BÖLÜM _ 13

GÖRELİ DİNAMİK PROBLEMLERİ

YÜKLÜ BİR PARÇACIĞIN SABİT BOYUNA ELEKTRİK ALANDA İVMELENMESİ

q yüklü M durgun kütleli bir parçacığın düzgün sabit bir $\mathcal{E}\hat{x}$ elektrik alanındaki hareket denklemi

$$\dot{p}\,\hat{x} = q\,\mathcal{E}\,\hat{x}$$

$p = M\vec{v}/(1-v^2/c^2)^{1/2}$ olarak durgun halden ivmelenmenin x_doğrultusunda başlamış olması gereği $v_y = v_z = 0$ alınarak

$$M\frac{d}{dt}\frac{v}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} = q\,\mathcal{E}$$

$$p = M\frac{v}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} = q\,\mathcal{E}\,t \qquad (v(0)=0)$$

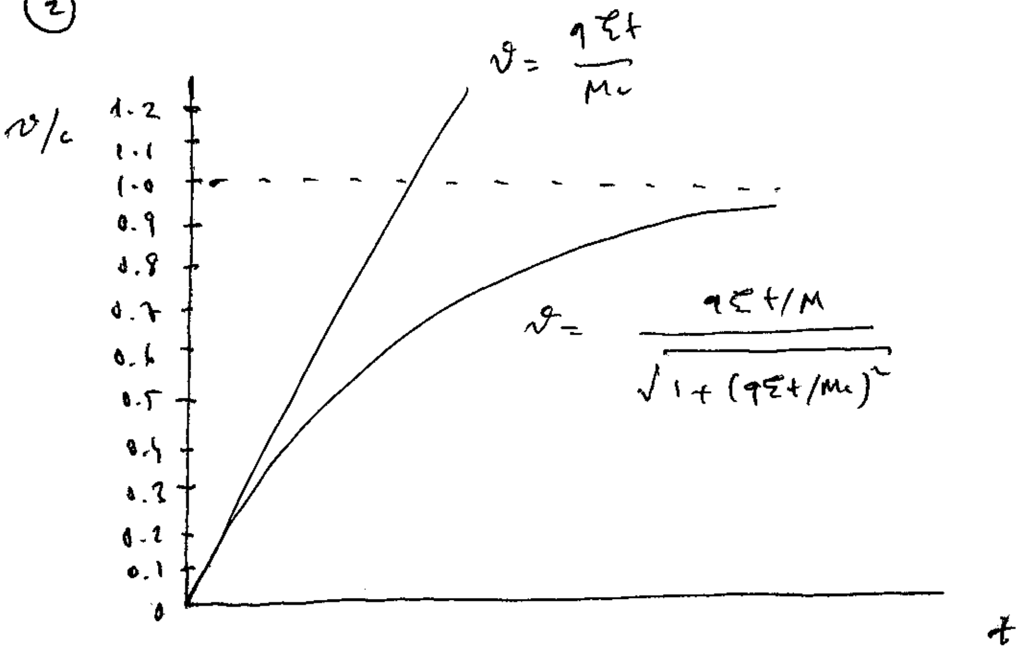
$$M^2 v^2 = (q\mathcal{E}t)^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow\ v^2 = \frac{(q\mathcal{E}t/Mc)^2}{1+(q\mathcal{E}t/Mc)^2}\,c^2 \quad \leftarrow v^2\left(1-\left(\frac{q\mathcal{E}t}{Mc}\right)^2\right) = \left(\frac{q\mathcal{E}t}{M}\right)^2$$

$$(v/c) = \frac{q\mathcal{E}t/Mc}{\sqrt{1+(q\mathcal{E}t/Mc)^2}}$$

BS K

(2)



(#) $t < \frac{Mc}{q\mathcal{E}}$ kısa süreler için $\vartheta^2 = (q\mathcal{E}t/Mc)^2 c^2 = \frac{p^2}{M^2}$

$\mathcal{E} = 1$ statvolt/cm bir elektron için $\frac{mc}{e\mathcal{E}} \cong \frac{(10^{-27})(3.10^{10})}{5.10^{-6}} \approx 10^{-7}$ sn

(#) $t \gg \frac{Mc}{q\mathcal{E}}$ uzun zamanlar için

$$\vartheta^2 = \frac{(q\mathcal{E}t/Mc)^2}{1+(q\mathcal{E}t/Mc)^2} c^2 = \frac{(q\mathcal{E}t/\cancel{Mc})^2}{(q\mathcal{E}t/\cancel{Mc})^2\left(1+\left(\frac{Mc}{q\mathcal{E}t}\right)^2\right)} c^2$$

$$= \frac{c^2}{\left(1+\left(\frac{Mc}{q\mathcal{E}t}\right)^2\right)} \cong \Big[1 - \underbrace{\left(\frac{Mc}{q\mathcal{E}t}\right)^2}_{\text{küçük}}\Big] c^2$$

$$\approx c^2$$

$\boxed{\vartheta \simeq c}$ limitte c'ye yaklaşır

$$v^2 \approx \left[1 - \left(\frac{Mc}{q\mathcal{E}t}\right)^2\right] c^2$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{Mc}{q\mathcal{E}t}\right)^2 \Rightarrow 1-\beta^2 = \left(\frac{Mc}{q\mathcal{E}t}\right)^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cong \left(\frac{q\mathcal{E}t}{Mc}\right) = \gamma$$

\# $t \gg \left(\dfrac{Mc}{q\mathcal{E}}\right)$ zaman limitinde E toplam enerjisi,

$$E = \gamma Mc^2 \cong q\mathcal{E}ct$$

\# limit durumunda elde edilecek sonuç c hızı ile t süresince alınan yolun kuvvetle çarpımı. Aynı limitte mom.

$$p \simeq q\mathcal{E}t = \frac{E}{c}$$

Sonuç: limit hıza ulaşınca momentum ve enerji artmaya devam edebilir. ve enerji p^2 ile değil p ile orantılı.

\# x'yer değiştirmesini bulalım.

$$dx = \frac{(q\mathcal{E}/Mc)t}{\sqrt{1+(q\mathcal{E}t/Mc)^2}}\, c\,dt$$

0 ile t arasında integre edelim.

BS K

(4)

$$x = \int_0^t \frac{(q\mathcal{E}t'/mc)}{\sqrt{1+(q\mathcal{E}t'/mc)^2}}\, c\,dt' \qquad \frac{q\mathcal{E}t'}{mc} = \alpha$$

$$dt' = \left(\frac{mc}{q\mathcal{E}}\right) d\alpha$$

$$= \frac{mc^2}{q\mathcal{E}} \int_0^{q\mathcal{E}t/mc} \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\, d\alpha$$

$$1+\alpha^2 = z$$

$$2\alpha\, d\alpha = dz$$

$$= \frac{mc^2}{q\mathcal{E}} \int_0^{1+(q\mathcal{E}t/mc)^2} \frac{dz/2}{\sqrt{z}}$$

$$= \frac{mc^2}{2q\mathcal{E}} \int_0^{1+(q\mathcal{E}t/mc)^2} z^{-1/2}\, dz$$

$$= \frac{mc^2}{q\mathcal{E}} \left[\sqrt{1+\left(\frac{q\mathcal{E}t}{mc}\right)^2} - 1 \right]$$

$x(0) = 0 \quad v = 0$ alındı.

(#) $q\mathcal{E}t/mc \gg 1 \Rightarrow x \simeq ct$ göreli

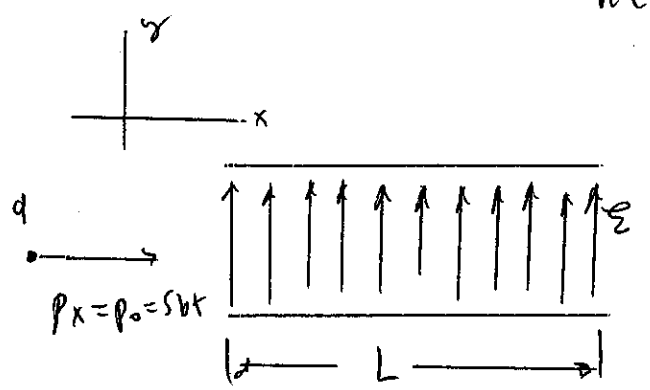
$q\mathcal{E}t/mc \ll 1 \Rightarrow x \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{q\mathcal{E}}{m}\right)t^2$ göreliz.

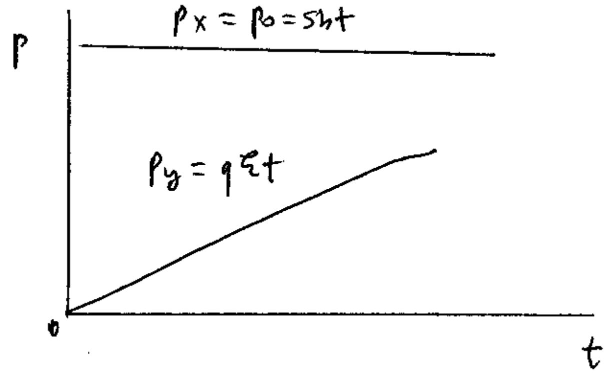
BS K

ENINE BİR ELEKTRİK ALANDA İVMELENME

Büyük bir p_0 mom.'u ile x boyunca hareket eden ve bu hızla enine bir $\mathcal{E}\hat{y}$ elektrik alanına (L uzunluğunda bir bölge) giren bir parçacık alalım. Parçacığın, elektrik alanı yüzünden ne kadarlık açı ile saptığını bulalım:

$$\frac{dp_x}{dt} = 0 \quad ; \quad \frac{dp_y}{dt} = q\mathcal{E}$$





$p_x = p_0 \qquad p_y = q\mathcal{E}t \qquad \vec{v}$'sini bulmak istiyoruz.

$$E^2 = M^2c^4 + p^2c^2 = M^2c^4 + p_0^2c^2 + (q\mathcal{E}tc)^2$$

$$= E_0^2 + (q\mathcal{E}tc)^2$$

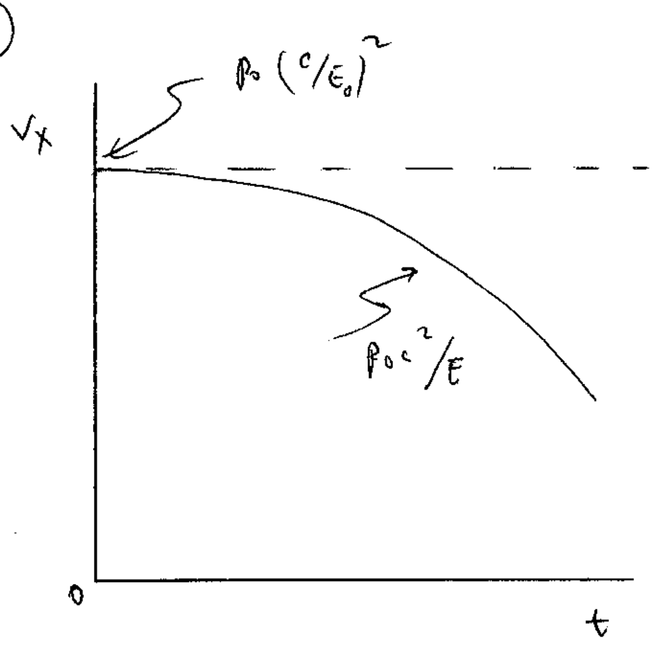
$$\vec{v} = \vec{p}\,\frac{c^2}{E} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \dfrac{p_0 c^2}{[E_0^2 + (q\mathcal{E}tc)^2]^{1/2}} \\ \\ v_y = \dfrac{q\mathcal{E}tc^2}{[E_0^2 + (q\mathcal{E}tc)^2]^{1/2}} \end{cases}$$

t büyüdükçe küçülüyor

bkz şekil $\longrightarrow$

görüyoruz $\dfrac{q\mathcal{E}t}{M}$'den daha küçük.

6



Bir t anında yörüngenin x ekseni ile yaptığı açı θ

$$tg\,\theta(t) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{q\mathcal{E}t\cancel{c}}{p_0 \cancel{c^2}} = \frac{q\mathcal{E}}{p_0} t$$

L uzunluğunu geçmek için t_L süresi

$$\int_0^L dx = p_0 c^2 \int_0^{t_L} \frac{dt}{[E_0^2 + (q\mathcal{E}tc)^2]^{1/2}}$$

$$= \frac{p_0 c^2}{q\mathcal{E}c} \int_0^{t_L} \frac{dt}{\left[t^2 + \left(\frac{E_0}{q\mathcal{E}c}\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{p_0 c}{q\mathcal{E}} \int_0^{t_L} \frac{dt}{[a^2 + t^2]^{1/2}} = \frac{p_0 c}{q\mathcal{E}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$= \frac{p_0 c}{q\mathcal{E}} \left[\operatorname{arcsinh}\left(\frac{q\mathcal{E}c}{E_0} t_L\right) - 0\right]$$

$$\boxed{L = \frac{p_0 c}{q\mathcal{E}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{q\mathcal{E}c}{E_0} t_L\right)}$$

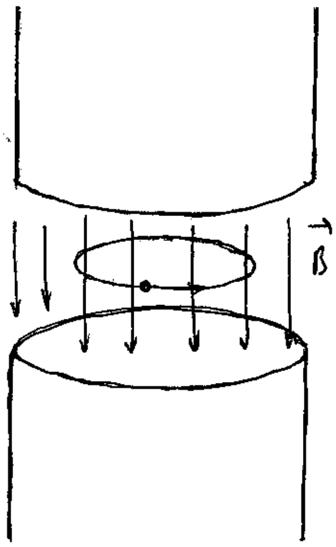
$$\frac{q\mathcal{E}L}{p_0 c} = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{q\mathcal{E}c}{E_0} t_L\right)$$

$$\boxed{t_L = \frac{E_0}{q\mathcal{E}c} \sinh\left(\frac{q\mathcal{E}L}{p_0 c}\right)}$$

BS K

MAGNETİK ALANDA YÜKLÜ PARÇACIK

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{q}{c}\,\vec{v} \times \vec{B}$$



$$\frac{dp^2}{dt} = 2\vec{p}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt} = 2\,\frac{q}{c}\,\vec{p}\cdot(\vec{v}\times\vec{B}) = 0$$

$\left(\vec{p} \nearrow\nearrow \vec{v}\right.$ olduğundan$\left.\right)$

parçacığın mom.'unun büyüklüğü ve bunun sonucu olarak da hızının büyüklüğü sabit bir magnetik alanda değişmez. Alan tarafından yönü değişir.

$\vec{p}$'nin tanımına giren $M/\sqrt{1-v^2/c^2}$ katsayı sabit

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{M}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{c}\,\vec{v}\times\vec{B}$$

$\vec{B}$'ye dik düzlemde çembersel hareket. (Bkz 3. 76-81)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dv}{dt} = \omega_c^2\,\underbrace{\varrho}_{\text{yörünge yarıçapı}} \\[2ex] v = \omega_c\,\varrho \end{array}\right\}\ \text{yazılır} \Rightarrow \frac{M}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\omega_c^2\,\varrho = \frac{q}{c}\,\omega_c\,\varrho\, B$$

$$\boxed{\omega_c = \frac{qB\left(1-v^2/c^2\right)^{1/2}}{Mc}}$$

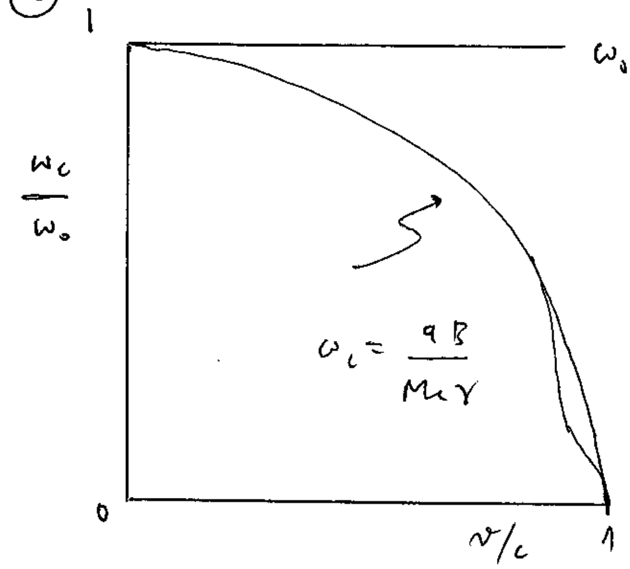
Hızlı parçacıklar için hareketin frekansının yavaş parçacıklarınkinden daha düşük.

$$\boxed{\omega_c = \frac{qB}{Mc}\,\frac{1}{\gamma}}$$

Göresiz parçacıklar için bu sapmalılık yok.

BS K

(8)



$\omega_0 = \frac{qB}{M_c}$

$\omega_c = \omega_0 \frac{1}{\gamma}$ yüksek enerji hızlandırıcılarında ispatlanmış.

Sinkrotronla ivmelendirilen elektronlar için

$1/\sqrt{1-\beta^2} \cong 12.000$ yani parçacığın görünürdeki kütlesi durgun kütlesinin 12.000 katı artmış.

$$(1-\beta^2) = (1+\beta)(1-\beta)$$

$$\cong 2(1-\beta) \approx (12000)^{-2} \approx 7.0\times 10^{-9}$$

$$1-\beta = \frac{c-v}{c} \approx 3.5\times 10^{-9} \qquad c-v = 100\ \text{cm/s}$$

(4) Rusya, Serpukhov'daki proton hızlandırıcısında protonlar magnetik alana 100 MeV enerji ile girerler ve 80.000 MeV'e ivmelendirilirler.

Bu da β'nın 0.43 den $1-6.8\times 10^{-5}$'e değişmesine karşı gelir.

(5) Bu göreli parçacığın B alanındaki yörünge yarıçapı,

$$\rho = \frac{v}{\omega_c} = \frac{M_c v}{qB}\gamma$$

$$B\rho = \frac{cp}{q}$$

$$(NBS) \quad \boxed{B\rho = \frac{p}{q}}$$

BS K

KÜTLE MERKEZİ SİSTEMİ ve EŞİK ENERJİSİ

Enerjinin korunumu, çekirdek tepkimelerinde ve iki parçacığın çarpışmasında ortaya çıkacak olaylara genel bir sınırlama koyar. Örneğin yüksek enerjili bir foton

Şu,

$$\gamma \longrightarrow e^- + e^+$$

tepkimesi $E_\gamma > m_{e^-}c^2 + m_{e^+}c^2$ ise yapabilir. Bu durumda tek başına enerjinin korunumu e^-e^+ çifti için enerjinin

$$E_\gamma = 2m_e c^2$$

olmasını gerektirir. Serbest uzayda böyle bir tepkileşme hiçbir enerjide olanaklı değildir. Çünkü momentum korunmuyor.

Fotonun mom: $p_\gamma = E_\gamma / c$

Bu tepkileşmeyi e^-e^+ çiftinin durgun kaldığı gözlem çerçevesinden inceleyelim. Bu çerçevede

$$p_{e^-} + p_{e^+} = 0$$

Fakat bu çerçevede gelen fotonun mom.'u sıfır değildir. Çünkü bir fotonun mom.'unu sıfır yapacak bir gözlem çerçevesi yoktur. K.M. çerçevesinde

$$\vec{p}_\gamma \neq \vec{p}_{e^-} + \vec{p}_{e^+}$$

BS K

10

ÖRNEK

Hareketli Bir Parçacıktan Elde Edilebilir Enerji:

Hareketli bir protonun, durgun bir protonla çarpışmasından alınabilecek enerji ne kadardır?

1°) Gelen protonun enerjisi M_pc^2'den küçük olsun (göreli)

lab.'daki hızı $\vec{v}$ ise

$$K_{lab} = \frac{1}{2}M_p v^2$$

K.M.'de protonlardan birinin hızı $\frac{1}{2}\vec{v}$ diğerininki $-\frac{1}{2}\vec{v}$'dır.

K.M. gözlem çerçevesinde tüm K.E daha başka parçacıkların üretilmesinde kullanılabilir.

$$K.E_{km} = \frac{1}{2}M_p\left(\frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{1}{2}M_p\left(\frac{1}{2}v\right)^2 = \frac{1}{4}M_p v^2$$

$$\frac{KE_{km}}{KE_{lab}} = \frac{1}{2}$$

lab. daki enerjinin yarısı kullanılabilir.

2°) Göreli bölgede verim daha düşüktür.

$$\underbrace{(E_1+E_2)^2 - (\vec{p}_1+\vec{p}_2)^2c^2}_{lab.} = \underbrace{(E_1+E_2)^2 - \cancel{(\vec{p}_1+\vec{p}_2)^2}c^2}_{km}$$

$$(\vec{p}_1+\vec{p}_2)_{km} = 0$$

$$E_{2,lab} = M_pc^2 \qquad P_{2,lab} = 0$$

BS K

$$\hat{E}_{1,lab}^2 - P_{1,lab}^2 c^2 = M_p^2 c^4$$

$$\Rightarrow \quad 2E_{1,lab} M_p c^2 + 2M_p^2 c^4 = \underbrace{E_{top,KM}^2}_{(\hat{E}_1+\hat{E}_2)}$$

$$2E_{top,lab} M_p c^2 = E_{top,km}^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{E_{top,KM}}{E_{top,lab}} = \frac{2M_p c^2}{E_{top,km}}$$

○ $M_p c^2 \cong 1$ Bev olduğunda K.M 'de 20 Bev lik verim alabilmek için

$$E_{top,lab} = \frac{E_{top,km}^2}{2M_p c^2} \approx \frac{400}{2} = 200 \text{ Bev}$$ 'lik enerji gereklidir.

200 Bev 'lik bir protonun K.E 'nin 20 Bev 'lik kısmı yeni parçacıklar üretmek için kullanılabilir.

<u>Antiproton Eşiği :</u>

○
$$p + p \longrightarrow p + p + (p + \bar{p}^{(-e)})$$ (proton - antiproton çifti oluşur)

tepkileşmenin eşik enerjisi ne kadardır?

(*) proton-antiproton çiftinin durgun kütle enerjisi $2M_p c^2$.
["Şu halde K.M. 'de K.E en az bu kadar olmalı"
$M_p c^2$: iki başlangıç protonun her birinin K.E.]

Bu enerjiye başlangıç protonlarının herbirinin $M_p c^2$ durgun enerjilerini de eklemek gerekir. K.M. 'deki minimum enerji

$$E_{top,km} = 4M_p c^2$$

BS K

Lab.'da buna karşı gelen enerji

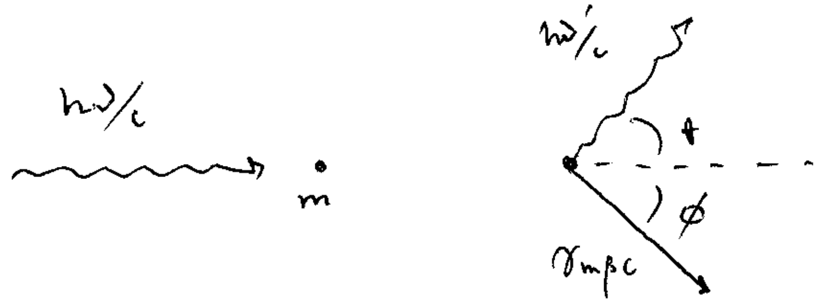
$$E_{top,lab} = \frac{E^2_{top,km}}{2M_pc^2} = \frac{16}{2}M_pc^2 \rightarrow \begin{cases} 2M_pc^2 & \text{iki protonun durgun kütle enerji.} \\ 6M_pc^2 & \text{KE.} \end{cases}$$

Eşik Enerjisi

$$6M_pc^2 = 6.(0.938\ \text{BeV}) \simeq 5.63\ \text{BeV}$$

(7) Hedef proton bağlı olduğunda bu enerji 4.4 BeV'dir.

Compton Olayı:



Boyuna momentum: $\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cos\theta + \gamma m\beta c\cos\phi$

Enine " : $\frac{h\nu'}{c}\sin\theta = \gamma m\beta c\sin\phi$

Enerji : $mc^2 + h\nu = h\nu' + \gamma mc^2$

(β, ϕ) yok ederek $\nu' = \nu'(\theta)$ bulalım.

$\frac{h\nu}{mc^2} = \alpha \qquad \frac{h\nu'}{mc^2} = \alpha'$ olsun.

$$\alpha = \alpha'\cos\theta + \gamma\beta\cos\phi$$

$$\alpha'\sin\theta = \gamma\beta\sin\phi$$

BS K

$$\alpha = \alpha'\cos\theta + \gamma\beta\cos\phi \qquad \alpha'\sin\theta = \gamma\beta\sin\phi$$

$$mc^2 + h\nu = h\nu' + \gamma mc^2 \Rightarrow 1 + \alpha = \alpha' + \gamma \Rightarrow \gamma = 1 + \alpha - \alpha'$$

$$(\alpha - \alpha'\cos\theta)^2 = \gamma^2\beta^2\cos^2\phi \qquad \gamma^2\beta^2 = \gamma^2 - 1$$

$$= \gamma^2\beta^2 - \gamma^2\beta^2\sin^2\phi \qquad \alpha = \frac{h\nu}{mc^2}$$

$$= \gamma^2\beta^2 - \alpha'^2\sin^2\theta$$

$$= \gamma^2 - 1 - \alpha'^2\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \alpha'^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - 2\alpha\alpha'\cos\theta = \gamma^2 - 1$$

$$\alpha^2 + \alpha'^2 - 2\alpha\alpha'\cos\theta = \cancel{1} + (\alpha - \alpha')^2 + 2(\alpha - \alpha') - \cancel{1}$$

$$\cancel{(\alpha - \alpha')^2} + 2\alpha\alpha'(1 - \cos\theta) = \cancel{(\alpha - \alpha')^2} + 2(\alpha - \alpha')$$

$$\Rightarrow \alpha - \alpha' = \alpha\alpha'(1 - \cos\theta)$$

$$\nu - \nu' = \frac{h\nu\nu'}{mc^2}(1 - \cos\theta)$$

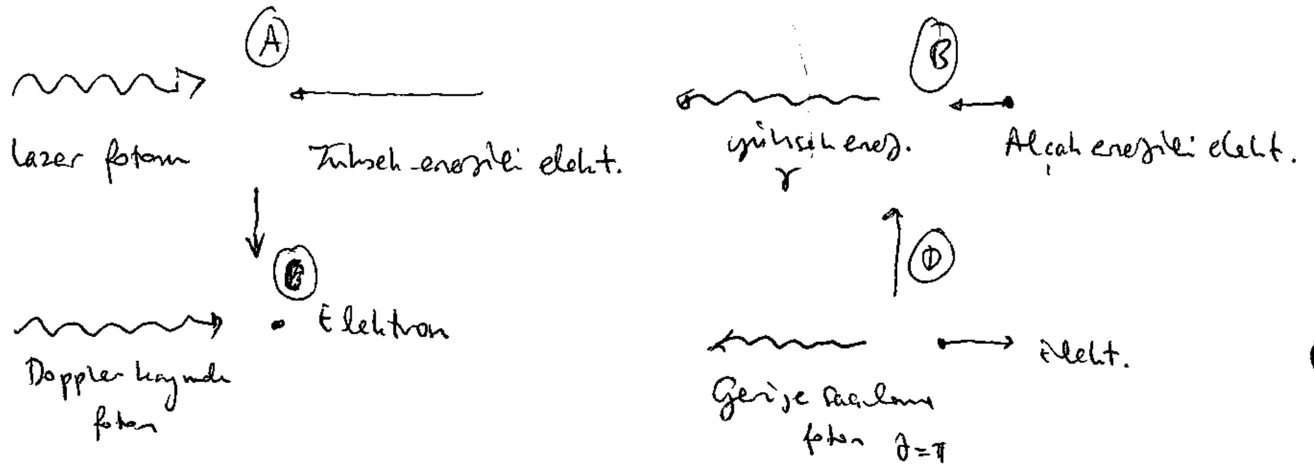
$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{mc^2}(1 - \cos\theta)$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

BS K

Ters Compton Olayı: yüksek enerjili γ üretiminde kullanılır.

γ-ışının enerjisini hesaplamak için elektronun durgun olduğu çerçeveye dönüşüm yaparız.



Doppler kaymış lazer fotonu: $h\nu_c = h\nu\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$

$$\lambda_c = \lambda\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \qquad \left(\beta \approx \frac{v}{c}\ (\simeq 1)\ \text{elektron}\right)$$

Geriye saçılmış foton için

$$\lambda' - \lambda_c = \frac{h}{mc}(1-\cos\pi) = \frac{2h}{mc}$$

$$\beta \simeq 1 \Rightarrow \quad \lambda_c \ll \frac{h}{mc}$$

$$\Rightarrow \lambda' \simeq \frac{2h}{mc}$$

Şimdi tekrar Lab. sistemine döneriz ve λ' yine Doppler kaymasına uğrayacaktır.

$$\lambda_{lab} \simeq \lambda'\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \simeq \frac{2h}{mc}\,\frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{2}}$$

Elektronun ilk enerjisi $E_{lab} \simeq \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq \frac{mc^2}{\sqrt{2}\sqrt{1-\beta}} \Rightarrow$

$$\lambda_{lab} \approx \frac{\cancel{2}h}{mc} \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} \frac{mc^2}{\cancel{\sqrt{2}}\, \hat{E}_{lab}} \approx \frac{h}{mc} \frac{mc^2}{\hat{E}_{lab}}$$

$$\frac{c}{\lambda_{lab}} \approx \frac{mc^2}{h} \frac{\hat{E}_{lab}}{mc^2} \approx \nu_{lab}$$

$$h\nu_{lab} \approx \hat{E}_{lab}$$ (K.E'nin hemen hemen tümü foton)

BS K

[redacted]

GÖRELİ DİNAMİK PROBLEMLERİ

13.1.) ~~Magnetik Alanda Proton~~: Toplam Göreli Enerjisi 30 BeV olan bir protonun 15000 G'luk magnetik alandaki jiroskop yarıçapını ve jiroskop frekansını açıklayınız. (hesaplayınız).

Çözüm : Magnetik Alanda Yüklü Parçacık : $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{q}{c}\,\vec{v}\times\vec{B}$

$$\frac{d}{dt}\vec{p}^{\,2} = 0 \iff \frac{d}{dt}\vec{p}^{\,2} = 2\vec{p}\,\frac{d}{dt}\vec{p} = 2\,\frac{q}{c}\,\vec{p}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) \qquad \vec{v}\times\vec{B} \perp \vec{p}$$

$$= 0$$

"Dolayısı ile bir parçacığın momentumunun büyüklüğü, dolayısı ile hızının büyüklüğü manyetik alan ile değiştirilemez. Alan tarafından sadece yönü değiştirilir." $\vec{p}$'nin tanımına göre $M/(1-v^2/c^2)^{1/2}$ katsayını sabittir.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{M}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\substack{\text{ivme} \\ \omega_c^2\rho}} = \frac{q}{c}\underbrace{\vec{v}\times\vec{B}}_{\omega_c\rho}$$

"Parçacık $\vec{B}$'ye dik bir düzlem içinde çembersel yörüngede hareket eder".

$$\frac{M}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}\,\omega_c^2\rho = \frac{q}{c}\,\omega_c\rho B \Rightarrow \omega_c = \frac{qB\,(1-v^2/c^2)^{1/2}}{Mc} = \frac{qBc\,(1-v^2/c^2)^{1/2}}{Mc^2}$$

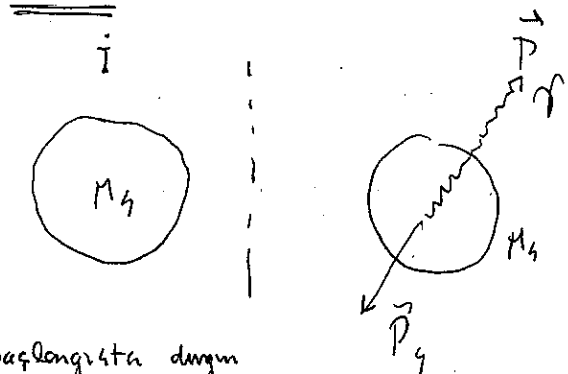
$1/E$

$$E = \gamma Mc^2 = 30\text{ BeV} = 30.10^9\text{ eV} = 48\times10^{-3}\text{ erg}$$

$$\Rightarrow \omega_c = \frac{4.8\times10^{-10}\times1.5.10^4\times3.10^{10}}{48\times10^{-3}} = 4{,}5.10^1\text{ rad/s}$$

13.2.) ~~Çekirdekte Geri Tepme~~ : 10^{-23} g kütleli bir çekirdeğin 1 MeV'lik bir γ ışıması sonundaki geri tepme enerjisi erg cinsinden ve elektron volt cinsinden ne kadardır? (Bkz Böl 12.)

Çözüm:



"Başlangıçta durgun olsun"

$$\vec{P}_T = \vec{0} = \vec{P}_ç + \vec{P}_\gamma$$

$$\Rightarrow \vec{P}_ç = -\vec{P}_\gamma$$

$$\Rightarrow P_ç = P_\gamma \Rightarrow M v_ç = \frac{h\nu}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{h\nu}{Mc^2} \simeq \frac{1.6\times10^{-6}}{10^{-23}\cdot 9\times10^{20}} = 2.10^{-4}$$ non-relativistik

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{M^2v^2}{2M} = \frac{P_ç^2}{2M} = \frac{(h\nu)^2}{2Mc^2} = \frac{(1.6\times10^{-6})^2}{2.10^{-23}\times 9.10^{20}} = 1.42\times10^{-10}\ \text{erg}$$

$$= \frac{1.42\times10^{-10}}{1.6\times10^{-12}} = 89\ \text{eV}$$

BS K

13.3.) **Elektron - Proton Çarpışması** : 10 BeV enerjili bir elektron durgun bir proton ile çarpışıyor. (a) K.M sisteminin hızı ne kadardır? (b) Yeni parçacıklar üretmek için kullanılabilir enerji ne kadardır? ($M_p c^2$ cinsinden.)

Çözüm :

(a)

$E = 10$ BeV enerjili bir elektronun momentumu : $cP_{el.} = \sqrt{E^2 - (\underbrace{M_e c^2}_{0.5\,MeV})^2} \simeq E$

$\therefore \quad P_{el} = 10 \text{ BeV}/c$.

$\vec{P}_{pr} = 0$ olan Lab. sisteminden $\vec{\beta}$ hızlı koordinat sistemine dönüşüm yaparız. Bu sistemde $P'_{el} = P'_{pr}$.

$$P'_{el} = \cancel{\gamma}\left(p - \beta\frac{E}{c}\right) = \cancel{\gamma} M_p \beta c \Rightarrow \beta\left(Mc + \frac{E}{c}\right) = p \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{P_{el}}{\frac{E}{c} + Mc}} = \frac{10}{10 + 0.938} = 0.914$$

$$v_{KM} = 0.914\,c = 2.74 \times 10^{10}\ cm/s$$

(b) Tüm Kinetik Enerji yeni parçacıklar için kullanılabilir olduğundan ve proton ile elektronun da kaldığını varsayalım:

$$E'_{el} + E'_{pr} - (M_p c^2 + \cancel{M_e c^2}) = \text{Kullanılabilir enerji}$$

$$E'_{el} = \gamma(E - \beta pc) = 2.46.\,(10 - 0.914 . 10) = 2.12 \text{ BeV}$$

$$E'_{pr} = \gamma M_p c^2 = 2.46 \times 0.938 = 2.31 \text{ BeV}$$

$$2.12 + 2.31 - 0.94 = 3.49 \text{ BeV} = \frac{3.49}{0.94} M_p c^2 = 3.71\, M_p c^2$$

BS K

13.5.) **Göreli ve Göresiz Siklotron Frekansları:** Berkeley'deki 184 inç'lik (467.5 cm) siklotron yaklaşık olarak 23.000 G'luk sabit bir magnetik alan ile çalışır. (a) Bu alandaki protonlar için göresiz siklotron frekansını hesaplayınız. (b) 720 MeV'luk sonuç kinetik enerjiye uygun frekansı hesaplayınız.

Çözüm:

(a) $$\omega_c = \frac{qB}{Mc} = \frac{4.8\cdot 10^{-10} \times 2.3\times 10^{4}}{1.67\times 10^{-24} \times 3\cdot 10^{10}} = 2.20\times 10^{8}\ \text{rad/s}$$

(b)
$$\omega_c = \frac{qBc}{E} \qquad E = Mc^2 + K.E = 720 + 938 = 1658\ \text{MeV} = 2.65\times 10^{-3}\ \text{erg}$$

$$\omega_c = \frac{4.8\times 10^{-10} \times 2.3\times 10^{4} \times 3\cdot 10^{10}}{2.65\times 10^{-3}} = 1.25 \times 10^{8}\ \text{rad/s}$$

13.4.) ~~[illegible] Frekansı~~ Siklotron frekansı, yüksek enerjilerde hızlandırılan parçacığın süratine bağlıdır. Dönen parçacıkla, titreşen dalgalı elektrik alanı (parçacığın hızlandırmak için) arasındaki zamandaşlığı koruyabilmek için uygulanan radyo frekansı (RF) veya manyetik alanının (veya her ikisinin) ivmelenme ilerledikçe ayarlanması gerekir. ω'nın B/E ile orantılı olduğunu gösteriniz. Burada ω radyo frekansı B manyetik alan E de parçacığın toplam enerjisidir.

Çözüm:

$$\omega_c = \frac{qB\sqrt{1-v^2/c^2}}{Mc}, \quad E = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = K.E + Mc^2$$

$$\omega_c = \frac{qBc\sqrt{1-v^2/c^2}}{Mc^2} = \frac{qBc}{E} \checkmark \qquad K.E \lll Mc^2$$

$$\Rightarrow E \simeq Mc^2 \Rightarrow \omega_c = \frac{qB}{Mc}$$ non relativistik.

BS K

13.7.) ~~Yüksek Enerjili Proton~~: $\beta = v/c = 0.99$ hızla bir protonun ($M_p c^2 = 0.94$ Bev) momentumunu, toplam enerjisini ve kinetik enerjisini aşağıdaki durumlar için hesaplayınız. (a) Laboratuvar çerçevesinde (b) Parçacıkla birlikte giden çerçevede (c) Proton ve durgun bir He çekirdeğinin K.M'ne göre kararlı olan bir sistemde ($M_{He} = 4M_p$.) (d) Protonun ve durgun bir protonun kütle merkezi sisteminde.

Çözüm:

(a) $$p = \gamma M \beta c = \frac{Mc^2 \beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{1}{c} = \frac{0.938 \times 0.99}{\sqrt{1-(0.99)^2}} \frac{1}{c} = 6.58 \text{ Bev}/c$$

$$E = \gamma M c^2 = \frac{0.938}{\sqrt{1-(0.99)^2}} = 6.65 \text{ Bev}$$

$$K.E = E - Mc^2 = 6.65 - 0.94 = 5.71 \text{ Bev}$$

(b) Proton ile birlikte hareket eden bir çerçevede;

$$\vec{p} = 0, \quad K.E = 0, \quad E = M_p c^2 = 0.938 \text{ Bev}$$

(c) proton ve He çekirdeğine göre kararlı bir çerçevede, proton ve He çekirdeklerinin momentumları eşit ve zıt'dır. Bu çerçevenin hızı Lab çerçevesine göre β' olsun.

$$p' = \cancel{\gamma}\left(p - \beta' \frac{E}{c}\right) = \frac{M_{He} \beta' c}{\sqrt{1-\beta'^2}} = \cancel{\gamma}\, 4M_p \beta' c$$

$$\Rightarrow \beta'\left(4M_p c + \frac{E}{c}\right) = p \Rightarrow \beta' = \frac{p}{4M_p c + \frac{E}{c}} = \frac{6.58}{4 \times 0.938 + 6.65}\, c$$

$$\boxed{\beta' = 0.633} \quad \boxed{\gamma' = (1-\beta'^2)^{-1/2} = 1,29.}$$

$$\Rightarrow p' = 1.29\left(6.58 - \frac{0.633 \times 6.65}{c}\right) = 3.06 \text{ Bev}/c$$

$$E' = \gamma'(E - p\beta' c) = 1.29\,(6.65 - 0.633 \times 6.58 c) = 3.21 \text{ Bev}$$

$E' = \sqrt{M_p^2 c^4 + c^2 p'^2}$ den de bulunabilir. $K.E = E' - M_p c^2 = 3.21 - 0.938 \cong 2.27$ Bev

BS K

(6)

(d) $4M_p$'yi $\rightarrow M_p$ ile yerdeğiştirerek bulabiliriz.

$$\beta'' = \frac{6.58}{0.938 + 6.65} = 0.867 \qquad \gamma'' = \frac{1}{\sqrt{1-(0.867)^2}} = 2.01$$

$$p'' = \gamma''\left(p - \beta''\frac{E}{c}\right) = 2.01\left(6.58 - \frac{0.867 \times 6.65}{c}\right) = 1.64 \text{ Bev}/c$$

$$E'' = \gamma''\left(E - \beta'' pc\right) = 2.01\left(6.65 - 0.867 \times 6.58\right) = 1.90 \text{ Bev}$$

$$(K.E)' = E'' - M_p c^2 = 1.90 - 1.94 = 0.96 \text{ Bev.}$$

BS K

BS K

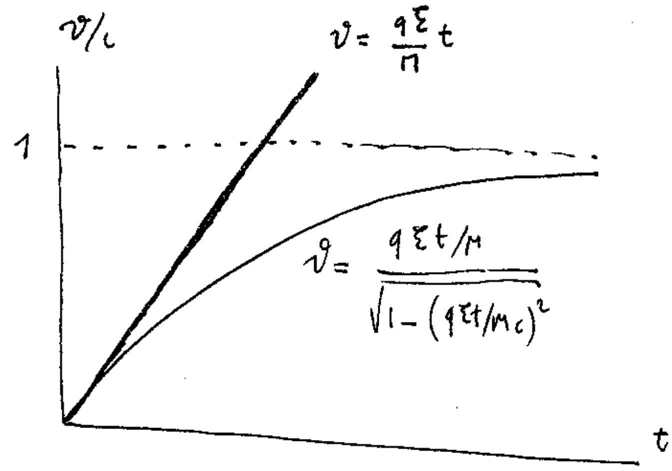
BS K

~~Yüklü Bir~~ Parçacığın ~~Sabit Boyuna~~ ~~Elektrik Alanda İvme~~

$$\dot{p}\,\hat{x} = q\mathcal{E}\,\hat{x}$$

$$\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\,\hat{x} \qquad \vec{p} = \frac{M\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$v_y = v_z = 0$$



$$M \frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = q\mathcal{E}$$

$$p = M \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = q\mathcal{E}t \;, \; v(0) = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} &E^2 - p^2c^2 = M^2c^4 \;, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\; = \frac{\vec{p}}{\cancel{M}}\frac{\cancel{M}c^2}{E} \\ &d\tau = \frac{dt}{\gamma} \end{aligned}}$$

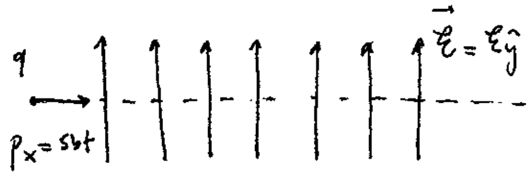
$$\frac{v^2}{1-v^2/c^2} = \left(\frac{q\mathcal{E}t}{M}\right)^2 \Rightarrow v^2 = \left(\frac{q\mathcal{E}t}{M}\right)^2 - \frac{v^2}{c^2}\left(\frac{q\mathcal{E}t}{M}\right)^2$$

$$v^2\left[1 - \left(\frac{q\mathcal{E}t}{Mc}\right)^2\right] = \left(\frac{q\mathcal{E}t}{M}\right)^2 \cdot \frac{c^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{v^2 = \frac{(q\mathcal{E}t/Mc)^2}{\left[1-(q\mathcal{E}t/Mc)^2\right]}\, c^2}$$

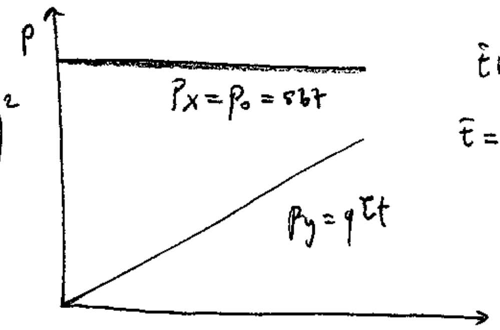
$$\beta^2 = \frac{(q\mathcal{E}t/Mc)^2}{\left[1-(q\mathcal{E}t/Mc)^2\right]}$$

~~Enine Bir Elektrik~~ Elektrik Alanda İvmelenme:



$$\frac{dp_x}{dt} = 0 \qquad \frac{dp_y}{dt} = q\mathcal{E}$$

$$p_x = p_0 \qquad p_y = q\mathcal{E}t$$



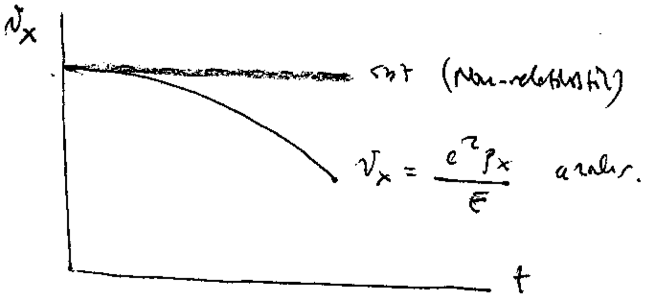
Enerji

$$E = c\sqrt{(p_x^2 + p_y^2) + M^2c^2}$$

artar.

$$\vec{v} = \vec{p}\,\frac{c^2}{E} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} E^2 &= M^2c^4 + p^2c^2 \\ &= M^2c^4 + p_0^2c^2 + (q\mathcal{E}tc)^2 \\ &= E_0^2 + (q\mathcal{E}tc)^2 \end{aligned}$$

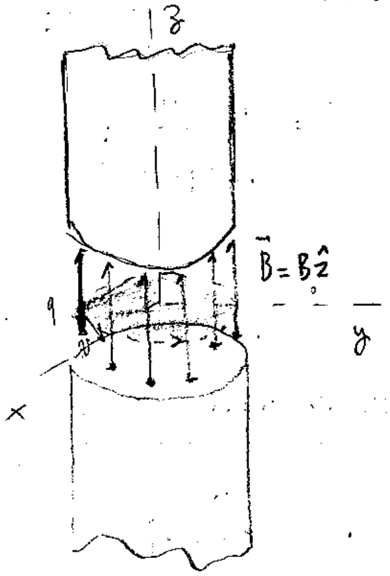
$$\Rightarrow \quad v_x = \frac{p_0c^2}{\sqrt{E_0^2 + (q\mathcal{E}tc)^2}} \qquad v_y = \frac{q\mathcal{E}tc^2}{\left[E_0^2 + (q\mathcal{E}tc)^2\right]^{1/2}}$$



[redacted] :

$$M \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{q}{c}\,\vec{v}\times\vec{B}$$

$$\left.\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y}\right\} \quad M\left(\dot{v}_x\hat{x} + \dot{v}_y\hat{y} + \dot{v}_z\hat{z}\right) = \frac{q}{c}B_0\left(-v_x\hat{y} + v_y\hat{x}\right)$$



$$\begin{cases} 1 & M\dot{v}_x = \frac{q}{c}B_0 v_y \Rightarrow \dot{v}_x = \omega_0 v_y \\ 2 & M\dot{v}_y = -\frac{q}{c}B_0 v_x \Rightarrow \dot{v}_y = -\omega_0 v_x \\ 3 & M\dot{v}_z = 0 \Rightarrow v_z = \text{Sabit.} \end{cases} \qquad \boxed{\omega_0 = \frac{qB_0}{Mc}}$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_0 \sin wt \\ v_y &= v_0 \cos wt \end{aligned}\right\}$$

1/2 denklemlerinin çözümleri. Hareket xy-düzleminde dairesel.

Bu siklotron frekansını temel bir tartışma ile çıkartmak da mümkündür, qB_0v_0/c manyetik kuvveti parçacığın dairesel hareketinde merkezcil ivmeyi temin eder. İvmenin büyüklüğü $v_0^2/r = \omega_0^2 r$. $\omega_0 r = v_0$

$$\frac{qB_0\cancel{v_0}}{c} = M\omega_0^2 r = M\omega_0\cancel{v_0} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{qB_0}{Mc}}$$

BS K

13.8.) Kozmik Işını Parçacığı e yüklü 10^{19} eV enerjili ve 10^{-6} G'lik bir magnetik alanda bulunan bir parçacığın yörünge yarıçapını bulunuz. (10^{-6} G'lik magnetik alan evrenimiz için akla uygun olmayan bir magnetik alan değildir.) Bunu galaksimizin yarıçapı ile kıyaslayınız. (Bu muazzam enerjideki "olaylara" sebep olan parçacıklar kozmik ışınlar içinde incelenmiştir. Bu gibi parçacıklar elektronlar, pozitronlar, γ-ışınları ve mezonların şiddetli hava sağanağına sebep olurlar.)

Çözüm:

$$\omega = qc\frac{B}{E} = \frac{4.8\times10^{-10}\times10^{-6}\times3.10^{10}}{10^{19}\times1.6\times10^{-12}} = 9.10^{-13}\ \text{rad/s}$$

$$\omega r = v \simeq c$$

$$\Rightarrow r = \frac{c}{\omega} = \frac{3.10^{10}}{9.10^{-13}} \simeq 0.3\times10^{23}\ \text{cm}$$

$r_{Galaxy} \sim 10^{23}$ cm. $\boxed{r \sim \frac{1}{3} r_{Galaxy}.}$

BS K

13. 9.) ~~Elektrik ve Magnetik Alanlarda~~ Eğrilik. (a) 1 Bev kinetik enerjili protonun 20.000 G'luk enine bir alandaki yolunun eğrilik yarıçapını hesaplayınız. (b) Yaklaşık aynı yarıçapı elde etmek için ne kadarlık bir enine elektrik alana ihtiyaç vardır? $y(x)$ eğrisinin eğrilik yarıçapının $\rho = [1+(dy/dx)^2]^{3/2} / (d^2y/dx^2)$ ile verildiğini hatırlayınız. ve ρ'yu protonun elektrik alana girdiği bir noktada hesaplayınız. $dy/dx = 0$ ve d^2y/dx^2, d^2y/dt^2, ve $\vec{x} = \vec{v}t$'den hesaplanabilir. (c) (b)'deki elektrik alanın büyüklüğünü düşününüz ve göreli parçacıkların elektrik alanda saptırılmalarının pratik olup olmadıkları hakkında fikirlerinizi söyleyiniz.

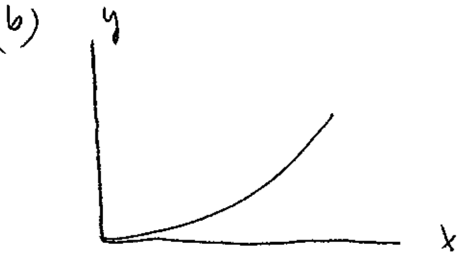
Çözüm:

(a) $E = K.E + M_pc^2 = 1.00 + 0.94 = 1.94$ Bev

$$E^2 - p^2c^2 = (M_pc^2)^2 \Rightarrow cp = \sqrt{E^2 - M_p^2c^4} = 1.70 \text{ Bev} \Rightarrow p = 1.70 \text{ Bev}/c$$

$$\rho = \frac{cp}{qB} \ (p. 381) = \frac{1.70 \times 1.6 \times 10^{-3}}{4.8 \times 10^{-10} \cdot 2.10^4} = 283 \text{ cm}.$$

(b)



Eğrinin minimum yarıçapı protonun enine alana girdiği noktada oluşur.

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \rho = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$x = vt \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(v\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\frac{dx}{dt}\left[v\frac{dy}{dx}\right] = \left[\frac{d}{dx}\left(v\frac{dy}{dx}\right)\right]\frac{dx}{dt}$$

$$= v^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

BS K

Denk. 13.8. $$\frac{dy}{dt} = \frac{q\mathcal{E}tc^2}{\sqrt{E_0^2 + (q\mathcal{E}tc)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{q\mathcal{E}c^2}{\sqrt{E_0^2+(q\mathcal{E}tc)^2}} - \frac{(q\mathcal{E}tc^2)(q\mathcal{E}tc)(q\mathcal{E}c)}{\sqrt{[E_0^2+(q\mathcal{E}tc)^2]^3}}$$

$t=0$, $x=0$ da krosplamdyne.

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{q\mathcal{E}c^2}{E_0} \quad ; \quad p = v\frac{E}{c^2}, \; pc = \frac{v}{c}E \quad \text{(Denk. 12.18)}$$

$$\Rightarrow \frac{v}{c} = p\frac{c}{E} = \frac{1.70}{1.938} = 0.877$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{v^2}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{q\mathcal{E}}{E_0}\frac{c^2}{v^2} = \frac{1}{\rho}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = \frac{E_0}{\rho}\frac{v^2}{c^2}\frac{1}{q} = \frac{1.938 \times 1.6 . 10^{-3} . (0.877)^2}{283 . 4.8\times 10^{-10}}$$

$$\boxed{\mathcal{E} = 1.76 \times 10^4 \text{ statvolt/cm}}$$

BS K

13.12.) ~~Elektron-Foton Esnek~~ Çarpışması: Enerji kaybı veya kazancı olmaksızın 10^4 eV enerjili bir fotonla saçılacak elektronun kinetik enerjisi ne kadardır? (Yardım: K.M. sistemindeki esnek saçılmayla karşılaştırınız.)

Çözüm:

Bu tam olarak K.M sistemindeki elastik saçılma ile aynıdır. γ-ışını ve elektronun momentumları (ve enerjilerini büyüklükleri) yön değiştirebilir fakat büyüklükleri değişmez.

$$\frac{h\nu}{c} = \gamma M_e v = \frac{M_e \beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \frac{h\nu}{M_e c^2} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{10^4}{511.000} = 0.0196$$

$$\Rightarrow \beta \simeq 0.0196$$

$$K.E = \frac{1}{2} M_e v^2 = \frac{1}{2} M_e c^2 \beta^2 = \frac{1}{2} \cdot 511 \cdot 10^3 \, (0{,}0196)^2 = 98 \text{ eV}$$