Quantum Mechanics
Foundations and Applications
Arno Bohm, Univ. of Texas, Austin, U.S.A.
1993 3rd Ed.

BÖLÜM I

MATEMATİKSEL ÖN HAZIRLIK

I.2. Lineer Uzaylar, Skaler çarpım.

$\Phi = \{\phi, \psi, \chi, \dots\}$ 3 boyutlu reel uzayın $\mathbb{R}^3$ hesap kavramlarının bir genellemesi olan bir cebirik yapı ile verilen elemanların bir kümesi olsun.

Vektörler olarak adlandırılan elemanlar, $\mathbb{R}^3$ dahi vektörlerin bilinen özellikleri olan kurallara uyacak şekilde tanımlanırlar. Genelde tanımlayacağımız lineer uzaylar, 3-boyutlu olmayıp (genelde ∞ olan) N boyutludurlar. ve reel sayılardan $\mathbb{R}$ ziyade kompleks $\mathbb{C}$ sayıları kullanılır.

Lineer uzayı tanımlayan kurallar:

(a) $\forall \phi, \psi \in \Phi$ için tanımlanmış $\phi+\psi \in \Phi$

elemanı vardır ve bu toplam

$$\phi+\psi = \psi+\phi$$ komütatif 'dir.

$$(\phi+\psi)+\chi = \phi+(\psi+\chi)$$ asosyatif 'tir.

$$\phi + 0 = \phi \qquad \forall \phi \in \Phi \text{ için}$$

$0 \in \Phi$ sıfır vektörü vardır.

kurallarına uyar.

(b) Her $a \in \mathbb{C}$ ve her $\phi \in \Phi$ için $a\phi \in \Phi$ elemanı vardır. ; ve ϕ vektörünün a sayısı ile çarpımı olarak adlandırılır. ve bu çarpım

$$1\phi = \phi$$
$$0\phi = 0$$

$$a(b\phi) = (ab)\phi \qquad a, b \in \mathbb{C}, \ \phi \in \Phi$$

$$a(\phi + \psi) = a\phi + a\psi \qquad \psi \in \Phi$$

$$(a+b)\phi = a\phi + b\phi$$

$$(-1)\phi = -\phi \quad \text{çünkü } \phi + (-\phi) = 0\phi = 0$$

kurallarına uyar.

Φ'nin elemanları ve kompleks sayılar arasındaki yukarıdaki bağıntılar <u>lineer uzayı</u> tanımlar

<u>Örnek</u>: 3d'ki $\mathbb{R}^3$: $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$ vektörleri yukarıdaki bağıntıları sağlarlar.

BS K

Skaler Çarpım (iç çarpım): içinde skaler çarpım olan bir vektör uzayı Euclidean (Öklid) ya da ön-Hilbert uzayı olarak adlandırılır.

Tanım: Φ kompleks vektör uzayı üzerinde bir skaler çarpım, her ϕ ve ψ vektör çiftine bir kompleks sayı atama işlemi olup (ϕ, ψ) ile gösterilir ve aşağıdaki özellikleri sağlar;

(a) $(\psi, \phi + \chi) = (\psi, \phi) + (\psi, \chi)$

(b) $(\psi, a\phi) = a(\psi, \phi)$

(c) $(\psi, \phi) = \overline{(\phi, \psi)}$ (compl. conj.)

(d) $(\psi, \psi) \geq 0$ $\left(= 0 \overset{\text{sadece}}{\Longleftrightarrow} \psi = 0 \text{ ise}\right)$

\# $(\phi, \psi) = 0$ $\Downarrow$ ortogonaldirler denir.

Örnek: 3d'lik $\mathbb{R}^3$ de

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Norm: Yukarıda tanımlanan skaler çarpım ile bir ϕ vektörünün normunu $\|\phi\|$

$$\|\phi\| = +\sqrt{(\phi, \phi)}$$

ile tanımlarız.

Sıfırdan farklı her ψ vektörü için daima $\hat{\psi} = \psi / \|\psi\|$ vektörü tanımlanabilir. Normu $\|\hat{\psi}\| = 1$ olan bu vektör normalize olarak adlandırılır

Bilineer Hermityen form: iki vektör değişkenli, kompleks değerli bir $h(\phi,\psi)$ fonksiyonu

(a) $h(\phi,\psi) = \overline{h(\psi,\phi)}$

(b) $h(\phi, a\psi) = a\, h(\phi,\psi) \qquad a \in \mathbb{C}$

(c) $h(\phi_1+\phi_2, \psi) = h(\phi_1,\psi) + h(\phi_2,\psi)$

Hermityen form'dur. Ek olarak her ϕ için

(d) $h(\phi,\phi) \geq 0$

koşulu da sağlanıyor ise h pozitif hermityen form'dur.
Pozitif hermityen form, her ϕ için

$$h(\phi,\phi) = 0 \Rightarrow \phi = 0$$

ise "positive definite" denir.

Cauchy - Schwarz - Bunyakowski eşitsizliği

Zorunlu olarak skaler çarpım olması gerekmeyen pozitif hermityen formlar

$$|h(\phi,\psi)|^2 \leq h(\phi,\phi)\, h(\psi,\psi)$$

BS K eşitsizliğini sağlarlar.

Eğer h pozitif definite $\Rightarrow$ bazı $a \in \mathbb{C}$ için sadece ve sadece $\phi = a\psi$ oldukça eşitlik geçerli'dir.

<u>İspat</u>: Eğer $\phi = 0$ (ya da $\psi = 0$) $\Rightarrow$ ispat trivial

$\phi, \psi \neq 0$ ve $a \in \mathbb{C}$ 'in $a = -\dfrac{h(\psi,\phi)}{h(\psi,\psi)}$

olarak seçelim $\chi = \phi + a\psi$ için

$$h(\chi,\chi) \geq 0$$

$$0 \leq h(\phi,\phi) + \frac{|h(\psi,\phi)|^2}{h(\psi,\psi)} - \frac{\overline{h(\psi,\phi)}\, h(\psi,\phi)}{h(\psi,\psi)} - \frac{h(\psi,\phi)\, h(\phi,\psi)}{h(\psi,\psi)}$$

$$|h(\phi,\psi)|^2 \leq h(\psi,\psi)\, h(\phi,\phi)$$

Alt Uzay:

Φ lineer uzayındaki bir M kümesi, Φ için tanımlanan toplam ve çarpım işlemleri altında bir lineer uzay ise buna Φ 'nin <u>altuzayı</u> denir.

$a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + \dots + a_n\phi_n$ şeklindeki ifadeye ϕ_j vektörlerinin lineer kombinasyonu (bileşimi) denir ve tamamı sıfırdan farklı $a_1, \dots, a_n$ katsayıları var ve

$$a_1\phi_1 + \dots + a_n\phi_n = 0$$

sağlanıyor ise $\phi_1, \dots, \phi_n$ vektörleri lineer bağımlı olarak adlandırılırlar; Eğer yukarıdaki denklem

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

için sağlanıyor ise $\phi_1, \dots, \phi_n$ vektörleri lineer bağımsız olarak adlandırılırlar

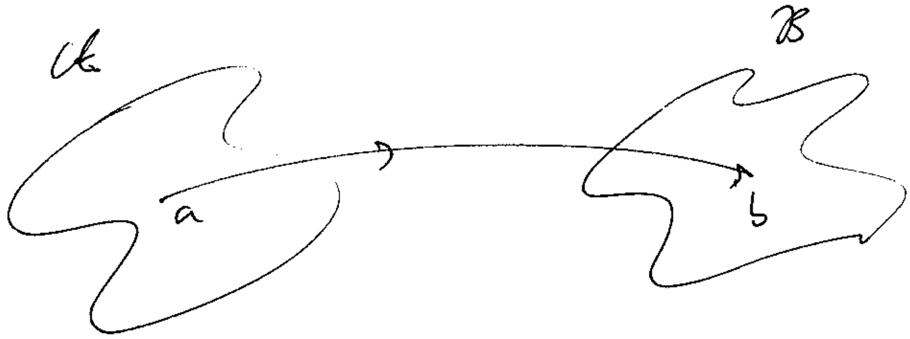
Tanım: Eğer bir Φ uzayında n tane ve n'den fazla olmayan lineer bağımsız vektör var ise Φ sonlu boyutlu (ya da n boyutlu)'dur denir

(# lineer bağımsız vektörlerin sayısı keyfi olarak büyük $\Rightarrow$ Φ sonsuz (Φ_∞) boyutlu'dur)

Baz (Basis) n boyutlu (Φ^n) uzay içerisinde n lineer bağımsız vektörler sistemi Φ için bir baz olarak adlandırılır.

İzomorfizm:

İki $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ cebirik yapıları arasındaki bir izomorfizm cebirik operasyonları koruyan bir bire-bir karşı gelme'dir.



$a \in \mathcal{A}$ $\qquad$ $b \in \mathcal{B}$

$a \leftrightarrow b$

$$f, g \in \Phi \qquad f \leftrightarrow f' \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha f + \beta g \leftrightarrow \alpha f' + \beta g' \\ \alpha, \beta \in \mathbb{C} \end{array} \right.$$

$$f', g' \in \Phi' \qquad g \leftrightarrow g'$$

$$(f, g)_{\Phi} = (f', g')_{\Phi'}$$

bu iki koşulu sağlayan uzaylar izometrik'tir (izomorfik) denir.

I.3. LİNEER OPERATÖRLER

$$\mathbb{R}^3 \;, \quad R: \quad R\vec{a} = \vec{b}$$

Bununla analoji yaparak Φ'deki lineer operatörleri ya da dönüşümleri tanımlayabiliriz. Bir lineer operatör,

$$A : \Phi \to \Phi$$

şeklinde bir gönderimdir.

$$\phi, \psi \in \Phi \quad \text{olmak üzere} \qquad A\phi = \psi$$

bunlara ek olarak, $a \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$A(\phi + \psi) = A\phi + A\psi$$
$$A(a\phi) = a A\phi$$

koşulları da sağlanırsa A lineer operatör olarak adlandırılır.

$$A(a\phi) = a^* A\phi$$

bağıntısı geçerli ise antilineer'dir denir. Lineer operatörler için aşağıdaki toplama ve çarpma kuralları geçerlidir

$$(A+B)\phi = A\phi + B\phi$$

$$(aA)\phi = a(A\phi)$$

$$(AB)\phi = A(B\phi)$$

$$O\psi = 0 \qquad I\psi = \psi$$

sıfır ve birim operatör.

BS K

Hermitsel operatör:

Φ'nin tümü üzerine tanımlanmış her lineer A operatörü için

$$(A^{+}\phi, \psi) = (\phi, A\psi)$$

olacak şekilde bir A^{+} tanımlanabilir. (A'nın adjoint'i)

Eğer, $A^{+} = A$ $\Rightarrow$ self-adjoint ya da Hermitsel

Özdeğer, Özvektör:

3d'da $\mathbb{1}$ simetrik bir tensör,

$$\mathbb{1} \cdot \vec{a} = I_{(a)}\, \vec{a}$$

asal eksenlerine dönüşüm yaparak köşegenleştirilebilir.

$\vec{a}$: özvektör $\quad I_{(a)}$: özdeğer. Benzer şekilde,

T: $\psi \neq 0 \in \Phi$ 'e bir A lineer operatörünün özvektörüdür denir, eğer

$$A\psi = \lambda\psi \quad , \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{ise.}$$

özdeğer (ψ özvektörüne karşı gelen)

(Verilen bir A operatörü için, farklı özdeğerleri olan çok sayıda farklı özvektörler, belki de sonsuz sayıda, olabilir. Lineer uzaylarda tek bir özvektörü bile olmayan operatörler vardır.)

(#) A hermitsel $\Rightarrow (A^+ = A)$ özdeğer ve özvektörleri için

1. bütün özdeğerleri reel'dir.
2. ϕ_1 ve ϕ_2 özvektörler, λ_1 ve λ_2 özdeğerleri ise

$$(\phi_1, \phi_2) = 0 \quad (\phi_1 \text{ ve } \phi_2 \text{ birbirine diktir}).$$

• operatör $\rightarrow$ gözlenebilir ve özdeğerleri $\rightarrow$ ölçülen değerleridir.

Bir A operatörünün tersi:

$$BA = AB = I \quad \Rightarrow \quad B = A^{-1}$$

Üniter operatör:

$$U^+U = UU^+ = I \quad \text{veya} \quad U^+ = U^{-1}$$

komütatör:

$$[A, B] \equiv AB - BA$$

$[A, B] = 0 \Rightarrow$ A ve B sıradeğiştirir denir.

Assosyatif Cebir:

Birim elemanlı bir $\mathcal{A}$ kümesi bir (assosyatif) cebirdir denir eğer,

(a) $\mathcal{A}$ bir lineer uzay ise

(b) Her $A, B \in \mathcal{A}$ çifti için, aşağıdaki koşulları sağlayacak $AB \in \mathcal{A}$ çarpımı tanımlı ise,

$$(AB)C = A(BC) \;;\; A(B+C) = AB + AC \;;\; (A+B)C = AC + BC$$

$$(aA)B = A(aB) = aAB$$

BSK

(c) bütün $A \in \mathcal{A}$ için, $I \in A$ vardır, öyleki;

$$IA = AI = A$$

<u>Altcebir</u>: $\mathcal{A}_1$ altkümesi $\mathcal{A}$'nın altcebiri olarak adlandırılır

eğer; $\mathcal{A}_1$ kendibaşına $\mathcal{A}$ için tanımlanan toplama, çarpma ve bir sayı ile çarpma işlemlerini sağlarsa.

$$A, B \in \mathcal{A}_1 \;; \quad A+B \in \mathcal{A}_1 \,, \quad aA \in \mathcal{A}_1 \,, \quad AB \in \mathcal{A}_1 .$$

<u>∗-cebri</u>:

Bir $\mathcal{A}$ cebri, bu cebir üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir ∗-işlemi (involution) $A \mapsto A^{\dagger}$ varsa, yıldız cebri olarak adlandırılır:

(d) $$(aA + bB)^{\dagger} = \bar{a}A^{\dagger} + \bar{b}B^{\dagger}$$

$$(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger}$$

$$(A^{\dagger})^{\dagger} = A \qquad\qquad A, B \in \mathcal{A} \;;\; a, b \in \mathbb{C}$$

$$I^{\dagger} = I$$

Lineer bir uzayda lineer operatörler kümesi bir ∗-cebri oluşturur. Her ∗-cebrinin skaler çarpım uzayında bir operatör ∗-cebri oluşturduğu gösterilebilir. Q.M.'deki fiziksel sistemler operatör ∗-cebirleri ile tarif edildiği varsayılır.

$\mathcal{A}$'nın $X_1, X_2, \ldots, X_n$ elemanlarının kümesi <u>jenaratörler</u> kümesi olarak adlandırılır ve eğer $\mathcal{A}$'nın her elemanı,

$$A = cI + \sum_{i=1}^{n} c^i X_i + \sum_{i,j}^{n} c^{ij} X_i X_j + \cdots$$

 $c, c^i, c^{ij}, \ldots \in \mathbb{C}$ olmak üzere şeklinde yazılabilirse $\mathcal{A}$, X_i'ler tarafından <u>üretilmiştir</u> denir.

$$P(X_i) = 0$$ (jeneratörler arasındaki tanımlı cebirsel bağıntılar)

n tane X_i değişkenlerinin kompleks katsayılı bir polinomudur.

(#) $B \in \mathcal{A}$

$$B = bI + \sum b^i X_i + \sum b^{ij} X_i X_j + \dots$$

() A elemanına <u>eşittir</u>, eğer B, A ile aynı biçime ($c, c^i, c^{ij}, \dots$ katsayıları ile) $P(X_i)=0$ denklemi kullanılarak getirilebilir ise.

I.4. BAZ SİSTEMLERİ ve ÖZVEKTÖR AYRIŞIMI

R^3'da olduğu gibi, Φ lineer uzayında da baz vektörlerinin bir sistemi ortaya konulabilir:

()

$\mathbb{R}^3$'da $\quad \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \; ; \; \| \vec{e}_i \| = 1$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad ; \quad i,j = 1,2,3$$

Genel bir Φ lineer uzayında ise;

$$\vec{e}_i - |e_i) = |i\rangle \qquad i = 1, 2, \dots, N$$

<u>skaler çarpım</u>:

$$(e_i, e_j) \equiv (e_i | e_j) \equiv \langle i | j \rangle = \delta_{ij}$$

BS K

Φ, N-boyutlu ise, bu ortonormal baz sisteminde N tane lineer bağımsız vektör vardır.

(∴) Baz sistemi olarak, fiziksel sistemin önemli bir gözlenebilirini temsil eden bir A operatörünün $(\mathcal{H}, Q, P, \ldots)$ özvektörleri seçilir:

$$A e_i = a_i e_i \qquad a_i \in \mathbb{C}$$

Bu normalize özvektörler genellikle

$$e_i = |a_i) \quad \text{ya da} \quad e_i = |a_i\rangle$$

şeklinde gösterilir.

Φ sonlu boyutlu skaler çarpım uzayı olsun. Her A hermitsel operatörü için, [Spektral teorem]

$$A e_i = a_i e_i \quad ; \; i = 1, 2, \ldots, N$$

özdeğerler sist.'i vardır; öyleki her $\phi \in \Phi$

$$\phi = \sum_{i=1}^{N} e_i \, (e_i, \phi) \equiv \sum e_i \, (a_i | \phi) \qquad (*)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$c_i = (e_i, \phi) \equiv (a_i | \phi) \quad \text{kompleks.}$$

(#) a_i'lerin kümesi (A Hermitsel ⇒ reel) A'nın <u>spektrumu</u>

$(*)$ denklemi: ϕ'nin <u>spektral ayrışımı</u> ya da ϕ'nin <u>özvektör ayrışımı</u> olarak adlandırılır.

BSK

Kesikli özdeğerler kümeli self-adjoint operatörü H ile, sürekli özdeğerler kümeli operatörleri de Q ile göstereceğiz.

kesikli durumda $|E_n)$ özvektörler sist.'i

sürekli durumda $|x\rangle$ " " vardır.

$$H|E_n) = E_n|E_n) \qquad E_n = E_0, E_1, \ldots$$

$$Q|x\rangle = x|x\rangle \qquad -\infty \leq m \leq x \leq M \leq +\infty$$

öyleki, her $\phi \in \Phi$ bu özvektörler cinsinden seriye açılabilir:

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} |E_n)(E_n|\phi)$$

$$\phi = \int_m^M dx\, |x\rangle\langle x|\phi\rangle$$

$\phi = 0 \iff$ E_n'ler için $(E_n|\phi) = 0$

x'ler için $\langle x|\phi\rangle = 0$ ise olur.

*. Bu özellikteki $|E_n)$ ya da $|x\rangle$ özvektörler kümesine <u>tam</u> (<u>complete</u>) diyoruz.

*. $(E_n|\phi)$ ya da $\langle x|\phi\rangle$'ler $\{|E_n)\}$ ya da $\{|x\rangle\}$ baz sist.'ine göre ϕ'nin <u>koordinatları</u> ya da <u>bileşenleri</u> olarak adlandırılır.

$(E_n|\phi) = (|E_n), \phi)$ özvektörlerin ϕ ile skaler çarpımı

$\langle x|\phi\rangle = (|x\rangle, \phi)$

[[$\mathbb{R}^3$ 'da $\vec{V} = \sum e_i v_i$

$\langle x|\phi\rangle$: v_i 'nin sürekli sonsuz boyutlu genellemesi.

$(E_n|\phi)$: " ∞-boyutlu genellemesi.]]

$|E_n)$: has özvektörler

$|x\rangle$: genelleştirilmiş özvektörler, eigenket.

<u>Aralarındaki önemli fark:</u>

$|E_n) \in \Phi$

$|x\rangle \in \Phi^\times$: Φ üzerindeki sürekli antilineer fonksiyonel-lerin uzayı.

$H|E_n) = E_n|E_n)$, $E_n = E_0, E_1, E_2, \ldots$ H operatörünün spektrumu.

H, kesikli özdeğerlere sahipse, spektrum kesiklidir denir, sürekli özdeğerler kümesi x, Q operatörünün sürekli spektrumudur.

A operatörü → fiziksel bir gözlenebilir, spektral teoremi

$$\phi = \sum |a_i)(a_i|\phi\rangle + \int da\, |a\rangle\langle a|\phi\rangle$$

A'nın kesikli sürekli spektrumu üzerinden.

toplamda beliren a_i 'nin <u>bazı</u> yada <u>bütün</u> değerleri integral'de gömülebilir. O zaman bunlar sürekli spektrumdaki kesikli özdeğerlerdir. Bu a_k için olursa o zaman $|a_k)$ bütün $|a\rangle$ 'lara ortogonal'dir, yani

$$(a_k|\phi^c) = 0 \quad , \quad \phi^c = \int da\, |a\rangle\langle a|\phi^c\rangle \text{ için.}$$

BS K

$(E_n|\phi)$ koordinatlarının notasyonun ifade ettiği şey olduğunu görmek için ϕ 'yi $|E_m)$ ile skaler çarpalım:

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} |E_n)(E_n|\phi)$$

$$(|E_m),\phi) = \sum_n (|E_m),|E_n))(E_n|\phi)$$

aynı H Hermitsel op.'nün özvektörleri olduğundan $E_n \neq E_m \Rightarrow (|E_m),|E_n)) = 0$ dıktır.

$E_n = E_m$ için bunları normalize ederiz:

$$(|E_n),|E_n)) = \||E_n)\|^2 = 1$$

bunları birleştirsek; $(|E_m),|E_n)) = (E_m|E_n) = \delta_{E_nE_m} = \delta_{nm}$

$n, m = 1, 2, \ldots$

$$\Rightarrow \quad (|E_m),\phi) = \sum_n \delta_{nm}(E_n|\phi) = (E_m|\phi) \checkmark$$

<u>Spektral teorem:</u> $\phi = \sum_{n=0}^{\infty} |E_n)(E_n|\phi)$ ifadesini farklı biçimde yazmak mümkündür.[1)] Her iki yandaki keyfi $\phi \in \Phi$ elemanı ihmal edilir ise

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} |E_n)(E_n| \quad \text{(birim op.'ün spektral ayrışımı)}$$

2.) Her iki yanını H ile çarparsak:

$$H\phi = \sum_{n=1}^{\infty} H|E_n)(E_n|\phi) = \sum_n E_n|E_n)(E_n|\phi)$$

yine ϕ 'yi ihmal edersek,

BS K

$$\mathcal{H} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \, |E_n)(E_n|$$ (kesikli spektrumu olan $\mathcal{H}$ self-adjoint operatörün spektral ayrışımı)

3°) başka bir $\psi \in \Phi$ ile skaler çarpalım.

$$(\psi, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\psi|E_n)(E_n|\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} (E_n|\psi)^* (E_n|\phi)$$

özel olarak $\psi = \phi$ seçersek

$$\|\phi\|^2 = (\phi, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\phi|E_n)(E_n|\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} |(E_n|\phi)|^2$$

Skaler çarpımın tanımlanabilmesi için, bir vektörü tanımlayan

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\phi_i|^2 < \infty$$

dizisinin yakınsak olması gerekir, yani, karesi toplanabilir olmalı.

(H) Operatörler kümesinin (fiziksel gözlenebilirleri temsil eden) her A operatörünün bütün Φ uzayında tanımlanması istenir ise, Φ'de bütün $A\phi$'lerin iyi tanımlı olması gerekir, yani, $(A\phi, A\phi)$ sonlu olmalı. Örneğin;

A'yı $A = \mathcal{H}^p$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ seçersek, yukarıdaki gereksinim için aşağıdaki koşul elde edilir:

$$(\mathcal{H}^p \phi, \mathcal{H}^p \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\phi|\mathcal{H}^p|E_n)(E_n|\mathcal{H}^p|\phi)$$
$$= \sum_n E_n^{2p} \, |(E_n|\phi)|^2 < \infty$$

Böylece, sadece $\{ (E_n|\phi) \mid n = 0, 1, 2, \ldots \}$'nin karesi toplanabilir değil, herhangi bir $p = 0, 1, 2, \ldots$ için $\{ E^p (E_n|\phi) \}$'nin de karesi toplanabilir bir dizi olması gerekecektir.

BS K

sürekli spektrum:

ϕ ile genelleştirilmiş özvektör $|x\rangle$'in skaler çarpımını

$$(|x\rangle, \phi) \equiv \int dy\, (|x\rangle, |y\rangle) \langle y|\phi\rangle$$

hesaplayalım. $\langle x|y\rangle \equiv (|x\rangle, |y\rangle)$ yeni sembol yazalım.

$\langle x|\phi\rangle$: ϕ vektörünün $|x\rangle$ baz vektörü doğrultusu boyunca koordinatı.

$(|x\rangle, \phi)$: ϕ ile $|x\rangle$'in skaler çarpımı. bu iki nicelik aynı olmalıdır.

$$\langle x|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \langle x|y\rangle \langle y|\phi\rangle$$

sürekli y değişkenli fonk.'ları

$$\langle x|y\rangle : \phi(y) = \langle y|\phi\rangle \xrightarrow{\int_{-\infty}^{+\infty} \text{ile}} \phi(x) = \langle x|\phi\rangle$$ gönderir. MAP

Bu özelliklere sahip iyi-davranışlı, hatta lokal olarak integrallenebilir bir fonk. yoktur. Böyle bir nicelik, bir dağılım ya da genelleştirilmiş bir fonk. olarak adlandırılır.

iyi davranışlı $\phi(x) = \langle x|\phi\rangle$ fonksiyonlar sınıfı için yukarıdaki

$\langle x|y\rangle$ dağılımı

$$\langle x|y\rangle = \delta(x-y)$$

Dirac_δ olarak adlandırılır. $\delta_{E_n E_m}$'in genelleştirmesidir

$$(E_m|\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{E_n E_m} (E_n|\phi)$$

$|E_n)$'ler 1'e normalize idi $\qquad \langle x|x\rangle \to \frac{1}{cm}$

$|x\rangle$ " δ-fonk. normalizedir. $1/\sqrt{\dim dx}$ boyutundadırlar.

Genelleştirilmiş özvektörlerin δ-normalizasyonu yerine Q'nun genelleştirilmiş özvektörleri farklı bir normalizasyon ile seçilebilirdi.

$$\phi = \int_m^M dx\, |x\rangle \langle x | \phi \rangle \quad \text{yerine}$$

$$\phi = \int d\mu(x)\, |x\}_{\rho}\, {}_{\rho}\{x|\phi\rangle \quad \text{yazılır.}$$

Q'nun özvektörleri $Q|x\}_\rho = x|x\}_\rho$

$\rho(x) = d\mu(x)/dx$: reel negatif olmayan ve integrallenebilir bir fonk.

Kesikli spektrumda olduğu gibi $\phi = \int_m^M dx\, |x\rangle\langle x|\phi\rangle$ ifadesi farklı şekillerde yazılabilir:

1.) $I = \int dx\, |x\rangle\langle x| = \int \rho(x)\, dx\, |x\}_\rho\, {}_\rho\{x|$

2.) Q ile çarpıp ϕ'yi ihmal,

$$Q = \int dx\, Q|x\rangle\langle x| \quad , \quad Q|x\rangle = x|x\rangle$$

$$= \int dx\, x\, |x\rangle\langle x|$$

sürekli spektrumu olan self-adjoint Q operatörün spektral-ayrışımı.

$\phi, \psi \in \Phi$ 'lerin skaler çarpımı:

$$(\psi, \phi) = \int dx\, \langle \psi|x\rangle \langle x|\phi\rangle$$

BS K

Herhangi $\phi, \psi \in \Phi$ için,

$$(\psi, \phi)^* = (\phi, \psi) \qquad (\phi, \psi)^* = (\psi, \phi)$$

ve

$$(\phi, \psi) = \int dx \, \langle \phi | x \rangle \langle x | \psi \rangle \text{ 'den}$$

şu sonuç çıkarılır: Genelleştirilmiş skaler çarpım için, skaler çarpım ile aynı olan

$$\langle \psi | x \rangle = \langle x | \psi \rangle^*$$

bağıntısı elde edilir. $\langle x | \phi \rangle = \phi(x)$ $\langle x | \psi \rangle^* = \psi^*(x)$ kullanılırsa

$$(\psi, \phi) = \int dx \, \psi^*(x) \, \phi(x) \text{ olur.}$$

Özellikle, $\psi = \phi$ seçilir ise

$$\|\phi\|^2 = (\phi, \phi) = \int dx \, \phi^*(x) \phi(x) = \int dx \, |\phi(x)|^2$$

elde edilir.

(*) Q operatörünün Φ uzayının tüm elemanları üzerinde (ve Q^p, $p = 0, 1, \ldots$ her kuvvetinde) iyi tanımlı olması istenilirse

$$\|Q^p \phi\|^2 = (Q^p \phi, Q^p \phi) = \int dx \, x^{2p} \, |\phi(x)|^2 < \infty$$

olmalıdır.

BS K

(#) Φ'nin realizasyonunun bir örneği S- Schwartz-uzayıdır. (sonsuz defa türetilebilen kompleks değerli fonksiyonlar uzayı: türevleri $1/x$'in herhangi bir kuvvetinden daha hızlı sonsuzda sıfır olur) Bu fonksiyonlara iyi davranışlı diyeceğiz.

(#) Φ uzayı öyledir ki, $|x\rangle$ sürekli bazına göre tüm $\psi \in \Phi$ vektörlerin bileşenleri, $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$, kompleks düzlemdeki ya da bu düzlemin bir bölgesindeki (örn. alt-yarı düzlem) $\psi(z)$ analitik fonk.larının sınır değerleridir.

$$(\psi, \phi) = \int dx\, \psi^*(x)\phi(x)$$

integralindeki kontur deforme edilir ve

$$(\psi, \phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^*(x)\,\phi(x) = \int_{\mathcal{C}} dz\, \psi^*(z)\,\phi(z)$$

$$= \int_{\mathcal{C}} dz\, \langle \psi(z)\rangle\langle z|\phi\rangle$$

reel eksen boyunca olan konturdan, singüler noktadan geçmeksizin analitik bölgesine deforme edilen herhangi bir kontur.

(#) Bu self-adjoint Q operatörünün genelleştirilmiş özdeğerleri $|z\rangle$'yi tanımlar

$$Q|z\rangle = z|z\rangle$$

z kompleks özdeğer.

genelleştirilmiş baz vektör açılımında kullanılabilirler.

$$\phi = \int_{\mathcal{C}} dz\, |z\rangle\langle z|\phi\rangle$$

Decaying states tanımında kullanılacak.

BS K

I.5. Operatörlerin Realizasyonu :

$\phi \in \Phi$ vektörlerinin bir baz sistemine göre bileşenleri Φ uzayının bir realizasyonudur denilmişti. $\mathbb{R}^3$ de $\vec{x}$, (x_1, x_2, x_3) dizisi ile realize edilir; $x_i = \vec{e}_i \cdot \vec{x}$. Başka bir baz sistemi alırsak : $x_i' = \vec{e}_i' \cdot \vec{x}$.

Sonlu boyutlu lineer skaler çarpım uzayında, bileşenler $c_i = (e_i, \phi) \equiv (a_i | \phi)$ şeklinde kompleks sayılardır. Sonsuz boyutlu uzayda bunlar ;

sonsuz dizilerdeki $\phi_i = (E_i | \phi) \equiv (i | \phi)$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} |\phi_i|^2 < \infty$ ile

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n^{2p} \, |(E_n | \phi)|^2 < \infty$$

koşullarını sağlarlar, ya da

sürekli sonsuz dizilerdir $\phi(x) = \langle x | \phi \rangle$, yani x'in sürekli fonksiyonları ve

$$\|\phi\| = \int dx \, |\phi(x)|^2$$

ile $\int dx \, x^{2p} \, |\phi(x)|^2 < \infty$

koşullarını sağlarlar.

KESİKLİ DURUMLAR

Uzayın baz sistemi değiştirilir ise, verilen bir vektörün bileşenleri de değişir. H'ye ek olarak başka bir A operatörü de alalım.

$$A |a_i\rangle = a_i |a_i\rangle \qquad a_i = a_0, a_1, \ldots$$

BS K

O zaman,

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} |E_n)(E_n|\phi_n)$$

vektörü

$$\phi = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i\rangle\langle a_i|\phi\rangle \equiv \sum_i |i\rangle\langle i|\phi\rangle$$

şeklinde seriye açılabilir. A ve H sıradeğiştirmezse, $\langle a_i|\phi\rangle$ ve $(E_n|\phi)$ tamamı ile farklıdır. Bileşenler sütun matrisi olarak yazılabilir:

$$\phi \leftrightarrow (E_n|\phi) = \begin{pmatrix} (E_0|\phi) \\ (E_1|\phi) \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad \phi \leftrightarrow \langle a_i|\phi\rangle = \begin{pmatrix} \langle a_0|\phi\rangle \\ \langle a_1|\phi\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$\langle i|\phi\rangle$, $\langle i|\psi\rangle$, $\langle i|\chi\rangle$, ... sütun matrislerinin kümesi lineer skaler çarpım uzayı oluşturur: $\mathbb{C}^{\infty}_{(i)}$.

Benzer şekilde $\{ |E_n) \mid E_n = E_1, E_2, \ldots \}$ baz sistemine göre bileşenlerin sütun matrislerinin kümesi, $(E_n|\phi)$, $(E_n|\psi)$, $(E_n|\chi)$, ... 'ler de bir lineer skaler çarpım uzayı oluşturur:

$\mathbb{C}^{\infty}_{(E_n)}$.

$\mathbb{C}^{\infty}_{(E_n)}$ ve $\mathbb{C}^{\infty}_{(i)}$ 'ların birbirine ve Φ uzayına izomorfik oldukların görmek kolaydır.

BS K

$$(\langle i|\phi\rangle) \longleftrightarrow ((E_n|\phi)) \longrightarrow \phi$$

$$(\langle i|\psi\rangle) \longleftrightarrow ((E_n|\psi)) \longleftrightarrow \psi$$

bütün sonsuz sütun matrislerinin kümesini belirterek Φ uzayını tanımlayabiliriz. Örneğin, $C^{\infty}_{(E_n)}$'yi

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n^{2p} \, |(E_n|\phi)|^2 < \infty$$

koşulunu $E_n = (n+\frac{1}{2})$; $n=0,1,2,\ldots$ ile sağlayan bütün $(E_n|\phi)$ lerin uzayı olarak tanımlayacağız. O zaman Φ ona izomorfik uzay olarak tanımlanır. Böylece aynı vektör, tamamı ile farklı sütun matrisleri ile temsil edilebilir.

Vektörler sütun matrisleri ile realize edilirken, operatörler kuadratik matrisler ile realize edilir. Bir B operatörünün matrislerini şöyle elde ederiz:

$$B\phi = \sum_i B|i\rangle\langle i|\phi\rangle$$

bunun $|a_j\rangle$ ile skaler çarpımı,

$$\langle j|B\phi\rangle = \sum_i \langle j|B|i\rangle\langle i|\phi\rangle$$

matris notasyonu

$$\begin{pmatrix} \langle 1|B\phi\rangle \\ \langle 2|B\phi\rangle \\ \langle 3|B\phi\rangle \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle 1|B|1\rangle & \langle 1|B|2\rangle & \cdots \\ \langle 2|B|1\rangle & \langle 2|B|2\rangle & \cdots \\ \langle 3|B|1\rangle & \cdots & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle 1|\phi\rangle \\ \langle 2|\phi\rangle \\ \langle 3|\phi\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Lineer operatör B'nin realizasyonu,

$$B \leftrightarrow \langle j|B|i\rangle = \begin{pmatrix} \langle 1|B|1\rangle & \langle 1|B|2\rangle & \cdots \\ \langle 2|B|1\rangle & \langle 2|B|2\rangle & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

Bunu, $\{ |i\rangle \mid i=1,2,\ldots \}$ baz sistemine göre B operatörünün matrisi olarak adlandıracağız.

D 2. bir operatör olsun,

$$(B+D)|i\rangle = B|i\rangle + D|i\rangle \quad / \langle j| \text{ ile çarp}$$

$$\langle j|(B+D)|i\rangle = \langle j|B|i\rangle + \langle j|D|i\rangle$$

iki lineer operatörün toplamının matrisi, matrislerin toplamına eşit.

$$\langle j|DB|i\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle j|D|n\rangle\langle n|B|i\rangle$$

$$\begin{pmatrix} \langle 1|DB|1\rangle & \langle 1|DB|2\rangle & \cdots \\ \langle 2|DB|1\rangle & \langle 2|DB|2\rangle & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \langle 1|D|1\rangle & \langle 1|D|2\rangle & \cdots \\ \langle 2|D|1\rangle & \langle 2|D|2\rangle & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle 1|B|1\rangle & \langle 1|B|2\rangle & \cdots \\ \langle 2|B|1\rangle & \langle 2|B|2\rangle & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

Baz sistemi, A operatörünün özvektörlerinin bir sist.'i olarak seçilirse, o zaman A'nın matrisi bu baz sistemine göre köşegen halindedir:

$$\langle j|A|i\rangle = a_i\langle j|i\rangle = a_i\,\delta_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} \langle 1|A|1\rangle & \langle 1|A|2\rangle & \cdots \\ \langle 2|A|1\rangle & \langle 2|A|2\rangle & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

A ile sıra değiştirmeyen tüm diğer operatörlerin, A'nın özvektörleri baz sistemine göre matris elemanlarının sıfırdan farklı köşegen dışı matris elemanları vardır.

H'nin has özvektörleri, Φ'nin de elemanları iken

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} |E_n)(E_n|\phi)$$

kullanarak, $|E_n)$'yi $|i\rangle$ baz sistemine göre açarız veya bunun tersini yapabiliriz:

$$|E_n) = \sum_{i=1}^{\infty} |i\rangle\langle i|E_n)$$

($\{|i\rangle \,|\, i=1,2,\ldots\}$ ve $\{|E_n) \,|\, n=1,2,\ldots\}$ baz sist.'leri arasındaki dönüşüm matrisi)

$$|i\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |E_n)(E_n|i\rangle \quad (*)$$

$|\phi)$ ile çarparak komp. eşleniğini al

$$(E_n|\phi) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle i|\phi\rangle (E_n|i\rangle$$

dönüşüm matrisinin matris elemanları.

$|i\rangle$ 'yi $|j\rangle$ ile skaler çarparsak,

$$\langle j|i\rangle = \delta_{ij} = \sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty} \langle j|E_n)(E_n|i\rangle$$ Üniterlik:

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (E_n|j\rangle^* (E_n|i\rangle$$

benzer şekilde,

$$(E_m|E_n) = \delta_{nm} = \sum_{j=1}^{\infty} (E_m|j\rangle\langle j|E_n) = \sum_j (E_m|j\rangle(E_n|j\rangle^*$$

Matris elemanları bu koşulu sağlayan matrise ÜNİTER matris denir. Ek olarak matris elemanları gerçel ⇒ ortogonal matris denir.

$|E_n)$ bazında A operatörünün matris elemanları $(E_n|A|E_m)$ verilirse, $\langle i|A|j\rangle$ matris elemanı (*) dönüşümü kullanılarak bulunur:

$$a_j \delta_{ij} = \langle i|A|j\rangle = \sum_n\sum_m \langle i|E_n)(E_n|A|E_m)(E_m|j\rangle$$

dönüşüm matrisi $(E_n|A|E_m)$ → matrisini diagonal hale getirir. Son ifadeyi $(E_p|i\rangle$ ile çarp ve i üzerinden topla

$$\sum_{m=1}^{\infty} (E_p|A|E_m)(E_m|j\rangle = a_j\ (E_p|j\rangle$$

Eğer a_j özdeğerleri bilinmiyor ⇒, matris notasyonunda bu bir özdeğer problemidir. Uzayın N-boyutlu olduğu durumda, bu N lineer homojen denk. sistemidir.

$$\sum_{m=1}^{N} \left[(E_n | A | E_m) - a\,\delta_{nm} \right] (E_m | j\rangle = 0$$

$$\det \left[(E_n | A | E_m) - a\,\delta_{nm} \right] = 0 \Rightarrow (E_m | j\rangle$$ 'nin sıfırdan farklı

çözümü vardır.

SÜREKLİ DURUMLAR

$$\{ |x\rangle \mid -\infty < x < +\infty \}$$

baz sist.'ine geri dönelim. ϕ vektörü sürekli x değişkeninin bir fonk.'u ile realize edilir:

$$\phi \leftrightarrow \langle x | \phi \rangle = \phi(x)$$

Bileşenleri $\langle x | \phi \rangle$, S fonk. uzayının elemanları olan vektörler

uzayı Φ özel durumunu ele alalım.

$|E_n)$ özvektörü, Φ uzayının özel bir vektörüdür; bunun sürekli baz sist.'i ile açılımı

$$|E_n) = \int dx\, |x\rangle \underbrace{\langle x | E_n)}$$

kesikli baz sist.'i ile sürekli baz sist.'i $|x\rangle$ arasındaki geçiş katsayıları.

x'in sbt. değeri için, $\langle x | E_n)$, E_n kesikli değerin fonksiyonu, E_n'nin sbt. değeri için sürekli x değişkenin fonksiyonudur.

BS K

Bu başka yerde de çıkar

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} |E_n)(E_n|\phi)$$

$$\langle x|\phi\rangle = \sum_n \langle x|E_n)(E_n|\phi\rangle$$

$\langle x|E_n\rangle$, S uzayında fonksiyonların özel kümesini oluşturur,

$$H|E_n) = E_n|E_n)$$

ile $\langle x|H|E_n) = E_n \langle x|E_n)$

özelliğine sahiptir. Bunlar H operatörünün özfonksiyonları olarak adlandırılırlar.

Örnek: Fonksiyonlar uzayı olarak, $|x| < a$ bölgesi dışında özdeş olarak sıfır olan, bütün $\phi(x) = \langle x|\phi\rangle$ fonksiyonlarının $K(a) \subset S$ alt uzayını seçelim.

Q operatörü, $\{x \mid -a < x < +a\}$ sürekli spektruma sahip olsun. Bir keyfi $\phi \in \Phi$ vektörünün spektral temsili

$$\phi = \int_{-a}^{+a} dx \; |x\rangle\langle x|\phi\rangle$$

olur. Öz eşlenik $H = P^2$ operatörü, herhangi $\phi \in \Phi$'nin her $\langle x|\phi\rangle$ bileşeni için,

$$\langle x|H|\phi\rangle = -\frac{d^2}{dx^2}\langle x|\phi\rangle$$

ile tanımlansın.

BS K

Q, P ve bunların herhangi kuvveti'nin Φ'de tanımlanması için, $\langle x|\phi\rangle$ bileşenler uzayı sürekli sonsuz defa türetilebilen fonksiyonlar uzayı olmalıdır. Bunun için

$$\int_{-a}^{+a} dx \left| x^n \frac{d^m}{dx^m} \langle x|\phi\rangle \right|^2 < \infty$$

dur. Dahası,

$$\langle x \geq a|\phi\rangle = \langle x \leq -a|\phi\rangle = 0$$

H'nin özvektörünü $|n\rangle$ ile gösterelim:

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle$$

Tüm E_n özdeğerlerini ve $\langle x|n\rangle$ geçiş katsayılarını bulmak istiyoruz.

$$\langle x|H|\phi\rangle = -\frac{d^2}{dx^2}\langle x|\phi\rangle \quad , \quad H|n\rangle = E_n|n\rangle$$

$\langle x|H|n\rangle = E_n\langle x|n\rangle$

$$-\frac{d^2}{dx^2}\langle x|n\rangle = E_n\langle x|n\rangle$$

Çözüm: $\langle x|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{a}}\cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) \quad n = 1,3,5,\ldots$

$$\langle x|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) \quad n = 2,4,6,\ldots$$

$\langle n|n\rangle = 1$ olacak şekilde seçildi.

özdeğerler: $E_n = \frac{n^2\pi^2}{4a^2}$

BS K

$$\langle n|n\rangle = \int_{-a}^{+a} dx \, \langle n|x\rangle\langle x|n\rangle$$

$$= \frac{1}{a}\int_{-a}^{+a} dx \cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) = 1$$

$$\langle n'|n\rangle = \int_{-a}^{+a} dx \, \langle n'|x\rangle\langle x|n\rangle = 0$$ orthogonallik.

Özfonksiyon açılımı:

$$\langle x|\phi\rangle = \phi(x) = \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) + \sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) \qquad |x|<a$$

$$= 0 \qquad |x|>a$$

$\phi(x) \in K(a)$ keyfi fonk.'nun Fourier seri gösterimi.

ϕ vektörünün koordinatları:

$$\sqrt{a}\, b_n = \langle n|\phi\rangle = \int_{-a}^{+a} dx \, \langle n|x\rangle\langle x|\phi\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-a}^{+a} dx \sin\left(\frac{n\pi}{2a}x\right)\phi(x) \qquad n=2,4,6,\ldots$$

$$\sqrt{a}\, a_n = \langle n|\phi\rangle = \int_{-a}^{+a} dx \cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right)\phi(x) \qquad n=1,3,5,\ldots$$

a_n ve b_n 'ler $\phi(x) = \langle x|\phi\rangle$ fonksiyonunun Fourier katsayısı

Genelde $\langle x|E_k\rangle$ 'ler trigonometrik değil ama diklik koşulu sağlar.

BS K

iki sürekli baz sistemi arasındaki geçiş katsayıları :

Φ için S_- tarafından realize edilen uzayı seçelim ve

$$\langle x | P | \phi \rangle = \frac{1}{i} \frac{d}{dx} \langle x | \phi \rangle \qquad \text{her } \phi \in \Phi \text{ için , yani, } \langle x|\phi\rangle \in S$$

ile tanımlanan P operatörünü alalım. Bu ifadeyi , ϕ'nin P'nin bir özvektörü olduğu durum için ele alalım.

$$P|p\rangle = p|p\rangle$$

$$\langle x | P | p \rangle = p \langle x | p \rangle = \frac{1}{i} \frac{d}{dx} \langle x | p \rangle$$

p'nin herhangi bir kompleks değeri için bu dif. denk.'in çözümleri vardır.

$$\langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ixp} \qquad p \in \mathbb{C}$$

bu çözümlerden hiçbirisi karesi integrallenebilir değildir, yani

$|p\rangle \notin \Phi$.

Herhangi bir $\phi \in \Phi$, P'nin özvektörlerinin $|p\rangle$ baz sistemine göre seriye açılabilir:

$$\phi = \int_{P'\text{nin spekt.}} dp\, |p\rangle\langle p | \phi \rangle$$

BS K

P'nin spektrumunu belirlemek istiyoruz. ϕ ile $|x\rangle$'in skaler çarpımını ele alalım:

$$\langle x|\phi\rangle = \int_{P'\text{nin spekt.}} dp \, \langle x|p\rangle\langle p|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dp \, e^{ipx} \langle p|\phi\rangle$$

buradaki p integrasyonu $-\infty < p < +\infty$ gerçel çizgisi boyunca uzanırsa,

$\phi(x) = \langle x|\phi\rangle$, $\tilde{\phi}(p) = \langle p|\phi\rangle$'nin Fourier dönüşümü'dür.

○ Fourier dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahiptir

$\phi(x)$, S uzayının bir elemanı olsun, ters dönüşüm

$$F_p^{-1}[\phi(x)] \equiv \tilde{\phi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, e^{-ixp} \phi(x)$$

ile tanımlanır.

○ (a) $F^{-1} : S \to S$ (onto) : $\tilde{\phi}(p) \in S$

(b) $\phi(x) = F_x[\tilde{\phi}(p)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \, e^{ixp} \tilde{\phi}(p)$ $\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\phi}(p) \in S \\ \Rightarrow \phi(x) \in S \end{array} \right.$

(c) $\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)^n \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \, p^n e^{ixp} \tilde{\phi}(p) = F_x[p^n \tilde{\phi}(p)]$

$n = 0, 1, \ldots$

şöyle de yazılabilir

$$\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)^n F_x[\tilde{\phi}(p)] = F_x[p^n \tilde{\phi}(p)]$$

BS K

(d) $$\left(-\frac{1}{i}\frac{d}{dp}\right)^n \tilde{\phi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^n e^{-ixp} \phi(x) = F_p^{-1}[x^n \phi(x)]$$

$$\left(-\frac{1}{i}\frac{d}{dp}\right)^n F_p^{-1}[\phi(x)] = F_p^{-1}[x^n \phi(x)]$$

(e) $$\int dx\, \psi^*(x)\phi(x) = \int dp\, \tilde{\psi}^*(p)\tilde{\phi}(p)$$

Böylece Fourier transformu F ve tersi F^{-1} x değişkenli Schwartz uzay fonksiyonları ve p değişkenli Schwartz uzay fonksiyonları S_p S_x

arasında iki karşılıklı izomorfizm kurar.

P'nin spekt: $= \{p \mid -\infty < p < +\infty\} \Rightarrow \mathbb{R}$.

P'nin spektrumu sürekli ve $|p\rangle$'ler genelleştirilmiş özvektörler

$|p\rangle \notin \Phi$.

$\{|x\rangle\}$ ve $\{|p\rangle\}$ genelleştirilmiş baz sist.'leri arasındaki geçiş katsayıları $p \in \mathbb{R}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ixp}$$ ile verilir.

$$\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ixp}$$

$$\langle p|x\rangle = \langle x|p\rangle^*$$

BS K

sürekli baz sist.'i cinsinden op.'lerin realizasyonu:

$$B\phi = \int dx\, B|x\rangle\langle x|\phi\rangle$$

$$\langle y|B\phi\rangle = \int dx\, \langle y|B|x\rangle\langle x|\phi\rangle$$

Bu, $\langle x|\phi\rangle$ fonksiyonunu $\langle y|\psi\rangle = \langle y|B\phi\rangle$ fonksiyonuna dönüştüren ~~integral dönüşümdür.~~

$\langle y|B|x\rangle$ matris elemanı integral dönüşümün çekirdeği olarak adlandırılır. $B = A$ ve $\phi = |i\rangle$ seçerek

$$\int dx\, \langle y|A|x\rangle\langle x|i\rangle = a_i\, \langle y|i\rangle$$

özdeğer ve özvektörler

BS K

I.6. Ortonormal Baz Fonksiyonlarının Bir Örneği :

Hermite Polinomları

S uzayındaki Q ve P operatörlerini alalım.

$$\langle x | Q | \phi \rangle = x \langle x | \phi \rangle \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$\langle x | P | \phi \rangle = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x} \langle x | \phi \rangle \qquad \langle x | \phi \rangle \in S$$

bunlar yardımı ile bir H tanımlayalım.

$$H = \frac{1}{2}\left(P^2 + Q^2\right)$$

ve bunun özvektörleri $|n)$ ile gösterilsin. $H|n) = E_n |n)$

Q, P, H ve bunlar tarafından doğurulan cebrin herhangi elemanının etkidiği uzayı Φ ile gösterelim. Böylece

$$\phi \in \Phi \iff \langle x | \phi \rangle \in S$$

(*) H'nin spektrumunun kesikli olması, H'nin $|n)$ özvektörlerinin

Φ uzayında ya da $\langle x | n) \in S$ olmasının bir sonucudur.

(*) Q-özvektörleri ve H-özvektörleri arasındaki geçiş katsayıları, S uzayının dik baz fonk.'larıdır.

(a) $\langle x | n \rangle$ ve E_n leri bulmak istiyoruz.

$\lambda = 2E_n$ ile gösterelim.

$$\Rightarrow \quad (P^2+Q^2)|n) = \lambda|n) \qquad x^2\langle x|n)$$

$$\langle x|P^2|n) + \langle x|Q^2|n) = \lambda\langle x|n\rangle$$

$$\int p'|p'\rangle \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ixp'}$$

$$= \int dp' \langle x|P|p'\rangle\langle p'|P|n) = \int dp'\, p' \langle x|p'\rangle\langle p'|P|n)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dp'\, p'\, e^{ixp'} \underbrace{\langle p'|P|n)}_{\langle p'|p'} \qquad \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\langle p'|n)$$

$$\cancel{= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x} \int dp'\, p'\, e^{ixp'} \langle p'|n) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dp\, e^{ixp'} \langle p'|n)}$$

?

$$= -\frac{d^2}{dx^2}\langle x|n)$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right) \overbrace{\langle x|n)}^{\psi(x)} = \lambda\langle x|n)$$

$$\psi'' + (\lambda - x^2)\psi = 0$$

Ek olarak $\psi(x) \in S$ olsun isteriz. Özellikle şu sınır koşullarını sağlasın:

$\psi(x \to \mp\infty) \to 0$, $\frac{1}{x}$'in polinomundan daha hızlı sıfıra gitsin.

$|x| \to \infty$ da oldukça terkedilen up yaklaşık olarak,

BS K

$$\psi'' - x^2 \psi = 0$$

ile verilir. $\Rightarrow$ $\psi \sim e^{\pm x^2/2}$ alınır.

Ansatz : $\psi(x) = C_1 e^{-x^2/2} y(x) + C_2 e^{x^2/2} y_2(x)$

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

y_2'li terim hızla artar ve S'nin elemanına götürmez, bu nedenle $C_2 = 0$ alınır.

$$\psi(x) = C_1 e^{-x^2/2} y(x)$$

$= 2n$

$$y'' - 2xy' + (\lambda - 1) y = 0 \qquad ; \; a_{k+2} = \frac{2k - (\lambda-1)}{(k+2)(k+1)} a_k$$

$\lambda = 2n+1 \Rightarrow E_n = n + \frac{1}{2} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

$$y(x) = H_n(x)$$

$$H_n'' - 2x H_n' + 2n H_n = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

Geçiş katsayıları : $\langle x | n) = \psi_n(x) = \frac{1}{N_n} e^{-x^2/2} H_n(x)$

$$(n|n) = \int dx \, (n|x\rangle\langle x|n) = \frac{1}{|N_n|^2} \int dx \, e^{-x^2} H_n^2(x) = 1$$

$$(n'|n) = \frac{1}{N_n N_{n'}^*} \int dx \, e^{-x^2} H_n(x) H_{n'}(x) = 0 \qquad n \neq n'$$

BS K $|N_n|^2 = \sqrt{\pi}\, n!\, 2^n$

$$\langle x | n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2} H_n(x)$$

I.6 'ya Ek: Normalizasyon katsayısını hesabı:

$f(t) = e^{-t^2+2tx}$ tüm fonksiyonunu t'ye göre Taylor serisine açalım.

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\, t^n \qquad |t|<\infty .$$

$$a_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right|_{t=0}$$

$f(t)$, x parametresinin her değeri için analitik bir fonksiyon olduğundan, Cauchy teoremi kullanılır.

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-t)^{n+1}}\, dz$$

integral $z=t$ noktasını çevreleyen kontur boyunca.

$$= \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{e^{-z^2+2zx}}{(z-t)^{n+1}}\, dz$$

$\Big|_{t=0}$ kullanılır

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{-z^2+2zx}}{z^{n+1}}\, dz$$

BS K

Cauchy teoremini $f(z) = e^{-z^2}$ fonk.'u için kullanırsak,

$$\underbrace{\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}} = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{e^{-z^2}}{(z-x)^{n+1}} dz$$

$$(-1)^n e^{-x^2} H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{e^{-z^2}}{(z-x)^{n+1}} dz$$

$z = x - t \qquad dz = -dt$

$$e^{-x^2} (-1)^n H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{1}{(-1)^n} \cdot \frac{e^{-(x-t)^2}}{t^{n+1}} dt$$

$$H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{e^{-t^2+2tx}}{t^{n+1}} dt$$

$a_n = \frac{1}{n!} H_n(x)$ bulunur.

$$\Rightarrow \boxed{e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x)\, t^n} \qquad |t| < \infty$$

doğuran fonk.

~~$e^{iyx - x^2/2}$ ile çarp ve integre et.~~

$$\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2tx - t^2 + iyx - x^2/2} dx = \int dx\, e^{iyx - x^2/2} \sum_n \frac{1}{n!} H_n(x)\, t^n}$$

$$\cancel{= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyx - x^2/2} H_n(x)\, dx}$$

BS K

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-t^2+2tx} \cdot e^{-s^2+2sx}\, e^{-x^2}$$

$$= \sum_n \sum_m \frac{t^n s^m}{n!\, m!} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)}_{\sqrt{\pi}\, n!\, 2^n \delta_{nm}}$$

$$LHS = e^{2st} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-(x-(s+t))^2} = e^{2st} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, e^{-\xi^2} = e^{2st} \sqrt{\pi}$$

$$= \sqrt{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2^\nu (st)^\nu}{\nu!}$$