 \times 10^{-8}}{0.683} = 3.66 \times 10^{-8}\ \text{s}$$

(b) $\boxed{S'}$ de aldığı yol $= d' = \beta c t' = 0.73 \times 3.10^{10} \times 3.66 \times 10^{-8}$

$$= 802\ \text{cm}$$

(c) Zaman genleşme etkisi olmasa idi;

$$d = \beta c \tau = 0.73 \times 3.10^{10} \times 2.5 \times 10^{-8}$$

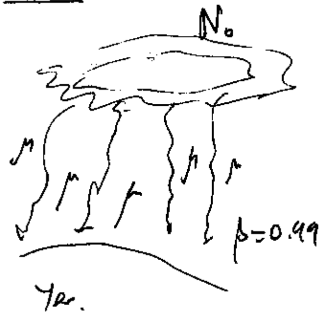
$$= 548\ \text{cm}$$

(d) ygp.

BS K

11.8.) ~~μ Mezonları~~; μ mezonun ortalama has ömrü yaklaşık 2.10^{-6} s 'dir. Atmosfer içinde belli bir yükseklikte geniş bir μ mezon patlaması olduğunu ve $v = 0.99c$ hızla aşağı inmekte olduğunu varsayalım. Atmosfer içinde iniş sırasındaki çarpışma sayısı küçüktür. (a) Bu patlama sonunda parçacıkların %1'i yere indiğine göre patlama yüksekliğini hesap ediniz. (μ mezonları kendi gözlem çerçevesinde bir t süresi sonunda yaşayan parçacıkların sayısı $N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$ ile verilir). (b) μ mezonundaki bir gözlemcinin ölçtüğünü bulunuz.

Çözüm



(a) $N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$

μ mezonların çerçevesinde %1'inin yere inme süresi

$$0.01 \cancel{N_0} = \cancel{N_0}\, e^{-t_{1/100}/2.10^{-6}} \Rightarrow e^{-t_{1/100}/2.10^{-6}} = 0.01$$

$$\Rightarrow \boxed{t = 9.22\times10^{-6}\ s}$$

Bu μ mezonların has ~~...~~ süresi, Dünya zamanı

$$t' = \gamma t = \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{9.22\times10^{-6}}{\sqrt{1-(0.99)^2}} = 6.54\times10^{-5}\ s$$

Dünyaya göre alınan yol = $d' = \beta c t' = 0.99\times3.10^{10}\times6.54\times10^{-5}$

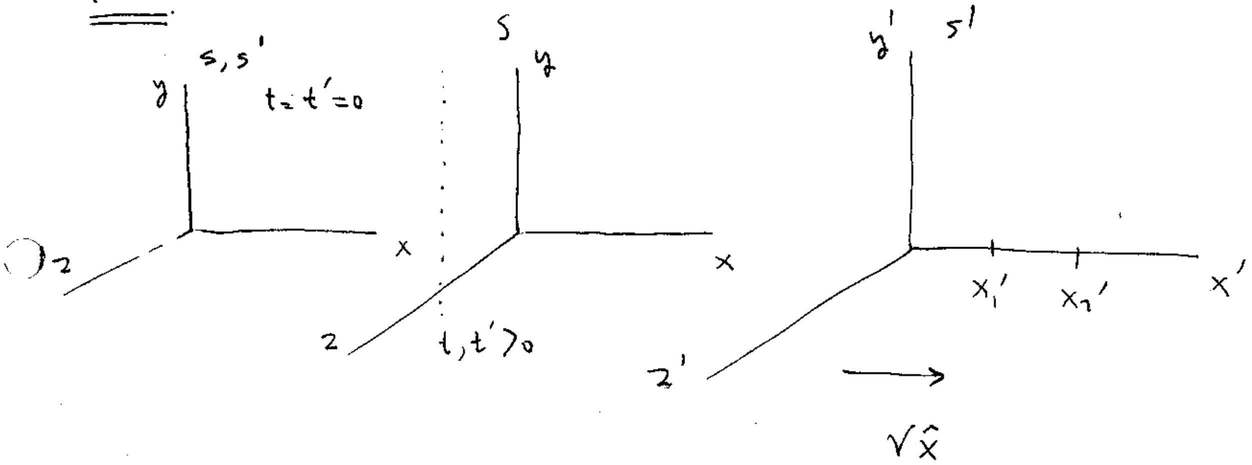
$= 1.94\times10^{6}$ cm $= 2.10^{6}$ cm.

(b) μ mezona göre ölçülen:

$$d = \frac{d'}{\gamma} = 2.10^{6}\sqrt{1-(0.99)^2} = 2.79\times10^{5}\ cm$$

11.9.) İki $\boxed{S}$ ve $\boxed{S'}$ eylemsizlik sistemi düşünelim. S' S'ye göre $V\hat{x}$ hızla hareket etsin. x_1' noktasında t_1' anında bir olay olsun. x_2' noktasında da başka bir olay t_2' anında olsun. İki sistemin başlangıç noktaları $t=t'=0$ anında çakışık bulunuyorlardı. S sisteminde buna karşılık olan zaman ve konumları bulunuz.

Çözüm



Lorentz Dön. (Inverse)

$$x_1 = \gamma\,(x_1' + V t_1') \qquad x_2 = \gamma\,(x_2' + V t_2')$$

$$t_1 = \gamma\left(t_1' + \frac{\beta}{c} x_1'\right) \qquad t_2 = \gamma\left(t_2' + \frac{\beta}{c} x_2'\right)$$

Hesap yapmak için şu örneği alalım; $(x_1' = 0,\ t_1' = 0)$ dır. $(x_2' = 100\,\text{cm},\ t_2' = 3.10^{-8}\,\text{s})$

$\beta = \sqrt{3}/2$ alalım.

$$(x_1 = 0,\ t_1 = 0) \qquad x_2 = \frac{100 + \frac{\sqrt{3}}{2} c\, 3.10^{-8}}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}}} = 1.759\ \text{cm}.$$

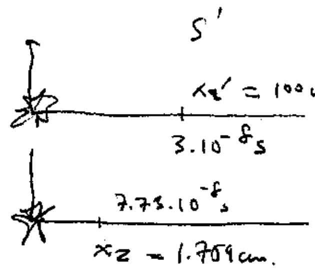
$$t_2 = \frac{3.10^{-8} + \frac{100.\frac{\sqrt{3}}{2}}{3.10^{10}}}{\sqrt{1 - 3/4}} = 7.73 \times 10^{-8}\,\text{s}$$

---

x_1' deki bir ışık sinyali x_2' ne $\frac{100}{3.10^{10}} = \frac{x_2'}{c} = \frac{1}{3}.10^{-8}\,\text{s}$ de ulaşacaktı. ve x_1' deki olay x_2' ne sebebiyet verecekti.

Oysa

$$ct_2 = 2.320\,\text{cm} > x_2$$

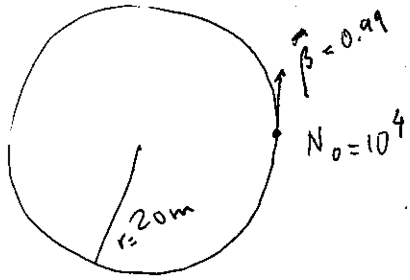


BS K

11.10.) [illegible] Bir parçalanmada 10^4 π^+ mezonu 20m yarıçapında dairesel bir yol üzerinde 0.99c süratile hareket etmektedir. π^+ mezonların ortalama has ömrü 2.5×10^{-8} s'dir. (a) Tekrar başlangıç noktasına geldiklerinde kaç tanesi yaşar? (b) Patlama sonunda çıkan mezonlar başlangıç noktasında hareketsiz kalsaydı bu sürede kaç tanesi hayatta kalırdı?

Çözüm:

(a)



Laboratuvar zamanı;

$$2\pi r = \beta c t \Rightarrow t = \frac{2\pi r}{\beta c} = \frac{2\pi\cdot 20\cdot 10^2}{0.99\times 3\cdot 10^{10}} = 4.23\times10^{-7}$$

π^+ mezonların has zamanı;

$$t' = \frac{t}{\gamma} = \sqrt{1-\beta^2}\,t = 0.141\times 4.23\times10^{-7} = 5.97\times10^{-8}\ \text{s}$$

Kalanların sayısı: (Kendi çerçevelerinde)

$$N = N_0 e^{-t'/\tau} = 10^4 e^{-5.97\cdot10^{-8}/2.5\times10^{-8}} = 10^4 e^{-2.38} = 918$$

Hareketsiz olsa idiler kalanların sayısı:

$$N = 10^4\cdot e^{-4.23\cdot10^{-9}/2.5\cdot10^{-8}} = 10^4\cdot e^{-16.9} = 4\times10^{-4}$$ Hiçbiri kalmaz.

(c) $\lambda' = \lambda \sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}$ 11.12

β [illegible] $\Rightarrow$ $\sqrt{1+\beta} = 1 + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{8}\beta^2 + \cdots$ [illegible] $\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta}} = 1 + \frac{1}{2}\beta + \frac{3}{8}\beta^2 + \cdots$

$\lambda' = \lambda \left(1 + \beta + \frac{1}{2}\beta^2 + \cdots\right)$

$\therefore \quad \dfrac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} = \beta + \frac{1}{2}\beta^2$

$\Delta\lambda = \frac{1}{2}\lambda\beta^2 = 0.103$ Å

BS K

11.11.) [redacted] Böl. 10'da uzak galaksilerdeki kırmızı-kayması verilerinin gözlenir bölgede uzaklık ile orantılı bir uzaklaşma hızı verdiğini belirtmiştik. Yani $V = \alpha r$, $\alpha = 1.6 \times 10^{-18}\, s^{-1}$ idi. 3.10^9 ışık yılı uzaklıktaki bir galaksinin uzaklaşma hızını hesaplayınız. Bu hız göreli midir?

Çözüm:

$$V = \alpha r = 1.6 \times 10^{-8} \times 3.10^{9} \times 9.46 \times 10^{17}$$

$$= 4.54 . 10^{9} \text{ cm/s}$$

$$\beta = \frac{V}{c} = 0.15 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(0.15)^2}} = 1.01$$ Değil.

11.12.) Galaksi ~~Hızları~~: Bir doğrultuda $V = 0.3c$ sürat ile uzaklaşan bir galaksi gözlüyoruz. Onunla zıt doğrultuda aynı süratle giden başka bir galaksi daha gözlüyoruz. Bu galaksilerden birindeki bir gözlemci diğer galaksinin hızını ne kadar bulur?

Çözüm:

$$v_x' = 0.3c \qquad V = 0.3c$$

$$\Rightarrow V_x = \frac{v_x' + V}{1 + \frac{v_x' V}{c^2}} = \frac{0.3c + 0.3c}{1 + (0.3)^2} = \frac{0.6}{1.09} c = 0.55c$$

$$= 1.65 \times 10^{10} \text{ cm/s}$$

BS K

11.14.) ~~Göreceli Doppler Kayması~~: Protonlar 20 kV'luk bir potansiyelde ivmelendiriliyorlar. Sonra da bir bölgede sabit hızla akıtılıyorlar. Bu bölgede H atomlarına nötralize oluyorlar ve bir ışık çıkıyor. Spektrometrede H_β yayımı için (duran bir atom için $\lambda = 4861{,}33$ Å) gözleniyor. Spektrometrenin optik ekseni iyonların hareketine paralel'dir. İyonların gözlenen yayıma doğrultusundaki hareketleri nedeni ile spektrumda Doppler kayması var. Aygıt üzerinde ayrıca ters doğrultuda giden ışığı spektrumda üst üste getirmek için bir ayna bulunmaktadır. (a) Protonun ivmelenmeden sonraki hızı ne kadardır? (b) İleri ve geri doğrultuda giden ışınlar için v/c'ye bağlı olarak Doppler kaymasını hesap ediniz ve spektrumun ilgili kısmının görünüşünü bir çizimle gösteriniz. (c) Sonra da görelilik tartışmasından çıkan 2. mertebe veya v^2/c^2 etkisini düşününüz. 2. mertebe kaymasının $\frac{1}{2}\lambda \frac{v^2}{c^2}$'ye eşit olduğunu gösteriniz ve bunu bu problem için sayısal olarak hesaplayınız. $+\vec{v}$ ve $-\vec{v}$ hareketleri için aynı olduğuna dikkat ediniz.

Çözüm:

(a) $M_p c^2 \approx 1.0$ MeV, $K = 20$ keV $\quad \beta \ll 1$

v için non-relativistik ifade kullanılabilir: $\frac{1}{2} M_p v^2 = K$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} M_p v^2 = \frac{20.000}{300} \cdot 4.8 \times 10^{-10} \text{ erg}$$

$$v = \sqrt{\frac{400}{3} \frac{4.8 \times 10^{-10}}{1.6 \times 10^{-24}}} = 1.96 \times 10^{8} \text{ cm/s}$$

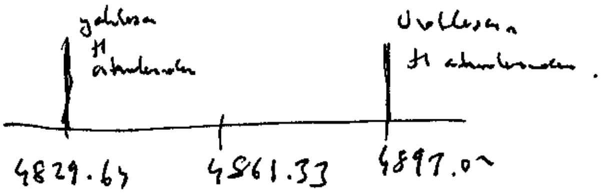
$$\nu = \frac{c}{\lambda}, \quad \Delta\nu = -\frac{c}{\lambda^2}\Delta\lambda, \quad \frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

$$\lambda' = \lambda\left(1 + \frac{v}{c}\right), \quad \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}, \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$$

(b) $$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} = \frac{1.96 \times 10^{8}}{3 \cdot 10^{10}} = 0.00652 \Rightarrow \Delta\lambda = 0.00652 \times 4861{,}33$$

$$\boxed{\Delta\lambda = 31.69 \text{ Å}}$$

Yaklaşan protonlar için λ azalır.
Uzaklaşan " " λ artar.



BS K