

BÖLÜM 12

GÖRELİ DİNAMİK MOMENTUM

ÖRNEK 12.1

12.1.) Görelî Momentum: Kinetik enerjisi 1 BeV (10^9 ev) olan bir protonun momentumunu hesaplayınız. (E BeV ile ölçülür ise p'yi BeV/c cinsinden hesaplayabilirsiniz).

Çözüm:

$$K.E = M_p c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) = \overset{\text{Toplam enerji}}{E} - M_p c^2$$

$$M_p c^2 = 0.94 \text{ BeV}, \quad 1 \text{ BeV} = 1.6022 \times 10^{-3} \text{ erg}$$

$$E = K.E + M_p c^2 = 1.00 + 0.94 = 1.94 \text{ BeV}$$

$$E^2 = c^2 p^2 + M^2 c^4 \Rightarrow E = \sqrt{c^2 p^2 + M^2 c^4} = 1.94$$

$$(cp)^2 + (0.94)^2 = (1.94)^2 \Rightarrow (cp)^2 = 2.88 \text{ (BeV)}^2$$

$$cp = 1.70 \text{ BeV} \Rightarrow \boxed{p = 1.70 \text{ BeV}/c}$$

(2)

~~Görsel:~~

12.2.) Kinetik enerjisi 1 Bev olan elektronun momentumu ne kadardır?

Çözüm:

$$M_e c^2 = 9.11 \times 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{20} = 8.20 \times 10^{-7} \text{ erg} = 0.51 \text{ Mev} = 5.1 \cdot 10^{-4} \text{ Bev}$$

$$M_e c^2 \ll K.E$$

$$E = K.E + M_e c^2 = (1 + \overset{\text{Bev}}{M_e c^2}) \Rightarrow \overset{\text{Bev}}{E^2} = (1 + \overset{\text{Bev}}{M_e c^2})^2 = 1 + 2M_e c^2 + \cancel{M_e^2 c^4} \rightarrow 0$$

$$E^2 = c^2 p^2 + \cancel{M_e^2 c^4} = 1 + 2M_e c^2$$

$$\Rightarrow c p = \sqrt{1 + 2M_e c^2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2M_e c^2 + \dots$$

$$= 1 + M_e c^2 = 1.0005 \text{ Bev}$$

$$\Rightarrow p = 1.0005 \text{ Bev}/c$$

12.3.) Foton momentumu: 1 BeV enerjili bir fotonun momentumu ne kadardır?

$$\text{Fotonun momentumu} : p = \frac{E}{c} = 1.0 \text{ BeV}/c = 0.53 \cdot 10^{-13} \text{ g cm/s}$$

12.4.) Hızlı protonun enerji, momentumu : $\beta = 0.995$ hızlı proton verildiğine göre
buna karşı gelen göreli enerji ve momentum ne kadardır? Kinetik enerji ne kadardır?

Çözüm:

$$M_p c^2 = 0.938 \text{ BeV}$$

$$E = \gamma M_p c^2 = \frac{M_p c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{0.938}{\sqrt{1-(0.995)^2}} = 9.39 \text{ BeV} \quad \checkmark$$

$$K.E = E - M_p c^2 = 9.39 - 0.94 = 8.45 \text{ BeV} \quad \checkmark$$

$$\circ \quad \cancel{p} = \sqrt{(9.39)^2 - (0.938)^2} = \sqrt{87.29} = 9.34$$

$$\Rightarrow \boxed{p = 9.34 \text{ BeV}/c}$$

(2)

12.5.) ~~Enerji miktarı~~; Kozmik ısı parçacıklarının 10^{19} eV kadar çıkan enerjilere sahip oldukları bilinmektedir. (a) Böyle bir parçacığın görünür ağırlık kütlesi (yaklaşık olarak) ne kadardır? (b) Momentum (yaklaşık olarak) ne kadardır?

Çözüm:

$$(a) E = M c^2 = 10^{19} \text{ eV} = 10^{19} \cdot 1.6 \times 10^{-12} \text{ erg} = 1.6 \times 10^7 \text{ erg}$$

$$\Rightarrow M = \frac{E}{c^2} = \frac{1.6 \times 10^7}{9 \cdot 10^{20}} = 1.8 \times 10^{-14} \text{ g}$$

$$(b) p = M c = \frac{E}{c} = \frac{1.6 \times 10^7}{3 \cdot 10^{10}} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ g cm/s}$$

12.6.) ~~Energy ve Momentum~~: Bir proton için laboratuvarda

$\beta = 0.999$ 'dur. Laboratuvara göre, aynı doğrultuda $\beta^* = 0.990$ hızla hareket eden bir çerçevede gözlenecek enerji ve momentumu bulunuz.

Çözüm:

$$v_{x'} = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v_x v}{c^2}} = \frac{0.999c - 0.990c}{1 - (0.999)(0.990)} = 0.82c \Rightarrow \beta' = 0.82$$

$$E' = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{x'}}{c}\right)^2}} = \frac{0.938}{\sqrt{1 - (0.82)^2}} = 1.63 \text{ BeV}$$

$$p' = \frac{Mv_{x'}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{x'}}{c}\right)^2}} = \frac{Mc \frac{v_{x'}}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{x'}}{c}\right)^2}} = 1.34 \text{ BeV}/c$$

Laboratuvarda:

$$E = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{0.938}{\sqrt{1 - (0.999)^2}} = 20.974 \text{ BeV} \checkmark$$

$$p = \frac{M\beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 20.984 \times 0.999 = 20.953 \text{ BeV}/c$$

Şimdi buları $\beta' = 0.990$ ile dönüştürür.

$$\left. \begin{aligned} p' &= \gamma^* \left(p - \frac{E}{c} \beta^* \right) = 7.089 (0.189) = 1.34 \text{ BeV}/c \\ E' &= \gamma^* \left(E - p \beta^* c \right) = 7.089 (0.231) = 1.63 \text{ BeV} \end{aligned} \right\} \gamma^* = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.990)^2}} = 7.089$$

12.7.) Hızlı elektronun enerjisi: Bir elektron için $\beta = 0.99$ dir. kinetik enerjisi ne kadardır?

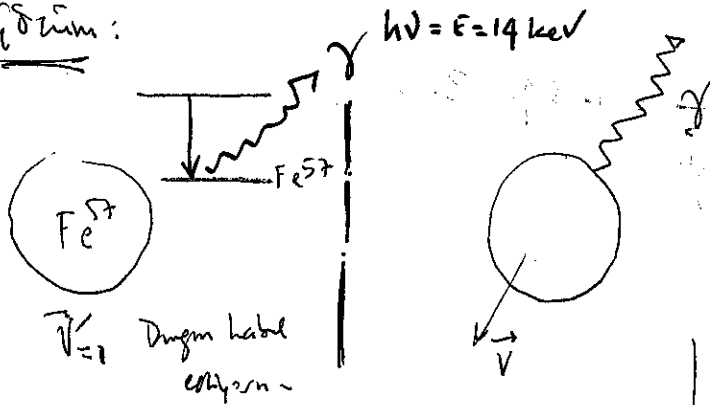
Çözüm:

$$K.E = E - Mc^2 = \gamma Mc^2 - Mc^2 = Mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) = Mc^2 (7.07 - 1)$$

$$= 6.07 Mc^2 = 6.07 \cdot 0.511 = 3.10 \text{ MeV}$$

12.8.) Foton salınması geri tepme: 14 KeV 'lık bir foton salınması sırasında bir Fe^{57} çekirdeğinin laboratuvarı kazandığı geri tepme momentumu ne kadardır? Çekirdeğin momentumu görelidir?

Çözüm:



$$P_{\text{fot}} = P_{\gamma} = \frac{E}{c} = \frac{14 \text{ KeV}}{c}$$

$$= \frac{14 \cdot 1.6 \times 10^{-9}}{3 \cdot 10^{10}} \text{ erg}$$

$$P_{\gamma} = 7.5 \times 10^{-19} \text{ gram/s}$$

kütle numarası (P+n) M_p

$$M_{Fe^{57}} \approx 57 \times 1.7 \times 10^{-24} \text{ g} \approx 97 \cdot 10^{-24} \text{ g}$$

Atom numarası

$$M_{Fe^{57}} V = P_{\gamma} \Rightarrow V = \frac{P_{\gamma}}{M_{Fe^{57}}} = \frac{7.5 \cdot 10^{-19}}{97 \cdot 10^{-24}} \approx 7.7 \times 10^3 \text{ cm/s}$$

Non-relativistik

- 12.9.) Getirideğin Çeri Fepmesi: Lab. 'da hareketsiz bir protona E_γ enerjili bir foton çarpıyor. (a) γ -ışınının Lab. çerçevesindeki momentumu ne kadardır? (b) K.M. 'nin Lab. çerçevesindeki V hızının $\frac{V}{c} = E_\gamma / (E_\gamma + M_p c^2)$ ile verildiğini gösteriniz. (c) γ -ışınının K.M. çerçevesindeki enerjisi ne kadardır? Ayrıca K.M. çerçevesindeki protonun enerjisi ne kadardır?

Çözüm:

(a) Lab. Çerçevesinde

$$p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} \quad \checkmark$$

(b) K.M. 'nin hızını bulabilmek için foton ve protonun eşit ama zıt momentumlu olduğu bir referans çerçevesinde β 'yi bulacağız. $\beta = \frac{V}{c}$ olsun.

Proton V hızı ile hareket ediyor olacaktır. γ -ışını Doppler kaymasına uğrayacaktır.

$$\left. \begin{aligned} E_\gamma' &= E_\gamma \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \\ p_\gamma' &= \frac{E_\gamma'}{c} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} p_\gamma' &= \gamma M_p \beta c = \frac{M_p \beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{M_p \beta c}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}} = \frac{E_\gamma'}{c} \\ &= \frac{E_\gamma}{c} \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M_p \beta c = \frac{E_\gamma}{c} (1-\beta) \Rightarrow \beta (M_p c^2 + E_\gamma) = E_\gamma$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \frac{E_\gamma}{E_\gamma + M_p c^2} = \frac{V}{c}}$$

②

$$(c) \quad E_Y' = E_Y \sqrt{\frac{1 - E_Y / (E_Y + M_p c^2)}{1 + E_Y / (E_Y + M_p c^2)}} = E_Y \sqrt{\frac{M_p c^2}{2E_Y + M_p c^2}}$$

olman gerektiği gibi $E_Y' < E_Y$

Lab'da v_s art.
 $v_{M'de}$ v azalır E azalır
 v artar E artar.

$$E_p' = \gamma M_p c^2 = \frac{M_p c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{M_p c^2}{\sqrt{1 - \frac{E_Y^2}{(E_Y + M_p c^2)^2}}} = \frac{M_p c^2 (E_Y + M_p c^2)}{\sqrt{2E_Y M_p c^2 + M_p^2 c^4}}$$

$$= \frac{E_Y + M_p c^2}{\sqrt{1 + \frac{2E_Y}{M_p c^2}}}$$

$$E_Y \ll M_p c^2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2E_Y}{M_p c^2}}} = 1 - \frac{E_Y}{M_p c^2} + \frac{3}{8} \frac{4E_Y^2}{M_p^2 c^4} + \dots$$

$$\rightarrow E_p' = (E_Y + M_p c^2) \left(1 - \frac{E_Y}{M_p c^2} + \frac{3}{2} \frac{E_Y^2}{M_p^2 c^4} + \dots \right)$$

$$E_p' = E_Y + M_p c^2 - \frac{E_Y^2}{M_p c^2} - E_Y + \frac{3}{2} \frac{E_Y^3}{M_p^2 c^4} + \frac{3}{2} \frac{E_Y^2}{M_p c^2}$$

$$= M_p c^2 + \frac{1}{2} \frac{E_Y^2}{M_p c^2}$$

$$\frac{E_Y}{c} = p_{\text{prot}} \rightarrow \boxed{E_p' = M_p c^2 + \frac{(p_{\text{prot}})^2}{2M_p}} \quad \text{Newtonian Sonuç:}$$

12.11.) İki Parçacık sisteminde Lorentz Değişmezliği: İki parçacık sistemi için toplam momentum ve enerji $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ ve $E = E_1 + E_2$ olsun. $\vec{p}$ ve E üzerindeki Lorentz dönüşümlerinin $E^2 - p^2 c^2$ mizelinin değişmezliği ile uyutğunun belirlen bir şekilde gösteriniz.

Görüm:

$$\left. \begin{aligned} p_x' &= \gamma \left(p_x - \frac{\beta}{c} E \right) \\ p_y' &= p_y \\ p_z' &= p_z \\ E' &= \gamma (E - \beta c p_x) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} p^2 &= p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \\ E'^2 - p'^2 c^2 &= \gamma^2 \left(E - \beta c p_x \right)^2 - p_y^2 c^2 - p_z^2 c^2 \\ &\quad - \gamma^2 \left(p_x - \frac{\beta}{c} E \right)^2 c^2 \end{aligned}$$

$$E'^2 - p'^2 c^2 = \gamma^2 \left[E^2 + \beta^2 c^2 p_x^2 - 2 E \beta c p_x \right] - \gamma^2 \left[p_x^2 + \frac{\beta^2}{c^2} E^2 - 2 p_x \frac{\beta}{c} E \right] c^2 - p_y^2 c^2 - p_z^2 c^2$$

$$= \gamma^2 \left[E^2 - \beta^2 E^2 - (p_x^2 - \beta^2 p_x^2) c^2 \right] - (p_y^2 + p_z^2) c^2$$

$$= \gamma^2 \left[E^2 \underbrace{(1 - \beta^2)}_{\frac{1}{\gamma^2}} - p_x^2 \underbrace{(1 - \beta^2)}_{\frac{1}{\gamma^2}} c^2 \right] - (p_y^2 + p_z^2) c^2$$

$$= E^2 - p_x^2 c^2 - p_y^2 c^2 - p_z^2 c^2$$

$$= E^2 - p^2 c^2 \quad \checkmark$$

④

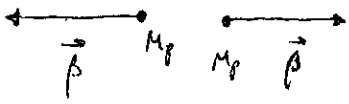
12.12.) K.M. çerçevesinden duran bir çerçeveye dönüşüm: İki proton aynı noktadan

zıt yönlerde $\beta = 0.5$ hızları ile uzaklaşmaktadır. (a) Bir protonun ortak noktaya göre enerjisi ve momentumu ne kadardır? (b) Bir protonun, diğerinin durduğu sistemdeki enerjisi ve momentumunu bulmak için Lorentz dönüşümünü kullanınız. (Bu çeşit problemlerde enerjisi bir duran kütle enerjisinin katları olarak ifade etmek yararlıdır.)

Çözüm:

(a)

"Uygun bir nokta için her bir proton aynı momentum ve enerjiye sahiptir"



$$E = \gamma M_p c^2 = \frac{M_p c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{M_p c^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} M_p c^2 = 1.15 M_p c^2 = 1.083 \text{ BeV}$$

$$K.E = E - M_p c^2 = 1.083 - 0.938 = 0.145 \text{ BeV}$$

$$p = \gamma M_p \beta c = \frac{M_p \beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} M_p \beta c = 0.542 \text{ BeV}/c$$

(b) " $\beta = 0.5$ ile hareket eden çerçeveye dönüşüm yapılır. Bu çerçevede bir proton artık durmaktadır."

$$p_x' = \gamma (p_x + \beta \frac{E}{c}) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{M_p c}{\sqrt{3}} + \frac{M_p c}{\sqrt{3}} \right) = \frac{4 M_p c}{\sqrt{3}} = 1.251 \text{ BeV}/c \quad \boxed{\beta = \frac{1}{2}}$$

$$E' = \gamma (E + \beta c p_x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} M_p c^2 + \frac{M_p c^2}{2\sqrt{3}} \right) = \frac{5}{3} M_p c^2 = 1.563 \text{ BeV}$$

$$E'^2 - p'^2 c^2 = \frac{25}{9} M_p^2 c^4 - \frac{16}{9} M_p^2 c^4 = M_p^2 c^4$$

$$E^2 - p^2 c^2 = \frac{4}{3} M_p^2 c^4 - \frac{1}{3} M_p^2 c^4 = M_p^2 c^4$$

12.13.) Radyo Antenlerinden Dağılan Isınının Kütlesi: 10^3 Watt'lık bir radyo anteninden 24 saatte yayılan enerjiye denk kütle ne kadardır? ($1 \text{ Watt} = 10^7 \text{ erg/s}$)

Çözüm:

$$1 \text{ gün} = \pi \cdot 10^7 \text{ s}, \quad 1 \text{ Watt} = 1 \text{ Joule/s} = 10^7 \text{ erg/s}, \quad 10^3 \text{ Watt} = 10^{10} \text{ erg/s}$$

$$Mc^2 = 1 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot 10^7 = \pi \cdot 10^{17} \text{ erg} \Rightarrow M = \frac{\pi \cdot 10^{17}}{9 \cdot 10^{20}} = 0.35 \cdot 10^{-3} \text{ g} = 0.35 \text{ mg}$$

12.14.) Güneş Enerjisi: Güneşten Dünya uzaklığında saniyede cm^2 başına düşen Güneş enerjisi alanına Güneş sabiti denir. Ökû sonunda bu sabitin $1.4 \cdot 10^6 \text{ erg/s} \cdot \text{cm}^2$ olduğu bulunmuştur. (a) Güneşin toplam enerji üretiminin $\approx 4 \cdot 10^{33} \text{ erg/s}$ olduğunu gösteriniz. (b) Güneşteki 1 gr madde başına enerji üretiminin $\approx 2 \text{ erg/s} \cdot \text{g} \approx 6 \cdot 10^7 \text{ erg/g} \cdot \text{yıl}$ olduğunu gösteriniz. (c) He^4 alüminumak üzere yanan 1 gr hidrojenin eşdeğer enerjisinin $\approx 6 \cdot 10^{18} \text{ erg}$ olduğunu gösteriniz. (d) Güneş kütlesinin $\frac{1}{3}$ 'ünün hidrojen olduğunu ve nükleer yanma olayının değişmeden devam edeceğini; kabul ederek daha $3 \cdot 10^{10}$ yıl bugünkü hızı ile ısıyı yayabileceğini gösteriniz.

Çözüm (a)

$$\textcircled{a} G = \text{Toplam enerji üretimi} = \text{Güneş Sabiti} \times 4\pi R^2$$

Dünyaya göre yarıçapı.

$$= (1.4 \times 10^{13})^2 \times 4\pi \times 1.4 \times 10^6 = 3.91 \times 10^{33} \text{ erg/s} \quad \checkmark$$



$$\textcircled{b} \frac{G}{M_{\text{güneş}}} = \frac{3.91 \times 10^{33}}{1.99 \times 10^{33}} = 1.96 \text{ erg/g} \cdot \text{s} = 1.96 \pi \cdot 10^7 = 6.2 \times 10^7 \text{ erg/g} \cdot \text{yıl} \quad \checkmark$$

$$\textcircled{c} \text{ Sayfa 364'den He atomu başına enerji salımı} = 26.7 \text{ Mev} = \frac{26.7}{4 \cdot \frac{1.67 \times 10^{-24}}{M_H}} = 6.4 \times 10^{18} \text{ erg/g} \quad \checkmark$$

$$1 \text{ Mev} = 1.6 \times 10^{-6} \text{ erg}$$

⑥

(a) $\frac{M_s}{3} = \frac{1.99}{3} \cdot 10^{33} \text{ g}$ hidrojen alın.

1g H⁺ 10¹⁸ enerjiyi.

Taylor enerji = $E = 6,4 \times 10^{18} \times \frac{1.99}{3} \times 10^{33}$

$= 4.25 \times 10^{51} \text{ erg}$

$= 3.91 \times 10^{33} \text{ erg/s}$ (Önümüz.) ✓

$t = \frac{4.25 \times 10^{51}}{3.91 \times 10^{33}} = 1.09 \times 10^{18} \text{ s}$

$= \frac{1.09 \times 10^{18}}{\pi \cdot 10^7} = 3.5 \times 10^{10} \text{ yıl. } 35 \text{ Milyar yıl.}$ —

Relativistische Transformationen (Kontinuität)

$$\textcircled{\#} x' = \gamma (x - \beta ct) = \gamma (x - \beta ct)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\beta}{c} x \right) = \gamma \left(t - \frac{\beta}{c} x \right)$$

Relativistische Transformationen (Kontinuität)

$$\textcircled{\#} v_{x'} = \frac{v_x - \beta c}{1 - \beta v_x / c}$$

$$v_{y'} = \frac{v_y}{\gamma (1 - \beta v_x / c)}$$

$$v_{z'} = \frac{v_z}{\gamma (1 - \beta v_x / c)}$$

Relativistische Transformationen (Kontinuität)

$$\textcircled{\#} \vec{p} = \gamma M \vec{v} = \frac{M \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Erhaltungssatz:

$$\textcircled{\#} p = \gamma \beta M c$$

Relativistische Transformationen (Kontinuität)

$$\textcircled{\#} E = M c^2 \gamma = \frac{M c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\textcircled{\#} E^2 - p^2 c^2 = M^2 c^4$$

Relativistische Transformationen (Kontinuität)

$$\textcircled{\#} p_x' = \gamma \left(p_x - \frac{\beta}{c} E \right)$$

$$p_y' = p_y$$

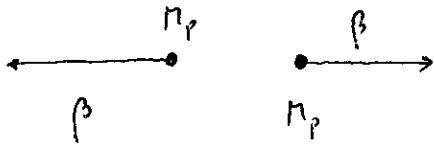
$$p_z' = p_z$$

$$\textcircled{\#} E' = \gamma (E - p_x c \beta)$$

12.12.)

(a)

Ortak noktaya göre enerji ve mom.



$$E = \gamma m_p c^2 = \frac{m_p c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} m_p c^2$$

$$= 1.15 m_p c^2 = 1.083 \text{ BeV}$$

$$K.E. = E - m_p c^2 = 1.083 - 0.938 = 0.145 \text{ BeV}$$

$$p = \gamma m_p \beta c = \frac{2}{\sqrt{3}} m_p \beta c = 0.542 \text{ BeV}/c$$

(b) Bir protonun, diğ erinin durgun sistemindeki enerji ve mom.

" $\beta = 0.5$ ile hareket eden çerçeveye dönüşüm yapılır. Bu çerçevede bir proton artık durmaktadır. "

$$p_x' = \gamma (p_x + \beta \frac{E}{c}) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{m_p c}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} m_p c \right) = \frac{4}{3} m_p c = 1.251 \text{ BeV}/c$$

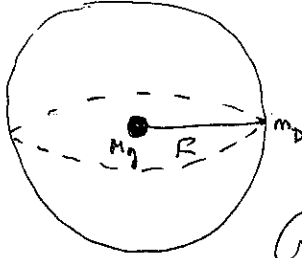
$$E' = \gamma (E + \beta c p_x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} m_p c^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} m_p c^2 \right) = \frac{5}{3} m_p c^2 = 1.563 \text{ BeV}$$

$$\begin{cases} E'^2 - p'^2 c^2 = \frac{25}{9} m_p^2 c^4 - \frac{16}{9} m_p^2 c^4 = m_p^2 c^4 \\ E^2 - p^2 c^2 = \frac{4}{3} m_p^2 c^4 - \frac{1}{3} m_p^2 c^4 = m_p^2 c^4 \end{cases}$$

BS K

12.14.) Güneş Enerjisi: Güneşten dünya uzaklığında saniyede cm^2 başına düşen güneş enerjisi akısına Güneş sabiti denir. Ölçü sonunda bu sabitin $1.4 \times 10^6 \text{ erg/s} \cdot \text{cm}^2$ olduğu bulunmuştur. (a) Güneşin toplam enerji üretiminin $\approx 4.0 \times 10^{33} \text{ erg/s}$ olduğunu gösteriniz. (b) Güneşteki 1 gram madde başına enerji üretiminin $\approx 2 \text{ erg/g} \cdot \text{s} \approx 6 \times 10^7 \text{ erg/g} \cdot \text{yıl}$ olduğunu gösteriniz. (c) He^4 oluşturmak üzere yanan 1 gram hidrojenin eşdeğer enerjisinin $\approx 6 \cdot 10^{18} \text{ erg}$ olduğunu gösteriniz. (d) Güneş kütlesinin $1/3$ 'ünün hidrojen olduğunu ve nükleer yanma olayının değişmeden devam edeceğini kabul ederek güneşin daha $3 \cdot 10^{10}$ yıl bugünkü hızı ile ışık yayabileceğini gösteriniz.

Çözüm
(a)



$$G = \text{Toplam enerji üretimi} = \text{Güneş sabiti} \times 4\pi R^2$$

"Dünyanın güneşe
yakınlığı"

$$G = (1.4 \times 10^6) \times 4\pi \times (1.4 \times 10^{13})^2$$

$$= 3.91 \times 10^{33} \text{ erg/s} \approx 4 \times 10^{33} \text{ erg/s}$$

(b)

$$1 \text{ gram madde başına enerji üretimi} = \frac{G}{M_{\text{güneş}}} = \frac{3.91 \times 10^{33}}{1.99 \times 10^{33}} = 1.96 \text{ erg/g} \cdot \text{s}$$

$$\approx 2 \text{ erg/g} \cdot \text{s} = 1.96 \times \pi \cdot 10^7 = 6.2 \times 10^7 \text{ erg/g} \cdot \text{yıl}$$

(c)

$$\text{He atomu başına enerji salınımı: (Eyl: 26.4)} = 26.7 \text{ MeV} = \frac{26.7}{4.167 \times 10^{-24}}$$

$$= 6.4 \times 10^{18} \text{ erg/g} = 1 \text{ g He'nin eşdeğer enerjisi}$$

$$1 \text{ MeV} = 1.6 \times 10^{-6} \text{ erg}$$

(d) $\frac{1}{3}$ lü Hidrojen de:

$$\text{Güneşteki H miktarı} := \frac{M_s}{3} = \frac{1.99}{3} \cdot 10^{33} \text{ g}$$

Toplam enerji := 1 g H'nin eşdeğer enerjisi $\times$ Güneşteki H miktarı:

$$= 6.4 \times 10^{18} \times \frac{1.99}{3} \cdot 10^{33}$$

$$= 4.25 \times 10^{51} \text{ erg}$$

Toplam Enerji Üretimi := $3.91 \times 10^{33} \text{ erg/s}$ idi

$$t = \frac{4.25 \times 10^{51}}{3.91 \times 10^{33}} = 1.09 \times 10^{18} \text{ s}$$

$$= \frac{1.09 \times 10^{18}}{3.15 \times 10^7} = 3.5 \times 10^{10} \text{ yıl} \quad \underline{\underline{35 \text{ Milyar Yıl}}}$$

GÖRELİ DİNAMİK : MOMENTUM ve ENERJİ

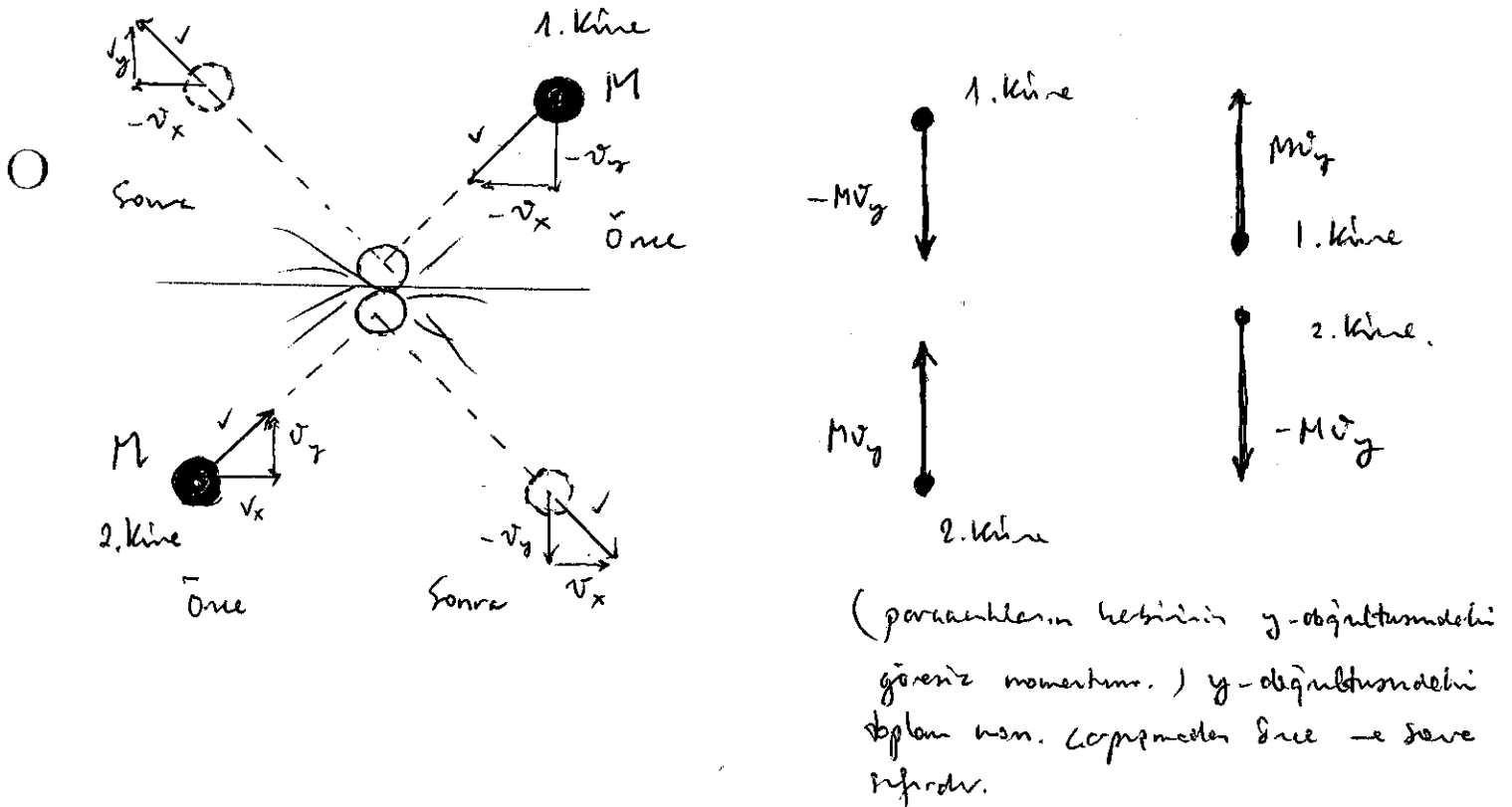
$v \ll c$ için geliştirilen fizik yasaları görelilik kuramı ile uyumsuz mu?

⑤ ve ⑤' gerçeğelerindeki iki gözlemci fizik yasalarını sıkarıyorlar. Her biri bunları kendi sisteminde ölçtiği uzunluk, zaman, hız veya ivme cinsinden ifade ederler. Yasalar, hem ⑤ hemde ⑤' değişkenleri cinsinden eşit (form) bakımından özdeş olmalıdır.

Momentum Konumu ve Görelî Momentumun Tanımı :

⑧ Newton'un momentumun görelî hızlarda korunmadığını görelîm.

Eşit Kütelli Parçacıklar Arasında Çarpışma :



(2)

Parçacıkların eşit ve zıt yönlü hızlar ile yaklaştığı bir (S) göbüm çerçevesi seçelim. (S) 'de K.M. durumdur. Momentunun toplam y-bileşerinin G.Ö 'de G.S 'da simetriden dolayı sıfır olması gerekir. $\pm v_y$ için zıt işaretlere sahip olmak kaygıyla momentumun hangi tanımını vererek verebiliriz den doğrudur.

1. parçacığın p_y 'sindeki değişim: $+2Mv_y$

2. " " " " $-2Mv_y$

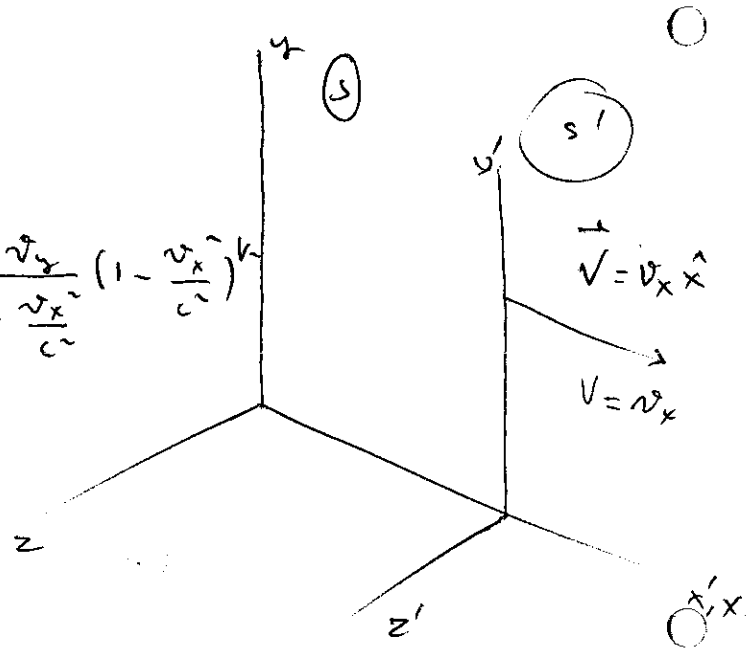
(S) 'ye göre $\vec{V} = v_x \hat{x}$ özel bir ile hareket eden (S') alalım.

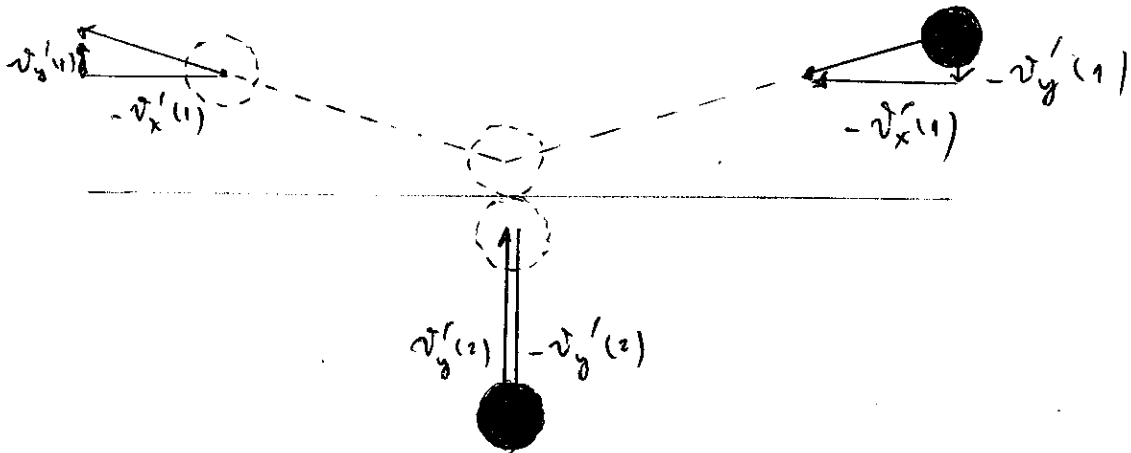
$$-v_x'(1) = \frac{-v_x - V}{1 + v_x V/c^2} = \frac{-2v_x}{1 + v_x^2/c^2}$$

$$v_y'(1) = \frac{v_y}{1 + v_x V/c^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2} = \frac{v_y}{1 + \frac{v_x^2}{c^2}} \left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

$$v_x'(2) = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2} = 0$$

$$v_y'(2) = \frac{v_y}{1 - v_x V/c^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2} = \frac{v_y}{\left(1 - v_x^2/c^2\right)^{1/2}}$$





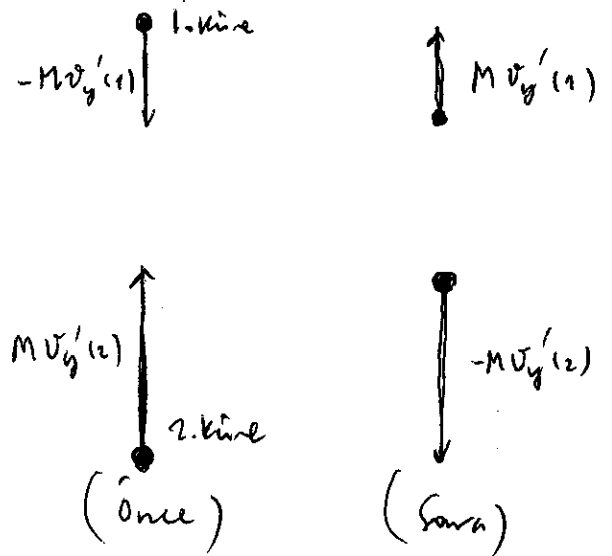
- $v = v_x$ olduğunda (5)'de $-v'_x(1) = -\frac{2v}{1+v^2/c^2}$ $v'_x(2) = 0$
- $v'_y(1) = \frac{v_y}{1+v^2/c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$
- $v'_y(2) = \frac{v_y}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} > v'_y(1)$

④ Hızın y -bileşenleri (5)'de eşit olmakla birlikte (5)'deki y -bile-

○ şenlerinin büyüklükleri farklı. Bu fark, hızın x -bileşenlerinin (5)'de aynı olmasından dolayı.

⑤ $-2Mv'_y(2)$ ve $2Mv'_y(1)$ göreciz mom. değişimleri burada eşit ve zıt yönlü olamaz.

⑥ Başka bir mom. tanım.



(4)

Momentum tanımı öyle olmalıdır ki bir parçacığın momentumunun y-bileşeni, içerisinde çarpışmanın görüldüğü gözlem çerçevesinin hızının x-bileşenine bağımsız olsun.

Lorentz dönüşümleri altında y doğrultusundaki Δy yerdeğiştirmesinin tüm gözlem çerçevelerinde aynı olduğunu biliyoruz. Bu yolu almak için gerekli Δt gözlem çerçevesine bağlıdır. Dolayısıyla $v_y \Delta y / \Delta t$ hız bileşeni de gözlem çerçevesine bağlı olacaktır. Δt 'yi ölçmek için lab. saatleri yerine parçacık üzerinde bulunan bir saatten faydalanabiliriz. Bu $\Delta \tau$ (0) has zamanı ölçer. Bütün gözlemler $\Delta \tau$ üzerinde yapılır.

• $\Delta y / \Delta \tau$ tüm gözlem çerçevelerinde aynıdır.

$$\Delta \tau = \Delta t \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

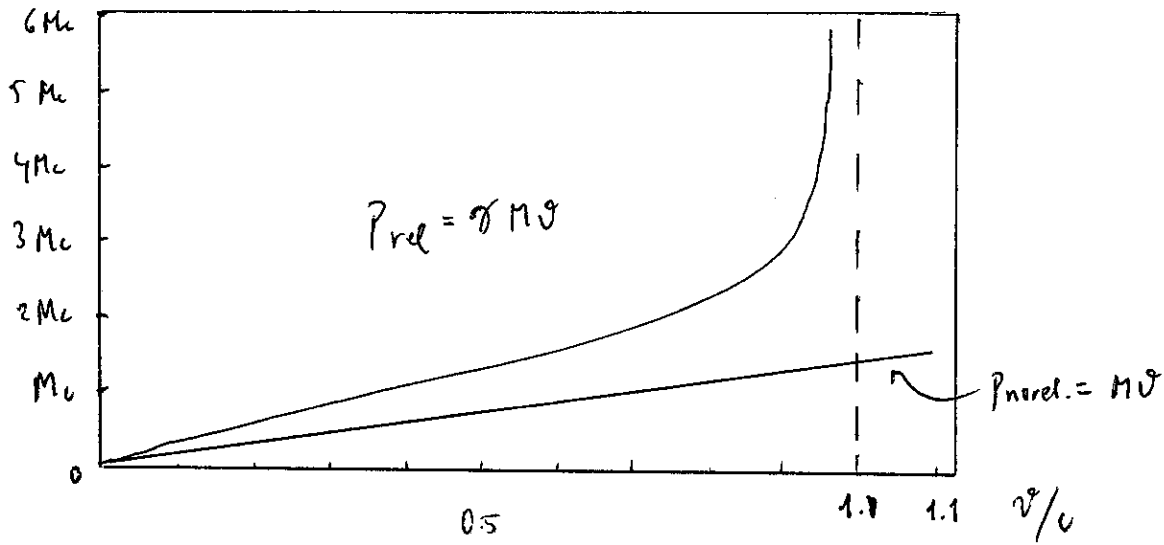
v : Δt 'nin ölçüldüğü gözlem çerçevesine göre parçacığın hızı.

$$\frac{\Delta y}{\Delta \tau} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \frac{1}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}}$$

$\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ 'nin sadece y-bileşeninin, hızlarının yalnızca x-bileşeni farklı tüm gözlem çerçevelerinde aynı olacağını görüyoruz.

$$\vec{p} = \frac{M \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$p = Mc\beta\gamma$$



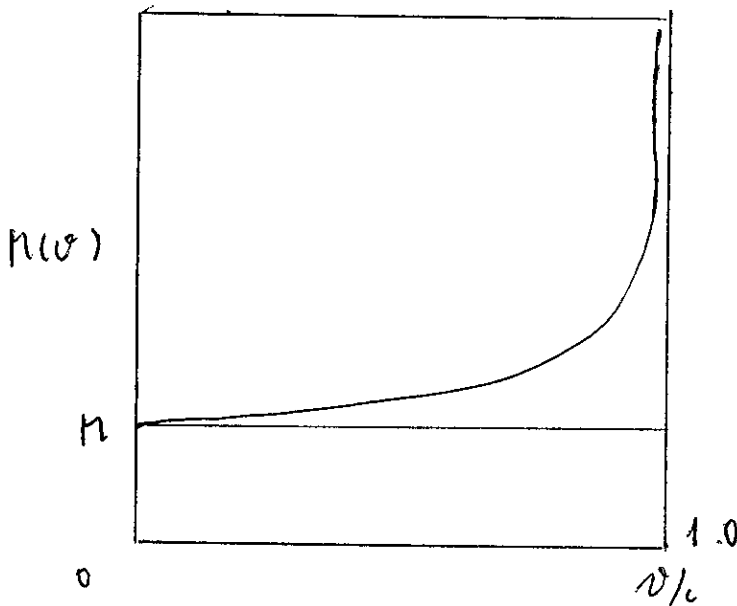
Buraya kadar, eksenleri harekete göre simetrik bir şekilde düzenleyerek Ömer'in parçacığın hareketinin x-bileşeninde bir değişim olmadığını saptadık. y-bileşeninde de bir değişim olmadığına göre mom.'ın bu kısmı x-bileşenin komponentinin de sağlar. İleride (5')'deki momentumun, hem momentumun hem de enerjiye bağlı olduğunu göreceğiz.

$$\vec{p} = M(v) \vec{v}$$

$$M(v) = \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = M\gamma$$

"Durgun kütlesi M olan parçacık v'ye göre hareket ettiği zamanlı kütlesi"

$$\frac{v}{c} \rightarrow 1 \quad M(v)/M \rightarrow \infty$$



6

Görelî Enerji:

Görelî kinetik enerji nedir? $\frac{1}{2}mv^2$ ne olmalı?

K.E.: Üzerine W işi yapılarak başlangıçta duran parçacığın kazandığı enerji.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{M\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\vec{F} \text{, } x\text{-yönünde alın: } \Rightarrow W = \int \vec{F} dx = \int \frac{d}{dt} \left(\frac{Mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) dx$$

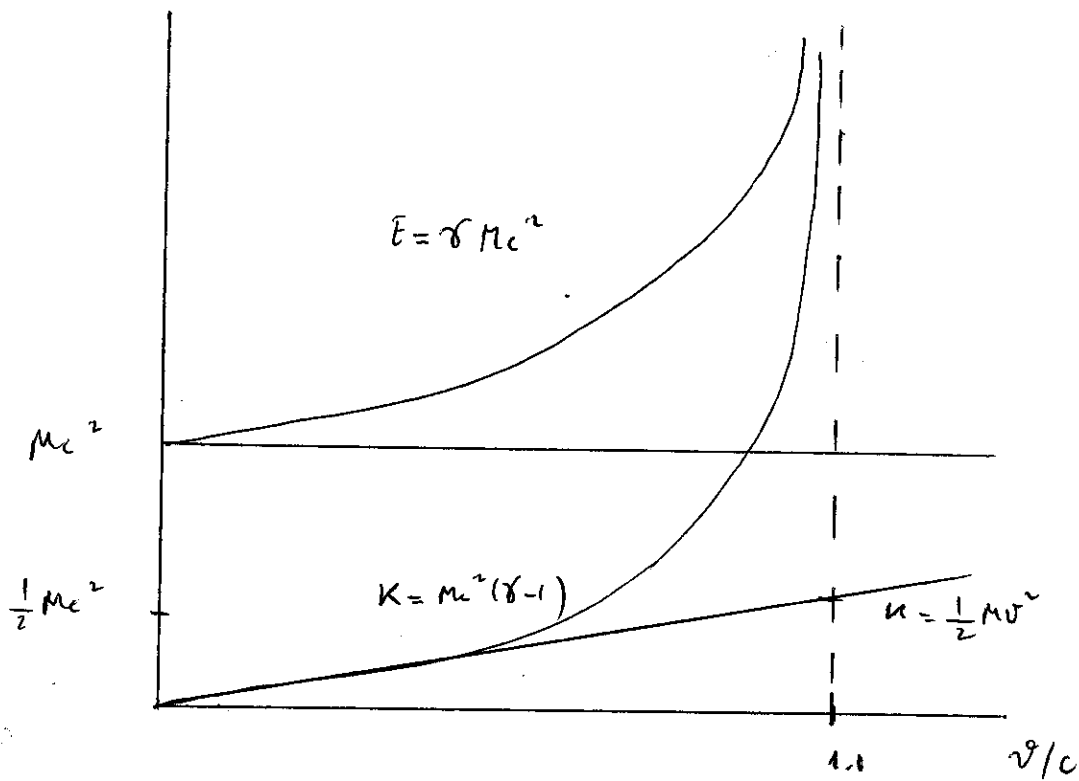
$$W = \int \frac{d}{dt} \left(\frac{Mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) \frac{dx}{dt} dt$$

$$= \int \left[\frac{Mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{dv}{dt} + \frac{Mv^3/c^2}{\sqrt{(1-v^2/c^2)^3}} \frac{dv}{dt} \right] dt$$

$$= \int \frac{Mv dv/dt}{\sqrt{(1-v^2/c^2)^3}} dt = \int \frac{d}{dt} \left(\frac{Mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) dt$$

$$W = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - Mc^2 = Mc^2(\gamma - 1) \quad \begin{matrix} \nearrow v \text{ üst limit} \\ \searrow 0 \text{ alt " } \end{matrix}$$

Bu K.E. $\rightarrow$ bu ifadenin enerjiel olarak uygun görün.



$v \ll c$ için E ve K hemen hemen eşdeğer. $E = \gamma Mc^2 \approx Mc^2 + \frac{1}{2} Mv^2$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots$$

$$\gamma - 1 = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow (v \ll c) \Rightarrow Mc^2(\gamma - 1) = Mc^2 \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2} Mv^2$$

$$p^2 = M^2 c^2 \beta^2 \gamma^2, \quad \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1$$

$\downarrow$
 $(\gamma^2 = \beta^2 \gamma^2 + 1) \quad / \quad M^2 c^4$ ile çarp.

$$M^2 c^4 \gamma^2 \pm M^2 c^4 \beta^2 \gamma^2 + M^2 c^4$$

$$M^2 c^4 (\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2) = M^2 c^4$$

$$M^2 c^4 \gamma^2 - p^2 c^2 = M^2 c^4$$

$$\boxed{E = \gamma Mc^2} \text{ toplam enerji.}$$

$$\boxed{E^2 - p^2 c^2 = M^2 c^4}$$

⑧

$E^2 - p^2 c^2 = M^2 c^4$ bir Lorentz değişmezi'dir.

$E \rightarrow E'$ ile dönüştürürsek $S \rightarrow S'$

$$E'^2 - p'^2 c^2 = E^2 - p^2 c^2 = M^2 c^4$$

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + M^2 c^4}$$

⑨

$pc \ll Mc^2$ olur ise $E = Mc^2 \sqrt{1 + \left(\frac{pc}{Mc^2}\right)^2}$

$$= Mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2 c^2}{M^2 c^4} + \dots\right)$$

$$= Mc^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{p^2}{M}\right) K$$

⑩

$pc \gg Mc^2 \Rightarrow E = pc$

$$E = Mc^2 + K$$

$$E = \gamma Mc^2$$

görelî kütle

Çarpışan parçacıklar için enerji korunumu

$$\sum_{i=1}^n E_i = \text{sbt}$$

Momentum korunumu

$$\sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \vec{sbt}$$

Momentum ve Enerjinin Dönüşümü:

$$p_x = m \frac{dx}{d\tau} \quad p_y = m \frac{dy}{d\tau} \quad p_z = m \frac{dz}{d\tau} \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\gamma}$$

$$\bar{E} = mc^2 \frac{dt}{d\tau}$$

- m ve c Lorentz Değişmezi olduklarından $(p_x, p_y, p_z, \bar{E}/c^2)$ tıpkı (x, y, z, t) gibi dönüşmelidir.

$$\begin{cases} p_x' = \gamma (p_x - \frac{\beta}{c} \bar{E}) & p_y' = p_y & p_z' = p_z \\ \bar{E}' = \gamma (\bar{E} - p_x c \beta) \end{cases}$$

$$\text{O} \beta \rightarrow -\beta \quad \begin{cases} p_x = \gamma (p_x' + \frac{\beta}{c} \bar{E}') & p_y = p_y' & p_z = p_z' \\ \bar{E} = \gamma (\bar{E}' + p_x' c \beta) \end{cases}$$

Örnek:

Esnek Olmayan Çarpışma: İki özdeş parçacığın çarpışarak birbirine yapıştığını ve bir üçüncü parçacık oluşturduklarını varsayalım.

K.M.'nin sabit kaldığı (S) gözlem çerçevesinde

$$\vec{V}_{km} = 0 = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$$

Bir başka (S') gözlem çerçevesinde

$$\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = \vec{p}'_3$$

$$\begin{aligned} p'_{x1} + p'_{x2} &= \gamma (p_{x1} + p_{x2}) - \frac{\gamma \beta}{c} (E_1 + E_2) \\ &= p'_{x3} = \gamma p_{x3} - \frac{\gamma \beta}{c} E_3 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} p_{x1} + p_{x2} &= 0 \\ p_{x3} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ olduğundan } \bar{E}_1 + \bar{E}_2 = E_3 \quad \text{Görelî enerji çarpışmada korunur.}$$

parçacıklar özdeş olduklarından $\bar{E}_1 = \bar{E}_2$ 'dir.

$$\underbrace{M_3 c^2}_{E_3} = \gamma 2mc^2 = \frac{2mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

v : 1 veya 2. parçacığın (S) 'deki başlangıç hızı

$$M_3 > 2M$$

⊕ İlk parçacıkların K.E 'leri bir parçacığın Kütle Enerjisine (Durgun Kütlesi ne eşittir).

En genel çarpışma hallerinin düşünülmesi sonunda momentumun ancak gelen tüm parçacıklara uygulanan

$$\sum_i \frac{m_i c^2}{(1 - v_i^2/c^2)^{1/2}} = \sum_i E_i$$

toplamı, giden tüm parçacıklara uygulanan aynı toplama eşit olduğu zaman korunduğu bulunmuştur. (Fotolar heric). Göreli çarpışmada momentum, göreli enerji korunmuşsa korur.

○ $M_3 > 2M$

$\beta \ll 1$ için bu artmaya gören kavramlar ile görülebilir.

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots$$

$$\Rightarrow M_3 \approx 2 \left(M + \frac{1}{2} M \frac{v^2}{c^2} \right) = 2 \left(M + \frac{K \cdot E}{c^2} \right)$$

○ $\Delta M = M_3 - 2M$

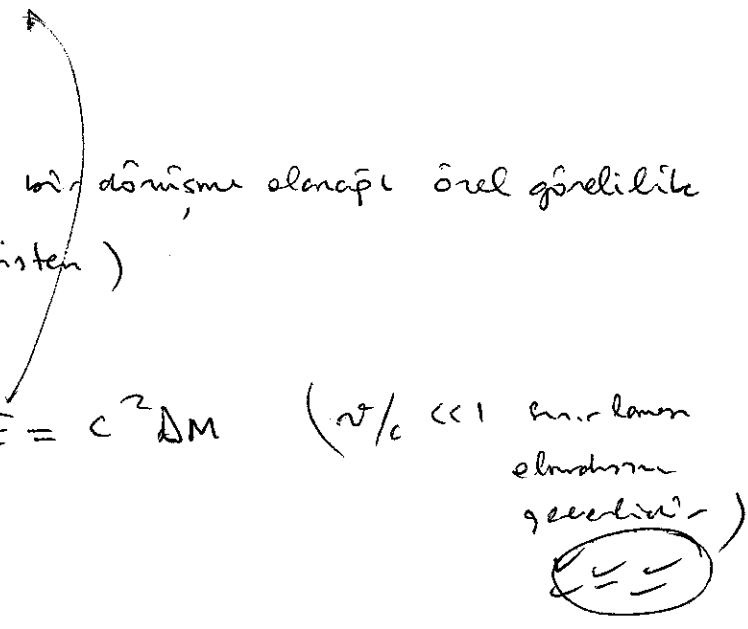
Kaybolan kinetik enerji = $c^2 \Delta M$

Kütle ve Enerjinin Eşdeğerliği:

Durgun kütle ile enerji arasındaki bir dönüşüm alanı özel görelilik teorisinin en önemli keşfi (Einstein)

$$\bar{E} = M(v) c^2$$

$$\Delta E = c^2 \Delta M$$

($v/c \ll 1$ için kinetik enerjinin göz ardı edilebilir)


Kütle enerjiye eşdeğer olduğundan E toplam göreceli enerjili bir sistemde buna karşı gelen $M = E/c^2$ eylemlilik kütlesi vardır.

④ Kütleli bir kutu ve içerisinde M kütleli N parçacık düşünelim. kutunun ivmelenmek istediğimiz zaman bir NM eylemlilik kütlesi gösterir. Kutu $\vec{v}$ hızıyla hareket ederse, momentumu $NM\vec{v}$ olur. Kutudaki parçacıkların herbirinin hızı $\vec{v}$ ve KE'si $\frac{1}{2}Mv^2$ olursa, kutunun eylemlilik kütlesi $N(M + Mv^2/c^2)$ ve momentum $N\vec{v}(M + Mv^2/c^2)$, ($v, v \ll c$)

Kütle - Enerji Dönüşümleri:

(1) 1gr'lık iki eşit kütle 10^5 cm/s hızla karşılaşıyor ve tek cisim olarak kalıyorsa bu bileşik parçacığın ek durgun kütlesi

$$\Delta M = \frac{\Delta E}{c^2} \approx 2 \left(\frac{1}{2} M \frac{v^2}{c^2} \right) \approx 1 \cdot 10^{-11} \text{ gr (durgunluk dışı)}$$

(2) H atomunun M_H durgun kütlesi elektronun ve protonun (m, m_p) durgun kütleleri toplamından büyükler.

$$M_H = 1.6736 \times 10^{-24} \text{ g}$$

$$E = 13.6 \text{ eV} = 2.2 \times 10^{-12} \text{ erg} \quad (e^- \text{ 'ın protona bağlanması enerjisi})$$

$$(M_p + m) - M_H = \frac{2.2 \times 10^{-12}}{c^2} \approx 2.4 \times 10^{-32} \text{ gr} \quad (M_H \text{ 'ın } 10^8 \text{ 'a sibi) ölçülemez.}$$

$$(3) \quad M_p + M_n = (1.67265 + 1.67496) \times 10^{-24} \\ = 3.34761 \times 10^{-24} \text{ gr}$$

$$M_{\text{Döteryum}} = 3.34365 \times 10^{-24} \quad \Delta M = 0.00396 \times 10^{-24} \text{ gr} = 3.56 \times 10^{-6} \text{ erg} = 2.23 \text{ MeV}$$

↑
Döteryum'un bağ enerjisi (bu da tersini bir döteryum döteryum proton'a ayrışarak iki parçaya enerji)

Momentumun Değişme Oranının Dönüşümü:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d}{dt} \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \neq \frac{d\vec{p}'}{dt'}$$

○ m kütle sinin ani olarak durgun oldu ğ un gerçe ve (S') , (S) 'ye göre $v\hat{x}$.

$$\Delta p_y = \Delta p_y' \quad \Delta p_z = \Delta p_z'$$

$$\Delta t' = \Delta \tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t$$

$$\frac{\Delta p_y}{\Delta t} = \frac{\Delta p_y'}{\Delta t'} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta p_y'}{\Delta t'}$$

○ $F_y = \frac{\Delta p_y}{\Delta t} \quad F_y' = \frac{\Delta p_y'}{\Delta t'}$

$$\Rightarrow F_y = \frac{1}{\gamma} F_y' \quad F_z = \frac{1}{\gamma} F_z'$$

$$p_x = \gamma \left(p_x' + \frac{v E'}{c^2} \right)$$

$$\Delta p_x = \gamma \Delta p_x' + \gamma v \frac{\Delta E'}{c^2} \quad \Delta E' \text{ 'ni } \Delta p_x' \text{ cinniden yaramak istiyorum.}$$

$$E' = (M^2 c^4 + c^2 p'^2)^{1/2} \Rightarrow \Delta E' = \frac{c^2 \Delta p'}{\sqrt{M^2 c^4 + c^2 p'^2}}$$

14

p_x', p_y', p_z' after.

$$\therefore \Delta \bar{t}' = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{\cancel{\gamma} \Delta p_x'}{\Delta t'} \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{\cancel{\gamma} \Delta p_x'}{\Delta t'} \frac{1}{\cancel{\gamma}} = \frac{\Delta p_x'}{\Delta t'}$$

$$F_x = F_x'$$