BÖLÜM 2

KUANTUM MEKANİĞİNİN TEMELLERİ

HARMONİK OSİLATÖR

Bu bölümde Q.M.'nin temel postülaları harmonik osilatör örneği ile illüstre edilerek ortaya konulacaktır.

II.2. Q.M.'nin ilk postülası :

I. Ölçümü kural ile belirlenmiş fiziksel bir gözlenebilir, lineer bir uzayda lineer bir operatör ile temsil edilir. Bir fiziksel sistemin matematiksel görüntüsü, bir lineer skaler çarpım uzayı $\mathcal{H}$ içerisindeki bir operatör *_ cebiridir. Cebir bazı fiziksel nicelikler tarafından üretilir ve çarpım cebirsel bağıntılar ile tanımlanır.

I. aksiyomu tasvir etmek için 1D'lu harmonik osilatör örneğini kullanacağız. 1D'lu H.O. matematiksel görüntüsü aşağıdaki Hermityen operatörler ile üretilen operatörlerin cebiri olan fiziksel sistem olarak tanımlanabilir:

H : Gözlenebilir enerji.
P : " mom.
Q : " konum.

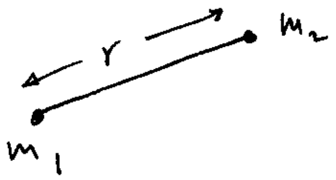
Bu op.'lar tarafından sağlanan cebirsel bağıntılar

$$[P,Q] \equiv PQ - QP = \frac{\hbar}{i} I$$

$$H = \frac{P^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2}{2} Q^2$$

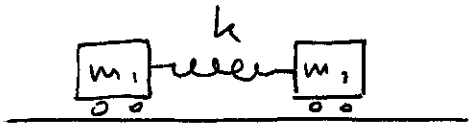
BS K

Klasik Harmonik Salınıcı :



$$F = -k\,(r - r_0) = -kx$$

$$V = +\frac{1}{2}kx^2 \quad , \quad E_k = \frac{1}{2\mu}p^2$$



$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad , \quad p = \mu \frac{dx}{dt} \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$E = \frac{1}{2\mu}p^2 + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$$

(reel sayılar) $\quad px - xp = 0$

Oysa, $AB - BA \neq 0$ (genelde) A, B operatörler.

Heisenberg Born, Jordan enerjinin kesikli değerli bir sist. olması için Mom ve konum'un şu matrisler ile verilmesi sonucuna vardılar.

$$P = -i\sqrt{\frac{\mu\omega\hbar}{2}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & \cdots \\ -\sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & \cdots \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Schrödinger Ansatz

$$p = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$$

,

$$Q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

farklı realizasyonlar.

II.3. Harmonik Osilatör Cebri

Harmonik osilatör cebrinin matematiksel özelliklerini bulmak bu cebrin operatörlerinin $\mathcal{H}$ uzayının vektörlerine nasıl etkidiğini bulmak anlamına gelir. Bunu yapabilmek için yeni bir operatör tanımlayalım:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}\,Q + \frac{i}{\sqrt{\mu\omega\hbar}}\,P\right); \quad a^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}\,Q - i\frac{1}{\sqrt{\mu\omega\hbar}}\,P\right)$$

$N = a^{+}a$ Hermitsel

$$N = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}\,Q - \frac{i}{\sqrt{\mu\omega\hbar}}\,P\right)\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}\,Q + \frac{i}{\sqrt{\mu\omega\hbar}}\,P\right)$$

$$= \frac{1}{\omega\hbar}H - \frac{1}{2}I = a^{+}a$$

$$[a, a^{+}] = aa^{+} - a^{+}a = I$$

$$H = \hbar\omega\, a^{+}a + \frac{\hbar\omega}{2}I = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}I\right)$$

N'nin özvektörleri H'nin özvektörleridir. N'ninkileri bulmak yeterlidir. $\mathcal{H}$'de N'nin herhangi bir özvektörü olsun ve bunun özdeğerini λ ile gösterelim:

$$N\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$$

BS K

$[a, a^+] = \mathbb{I}$ 'yi $N a \varphi_\lambda$ 'yı hesaplamak için kullanalım:

$$N a \varphi_\lambda = (a^+ a) a \varphi_\lambda = (a a^+ - \mathbb{I}) a \varphi_\lambda$$

$$= a (a^+ a - \mathbb{I}) \varphi_\lambda = a (N - \mathbb{I}) \varphi_\lambda$$

$$= a (\lambda - 1) \varphi_\lambda = (\lambda - 1) a \varphi_\lambda$$

$$\therefore \quad N a \varphi_\lambda = (\lambda - 1) a \varphi_\lambda$$

Öyleki ya $a\varphi_\lambda = 0$ ya da $a\varphi_\lambda$ $\lambda - 1$ özdeğerli N'nin bir özvektörüdür. Sonuncusunun doğru olduğunu varsayalım

$$\varphi_{\lambda-1} \equiv a \varphi_\lambda .$$

tanımlayabiliriz. Yukarıdaki hesaplamayı tekrarlarsak,

$$\varphi_{\lambda-2} = a a \varphi_\lambda$$

$$\cdots$$

$$\varphi_{\lambda-m} = a^m \varphi_\lambda \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

$\varphi_{\lambda-m} \neq 0$ olunca, bunlar özdeğeri $\underline{\lambda - m}$ olan N'nin özvektörleridir. Benzer bir şekilde

$$N (a^+ \varphi_\lambda) = (\lambda + 1)(a^+ \varphi_\lambda)$$

$\therefore \quad \tilde{\varphi}_{\lambda+1} \equiv a^+ \varphi_\lambda$ (ya sıfır vektör ya da özdeğeri $\lambda + 1$ olan N'nin özvektörüdür.)

Daima $\tilde{\varphi}_{\lambda+1} \neq 0$ vardır.

BS K

<u>İspat:</u> $a^+\varphi_\lambda = 0$ olsun.

$$\Rightarrow \quad \|a^+\varphi_\lambda\| = 0$$

$$\|a^+\varphi_\lambda\|^2 = (a^+\varphi_\lambda, a^+\varphi_\lambda) = (\varphi_\lambda, a a^+\varphi_\lambda)$$

$$= (\varphi_\lambda, a^+ a\varphi) + (\varphi_\lambda, \varphi_\lambda)$$

$$= \|a\varphi_\lambda\|^2 + \|\varphi_\lambda\|^2 > 0$$

$\varphi_\lambda \neq 0$ olduğundan, $\tilde{\varphi}_{\lambda+1}$ özdeğeri $\lambda+1$ olan N'nin bir özvektörüdür. Bu süreci tekrar ederek sıfırdan farklı ve N'nin özvektörleri olan $\tilde{\varphi}_{\lambda+n}$ $(n=0,1,2,\dots)$ vektörler dizisi elde edilir.

<u>$\varphi_{\lambda-m}$'nin sıfır olduğu zamanki durumu tanımlayalım:</u>

$$(\varphi_{\lambda-m}, N\varphi_{\lambda-m}) = (\lambda-m)(\varphi_{\lambda-m}, \varphi_{\lambda-m})$$

$$= (\lambda-m)\|\varphi_{\lambda-m}\|^2$$

$$(\varphi_{\lambda-m}, a^+ a\varphi_{\lambda-m}) = (\varphi_{\lambda-m}, N\varphi_{\lambda-m})$$

$$= \|a\varphi_{\lambda-m}\|^2$$

$$\Rightarrow \lambda - m = \frac{\|a\varphi_{\lambda-m}\|^2}{\|\varphi_{\lambda-m}\|^2} \geq 0$$

norm daima pozitif $\Rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{\lambda-m} \text{ özvektörler dizisi} \\ \text{sonlu bir basamaktan sonra} \\ \text{sonlanmalıdır. Ve} \end{array} \right.$

BS K

$$a\varphi_0 = 0$$

olacak şekilde bir φ_0 vektörü olmalıdır. φ_0 0 özdeğerli N'nin bir özfonksiyonu'dur, çünkü;

$$N\varphi_0 = a^+ a \varphi_0 = a^+ 0 = 0 = 0\varphi_0$$

Şimdi de normalize edilmiş özvektörleri tanımlayalım:

$$\phi_0 = \frac{\varphi_0}{\|\varphi_0\|}$$

$$\phi_1 = C_1 a^+ \phi_0$$

$$\vdots$$

$$\phi_n = C_n (a^+)^n \phi_0 \qquad C_n: \text{kompleks sayılar.}$$

ϕ_n: N'nin n özdeğerli özvektörleridir. ve C_n'ler ϕ_n'ler normalize olacak şekilde seçilirler.

$$N\phi_n = n\phi_n \quad ; \quad \|\phi_n\| = 1$$

C_n'lerin hesabı:

$$\phi_{n-1} = C_{n-1} a^{+^{n-1}} \phi_0$$

$$a^+\phi_{n-1} = C_{n-1} a^{+^n} \phi_0$$

$$1 = \|\phi_n\|^2 = |C_n|^2 \left(a^{+^n}\phi_0, a^{+^n}\phi_0\right)$$

(#) $\quad \oplus \quad (a^+\phi_{n-1}, a^+\phi_{n-1}) = |C_{n-1}|^2 \underbrace{(a^{+^n}\phi_0, a^{+^n}\phi_0)}_{1/|C_n|^2}$

$$\Rightarrow 1 = \frac{|C_n|^2}{|C_{n-1}|^2}\left(\phi_{n-1}, a a^+ \phi_{n-1}\right)$$

BS K

$$1 = \frac{|C_n|^2}{|C_{n-1}|^2}\left(\phi_{n-1}, (a^+a+1)\phi_{n-1}\right)$$

$$= \frac{|C_n|^2}{|C_{n-1}|^2}\left(\phi_{n-1}, (N+1)\phi_{n-1}\right)$$

$$= n\frac{|C_n|^2}{|C_{n-1}|^2}\left(\phi_{n-1}, \phi_{n-1}\right) = n\frac{|C_n|^2}{|C_{n-1}|^2}$$

$$n|C_n|^2 = |C_{n-1}|^2$$

$$1|C_1|^2 = |C_0|^2 \quad , \quad 2|C_2|^2 = |C_1|^2, \ldots$$

$$C_n = \frac{C_0}{\sqrt{n!}} \qquad C_0 = 1 \quad (\phi_0 \text{ normalize})$$

$$a\phi_0 = 0.$$

özelliğine sahip olan bir $\phi_0 \in \mathcal{H}$ vektörü ile başla, N'nin özvektörler sist.'ni elde etmek için a^+ operatörünü ϕ_0'a uygula

$$\phi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}a^{+n}\phi_0$$

bunun özdeğerleri $n = 0, 1, 2, \ldots$

(4) Bu özvektörler normalize olarak kurulduu ve sonlar farklı özdeğerleri olan Hermitsel op.'ların özvektörleri olduğundan ortogonaldirler de;

$$(\phi_n, \phi_{n'}) = \delta_{nn'}$$

ϕ_n : $\mathcal{H}$ içerisinde bir ortonormal sist. oluşturur.

Bu ortonormal sist. üzerinde a ve a^+ op.'leri şu bağıntılar ile tanımlanır:

$$a\phi_n = \sqrt{n}\,\phi_{n-1}$$

$$a^+\phi_n = \sqrt{n+1}\,\phi_{n+1}$$

a ve a^+'ın fonk.'ları olan H.S. cebrinin tüm elemanları, bu ortonormal sist.'in elemanları üzerinde tanımlanır.

$$\psi = \sum_n \alpha_n \phi_n$$

tüm vektörler kümesini alalım. (α_n: kompleks) toplam yeterince büyük ve sonlu n'ye kadar. Bu vektörler kümesi ϕ_n vektörleri tarafından gerilen uzay olarak adlandırılan bir lineer uzay oluşturur. ($\mathcal{H}$ ile göstereceğiz, ya da ayrıntıları bırakırsak Φ ile)

[$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \phi_n$ 'lerin uzayını $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty \Rightarrow \mathcal{H}$ ile

" $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2 (n+1)^p < \infty \Rightarrow \Phi$ ile

göstereceğiz. ($\Phi \subset \mathcal{H}$). Gözlenebilirleri temsil eden bütün operatörler bütün Φ uzayında tanımlanabilir, ama $\mathcal{H}$'nin tümü üzerinde tanımlanamaz. Her iki Φ ve $\mathcal{H}$ uzayı matematiksel genellemeler olmasına karşın, Φ fizik için daha uygundur.]

BS K

H enerji operatörünün köşegen matris elemanlarını sbt. bir n değeri için, ϕ_n vektörü arasında hesaplayalım:

$$H\phi_n = \hbar\omega\left(N+\frac{1}{2}\right)\phi_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\phi_n$$

$$(\phi_n, H\phi_n) = \hbar\omega(\phi_n, N\phi_n) + \hbar\omega\left(\phi_n, \frac{1}{2}\phi_n\right)$$

$$= \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)|\phi_n|^2 = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

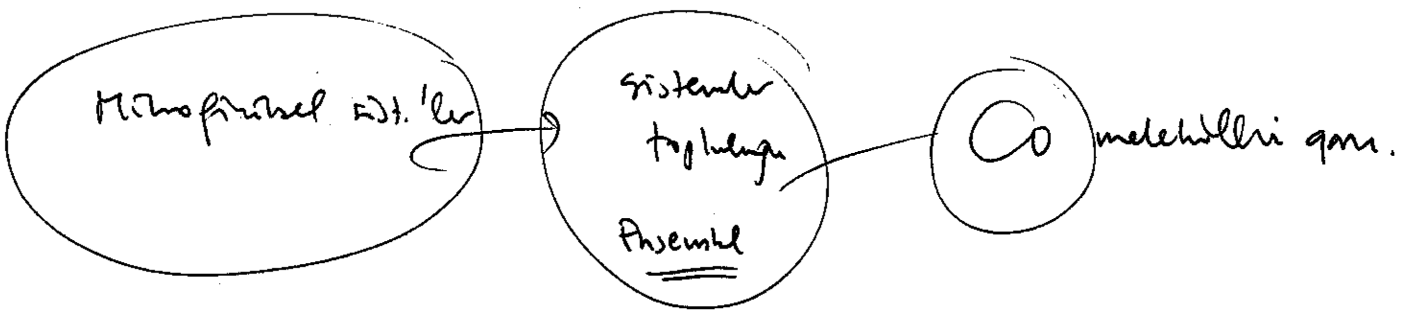
$$E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$\{E_n \mid n=0,1,2,\dots\}$: harmonik salınıcının enerji spektrumu.

II.4. Deneysel Veriler ve Q.M. Gözlenebilirler arasındaki ilişki

Klasik H.S. : $E = \frac{1}{2}ka^2$, $x(t) = a\sin(\omega t+\theta_0)$

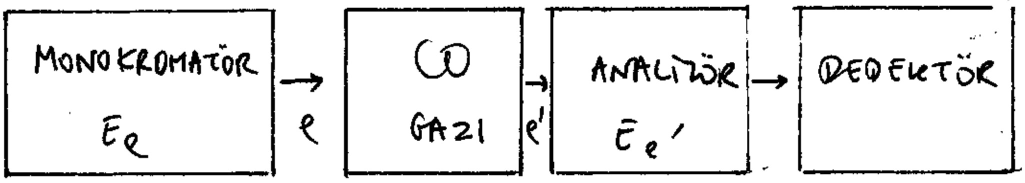
Q.M. H.S. da durum tamamen farklıdır. Bunu görmek için mikrofiziksel sist.'le bir benzetme deneyi gözönüne alacağız.



elektron demeti $\longleftrightarrow$ mermiler

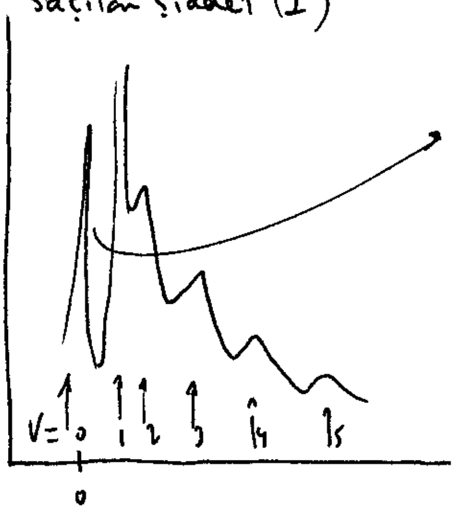
Bu tip deneylere : enerji-kaybı deneyleri denir. (Franck-Hertz 1914)

BS K



analizör tarafından belirlenmiş E_e' enerjisi değiştirilebilir

öyleyse $I = f(E)$, $E = E_e - E_e'$ bulunur

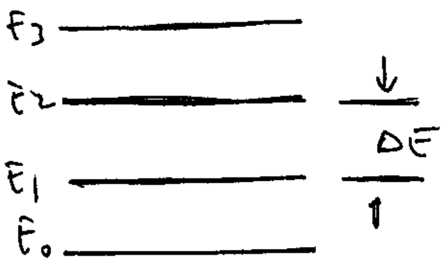


daha Max. Enerji kaybı : $E_0 = E_e - E_{e'} = 0$ elastik saçılma

$E_1 = 0.26$ eV, $E_2 = 2E_1 = 0.52$ eV

$E_0, E_1, E_2, \ldots$ CO için

Deneysel $\Delta E = \hbar\omega$



Enerji düzeyleri kesikli

$(\phi_n, H\phi_n)$ matris elemanı Q.M. sel osilatörün mümkün enerji değerlerini verir.

→ Elektronların tamamı elastik saçılma :⇒ tüm sist. ϕ_0'da (E_0 ile)

→ Tüm elektronlar aynı miktarda enerji kaybederse (deneyde 1 tepe varsa) $V=n_0$'da moleküller topluluğu ϕ_{n_0} durumundadır. (E_{n_0} ile) ⇒ SAF DURUM.

→ Deneyde enerji kaybı $E_0, E_1, E_2, \ldots$ şeklinde görülüyor ⇒ MIX //

BS K

Bu karışım,

$$\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots \quad \text{durumlar ve}$$

$$W_0, W_1, \ldots, W_n, \ldots \quad \text{relatif olasılıklar ile tarif edilir.}$$

burada W_n'ler E_n'ne karşı gelen h_n (tepenin yüksekliği) ile orantılı seçilir.

$$\sum_n W_n = 1 \quad (\text{normalize})$$

$N_n = W_n N$: E_n: enerjili moleküllerin sayısı.

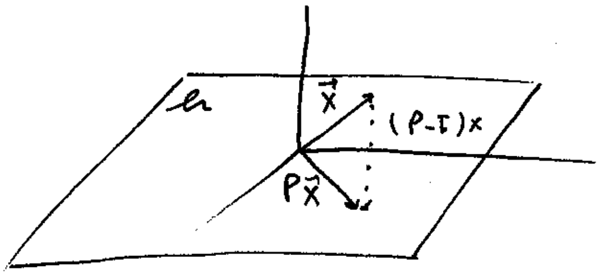
E_n enerjisini kaybeden elektronun (elektron akımının) bağıl şiddeti

BS K

Tüm $\phi \in \mathcal{H}$ için, $(\phi, W\phi) \geq 0 \Rightarrow$ bir W op. <u>pozitif</u> olarak adlandırılır. Bir P hermitsel operatörü ancak ve ancak $P^2=P$ ise bir izdüşüm operatörü ya da projektör olarak adlandırılır.

Kolayca görülür ki $h = \{\phi \in \mathcal{H} : P\phi = \phi\}$ kümesi $h \subset \mathcal{H}$ altuzaydır; çünkü $\phi, \psi \in h$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \Rightarrow$ o zaman, $P(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha P\phi + \beta P\psi = \alpha\phi + \beta\psi$, yani h bir sayı ile çarpma ve toplama altında kapalıdır. Başka bir şekilde, $h = \{P\phi ; \phi \in \mathcal{H}\}$, ve $h = P\mathcal{H}$ yazarız.

<u>Örnek</u>: $\mathcal{H} = \mathbb{R}^3$ olsun. 3D'lik Euclidean uzay h : xy düzlemi



$h = \mathbb{R}^2$ dır.

İki altuzay karşılıklı olarak diktirler. $h_1, h_2 \subseteq \mathcal{H}$. Eğer herbir $\phi \in h_1$, $\psi \in h_2$ için $(\phi, \psi) = 0$ yazabiliyor isek.

$h = \{\phi + \psi : \phi \in h_1$ ve $\psi \in h_2\}$ kümesi h_1 ve h_2'nin direkt toplamı olarak adlandırılır ve $h = h_1 \oplus h_2$ ile gösterilir.

$$h = \sum_i \oplus h_i = \{\sum_i \varphi_i \mid \varphi_i \in h_i\} \text{ oluşturulabilir}$$

h altuzayına izdüşüren bir P projektörü verilmiş ise <u>$1-P$'de bir projektördür</u>

BS K

İspat: $P^2=P$ olduğundan,

$$(I-P)^2 = I - IP - PI + P^2 = I - P - (\underbrace{\cancel{P-P^2}}_{0}) = I - P$$

$\therefore$: $I-P$ başka bir uzayı belirler ($h^\perp$): buradaki tüm vektörler h dekine diktir. Çünkü

$\phi \in h$ ve $\psi \in h^\perp \Rightarrow \phi = P\phi$ ve $\psi = (I-P)\psi$ dir.

($P^\dagger = P$ ve $P^2 = P$ özelliklerini kullanarak)

$$(\phi,\psi) = (P\phi, (I-P)\psi) = (\phi, P(I-P)\psi)$$

$$= (\phi, (P-P^2)\psi) = (\phi, 0\psi) = 0$$

Herhangi bir $\psi \in \mathcal{H}$ için,

$$\psi = P\psi + (I-P)\psi$$

yazabileceğimizden, herhangi bir P, $\mathcal{H}$'nin ortogonal alt-uzaylara ayrımını verir.

$$\mathcal{H} = h \oplus h^\perp .$$

Herhangi bir $\phi \in \mathcal{H}$ için $\{\alpha\phi \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$ kümesi $\mathcal{H}$'nin tek boyutlu bir altuzaydır ve ϕ tarafından gerilen bir uzaydır denir.

BS K

$\mathcal{H}$'nin bir $\{\phi_\gamma\}$ bazı verilmiş iken, A op.'nün izi

$$\mathrm{Tr}\, A \equiv \sum_\gamma (\phi_\gamma, A\phi_\gamma)$$

ile tanımlanır. (1°) seçilen ortonormal bazdan bağımsızdır, 2°) sonlu olmak zorunda değildir. Genelde, izini aldığımız op. için sonlu olduğunu varsayacağız)

$$\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$$

$$\mathrm{Tr}\,(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = \mathrm{Tr}\,(A_2 A_3 \dots A_n A_1)$$

$$\mathrm{Tr}\,((A+B)C) = \mathrm{Tr}\,(AC) + \mathrm{Tr}\,(BC)$$

]

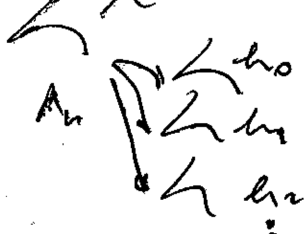
<u>Harmonik salınıcıya devam ....</u>

$$\begin{cases} \phi_0 \text{ tarafından gerilen uzay } h_0 \\ \phi_1 \quad '' \quad '' \quad '' \quad h_1 \\ \vdots \\ \phi_n \quad '' \quad '' \quad '' \quad h_n \end{cases}$$

O zaman $\mathcal{H}$: $\mathcal{H} = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus h_n$. ortogonal toplamdır

Λ_n : $(n = 0, 1, 2, \dots)$ h_n uzayları üzerine izdüşüren izdüşüm operatörleri olsun. O zaman

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Lambda_n = I$$



<u>Bu şunu söyler</u>: her $f \in \mathcal{H}$, h_n altuzaylarındaki $\Lambda_n f$ bileşenlerinin toplamı olarak yazılabilir:

BS K

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda_n f \quad , \text{ bu}$$

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n (\phi_n, f) = \sum_{n=0}^{\infty} |\phi_n\rangle\langle\phi_n|f\rangle$$ yazmaya özdeştir.

$\Rightarrow \phi_n$ bir bazdır. O halde $\Lambda_n = |\phi_n\rangle\langle\phi_n|$ olarak

yazılabilir ve

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} |\underbrace{\phi_n\rangle\langle\phi_n}_{\Lambda_n}| .$$

Bir ϕ birim vektörü tarafından gerilen tek-boyutlu bir alt uzayda izdüşüm op.'ü Λ'yı

$$\Lambda = |\phi\rangle\langle\phi|$$

ile göstereceğiz. H operatörünü, keyfi bir f vektörüne uygular isek,

$$Hf = \sum_{n=0}^{\infty} H|\phi_n\rangle\langle\phi_n|f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} E_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n|f$$

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} E_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n| = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \Lambda_n$$ H'nin spektral gösterimi.

Enerji özdeğerlerini

$$E_n = (\phi_n, H\phi_n)$$

iz ile ifade edelim:

$$E_n = Tr(H\Lambda_n)$$

BS K

İspat :

$$\Lambda_n \phi_\gamma = \begin{cases} \phi_n & n=\gamma \\ 0 & n \neq \gamma \end{cases}$$

$$Tr(H\Lambda) = \sum_\gamma (\phi_\gamma, H\Lambda_n \phi_\gamma) = \sum_\gamma (\phi_\gamma, H\phi_n)\delta_{\gamma n} = E_n$$

$\therefore$ Enerjisinin E_n olduğu H. osilatörün durumu

ϕ_n yerine $\rightarrow$ Λ_n proj. op. ile tarif edilebilir.

Λ_n ve ϕ_n aynı matematiksel nesneleri temsil etmezler:

Λ_n : $h_n = \Lambda_n \mathcal{H} = \{\Lambda_n f \mid f \in \mathcal{H}\}$ alt uzayını

temsil eder ki ϕ_n tarafından gerilen 1D'lu altuzaydır

(tek boyutlu alt uzay ışın ($\equiv$ ray) olarak adlandırılır).

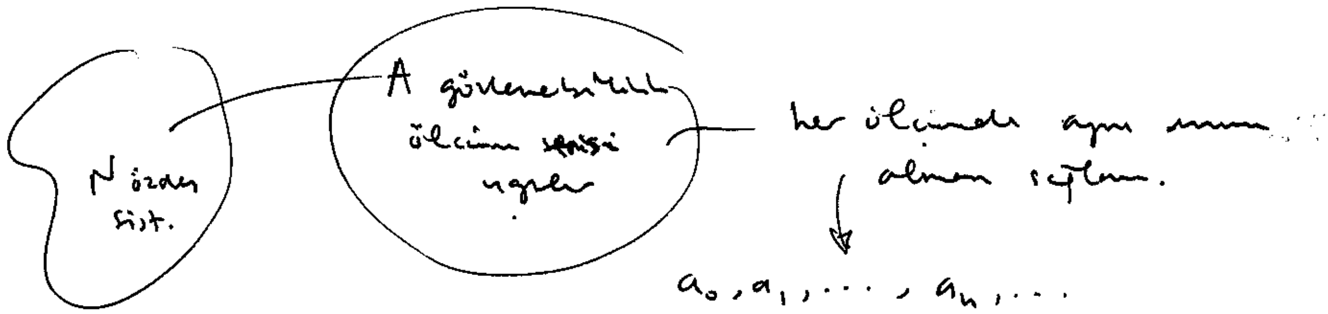
$\rightarrow$ h_n uzayı, birçok normalize vektörler içerir, yani ϕ_n dan bir faz çarpanı ile elde edilebilen tüm vektörler

$0 \leq \alpha \leq 2\pi$ $\quad e^{i\alpha}$ gibi.

$\|\phi\|=1$ olan $e^{i\alpha}\phi$ 'lerin kümesi $\rightarrow$ birim ışın olarak adlandırılır.

Genel olarak, bir fiziksel sist.'in saf durumu, bir vektör ile değil, tek boyutlu bir alt uzaya bir Λ proj. op. ile tasvir edildiğini varsayılır. Ancak, sadece Λ'yı değil, herhangi $\phi \in \mathcal{H}$'yi de bir durum ya da durum vektörü olarak adlandırırız.

$E_n = Tr(H\Lambda_n)$ ile tarif edilen sonuç özeldir, çünkü tek boyutlu Λ_n proj. op.'ü H'nin spektral gösterimindedir. A'nın spektral gösteriminde değil, tek boyutlu proj. op.'ü tarafından tarif edilen bir durumda A gözlenebilirinin ölçüldüğü yerde bu durum ortaya çıkar, [yani, $[A,H] \neq 0$]. O zaman Λ durumunda A gözlenebilirinin değeri $\langle A\rangle_\Lambda$, ya da $\langle A\rangle$ ile gösterilir ve A gözlenebilirini tanımlayan deneysel kurgu kullanılarak ölçmelerden belirlenir.



N_n : a_n sonucunu veren ölçümlerin sayısı. O zaman

$$\langle A\rangle = \sum_n \frac{N_n}{N} a_n \qquad (N \to \infty)$$

W_n

deneysel olarak belirlenmiş nicelik.

$\langle A\rangle \leftrightarrow Tr(A\Lambda)$ şimdilik saf bir durum için verilmiş olsun.

II'. Kuantum Mekaniksel bir sist.'in saf bir durumu tek boyutlu $\Lambda\mathcal{H}$ alt uzayı üzerindeki bir projeksiyon operatörü Λ ile (ya da tek boyutlu uzayın bizzat kendisi ile) karekterize edilir. $\langle A \rangle$ ortalama değeri (Λ durumunda fiziksel sist. üzerinde yapılmış deney ile belirlenmiş) $Tr(A\Lambda)$'ya

$$\langle A \rangle = \underbrace{Tr\,(A\Lambda)}_{R}$$

(A gözlenebilirinin beklenen değeri)

ile bağlıdır.

Örnek: Saf bir Λ_n durumunda Harmonik Salınıcı için, Λ_1 olsun, H'nin ölçümleri daima aynı değeri verir. Sonuç olarak

$$\langle H \rangle = \sum_n \frac{N_n}{N} E_n = \frac{N}{N} E_1$$

Böylece, Λ_1 saf durumunda, E_1 değeri için w_1 olasılığı $w_1 = 1$'dir ve bütün diğerleri $w_i = 0$'dır.

~~Saf bir A durumu~~, A gözlenebilirinin özdurumu ya da saf özdurumu olarak adlandırılır (eğer bu tek boyutlu $\Lambda\mathcal{H}$ uzayı A'nın bir ϕ özvektörü tarafından gerilirse) Böylece Harmonik S.'nın Λ_1 saf durumu H enerji gözlenebilirinin de bir özdurumu'dur. Genel olarak, fiziksel bir sist. tek boyutlu uzay tarafından tasvir edilen bir saf durumda olabilir ve bazı A gözlenebilirlerinin ölçümü (bunun durumu bir özdurum değildir!) farklı sayılar kümesi $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ verebilecektir. Bu durum kuantum mekaniğinin klasik teoriden ayrılan bir noktasıdır.

Karışım: (CO) Moleküllerin enerjisini N defa ölçersek, şunu buluruz:

$N_0 = w_0 N$ ölçüm E_0 değerini

$N_1 = w_1 N$ " E_1 "

$\vdots$

$N_n = w_n N$ " E_n " verecektir.

BS K

H enerji operatörünün $\langle H \rangle$ ort. değeri

$$\langle H \rangle = \sum_n w_n E_n = \sum_n w_n (\phi_n, H\phi_n)$$

bu karışık durumda H'nin beklenen değerine eşittir. Bunu bir operatörün izi olarak yazmak istiyoruz. Bunu yapmak için pozitif Hermitsel bir operatör ortaya koyarız:

$$W = \sum_n w_n \Lambda_n$$

her Λ_n ϕ_n tarafından gerilen H'nin bir lin. öz uzayı üzerinde bir projektör'dür.

$$Tr(HW) = \sum_\gamma (\phi_\gamma, HW\phi_\gamma) = \sum_\gamma \sum_n w_n (\phi_\gamma, H\Lambda_n \phi_\gamma)$$

$$\Lambda_n \phi_\gamma = \delta_{n\gamma} \phi_n$$

$$\Rightarrow Tr(HW) = \sum_\gamma \sum_n w_n (\phi_\gamma, H\phi_n)\delta_{n\gamma}$$

$$= \sum_n w_n (\phi_n, H\phi_n)$$

$$= \langle H \rangle$$

(W bir projektör op. değil! saf durumdakinden farklı olarak)

$$\boxed{\langle H \rangle = Tr(HW)}$$ Q.M.'nin II. postülası.

II. Bir Q.M.'sel sist.'in durumu pozitif Hermitsel bir W operatörü ile karakterize edilir. Bir A gözlenebilirinin beklenen değeri (ort. değer $\langle A \rangle$ olarak bir deneyde belirlenmiş)

$$\langle A \rangle = Tr(AW) \quad \text{eğer } Tr(W) = 1 \text{ ise}$$

$$\langle A \rangle = \frac{Tr(AW)}{Tr(W)}$$

istatiksel operatör ve onun matrisi yoğunluk matrisi olarak adlandırılır.

Eğer W, tek boyutlu bir altuzayda izdüşüm op.'ü ise bu sist.'in durumu saf olarak adlandırılır.

Wn olasılıklar $\sum_{n=0}^{\infty} W_n = 1$ olacak şekilde normalize edilir, bu istatiksel op.'ü $Tr\,(W)=1$ olacak şekilde normalize etmektir. W_n'ler yerine tepelerin yükseklikleri h_n bu durumları karakterize etmek için kullanılır. Bu durumda

$$\tilde{W} = \sum_n h_n \Lambda_n \qquad Tr\,\tilde{W} = \sum_n h_n \qquad W = \frac{\tilde{W}}{Tr(\tilde{W})} \quad (\text{göster!})$$

W ve $\tilde{W}$: Harmonik salınıcının aynı durumunu betimler. Ancak bu durumu karakterize etmek için $\tilde{W}$ kullanılırsa,

$$\langle H \rangle = \frac{Tr\,(H\tilde{W})}{Tr\,(\tilde{W})} \quad \text{ya da} \quad \langle A \rangle = \frac{Tr\,(A\tilde{W})}{Tr\,(\tilde{W})}$$

Bu 2. varsayım türetilemez, ancak tahmin edilebilir. (uzun proseslerle, çok çeşitli deneysel sonuçlardan)

$$W = \sum_n w_n \Lambda_n$$

ile verilen H. S'nun durumunu inceleyelim. E_p özdeğerli H'nın özuzayındaki Λ_p proj. op.'ü de bir gözlenebilirdir. Böylece W durumundaki Λ_p'nin beklenen değeri,

$$\langle \Lambda_p \rangle = Tr\,(\Lambda_p W) = \sum_n Tr\,(\Lambda_p \Lambda_n) w_n \;\left(= \sum_n \delta_{np}\, Tr(\Lambda_n)\, w_n = \underbrace{Tr\,(\Lambda_p)}_{1}\, w_p = w_p \right)$$

$$\Lambda_p \Lambda_n = \begin{cases} 0 & p \neq n \\ \Lambda_n & p = n \end{cases}$$

BS K

$$\langle \lambda_p \rangle = w_p$$

λ_p, enerji ölçümünde E_p değerini elde etme olasılığı beklenen değeri olan bir gözlenebilirdir, yani sistemi λ_p durumunda bulma olasılığı.

Özellikle, $W = \Lambda_n$ saf durum için

$$\langle \lambda_p \rangle = Tr(\Lambda_p \Lambda_n) = \begin{cases} 0 & p \neq n \\ 1 & p = n \end{cases}$$

Genellikle, projek. operatörleri beklenen değeri durum hakkında bize birşeyler söyleyen, property ya da proposition olarak adlandırılan özel bir çeşit gözlenebiliri temsil eder.

→ II. postüla: W istatistiksel operatörü yardımıyla ile beklenen değerin nasıl hesaplandığını ifade eder.

Sistemin hazırlanması: postüla $W = \sum_n w_n \Lambda_n$ (*)

bununla $E_0, E_1, \ldots$

$w_0, w_1, \ldots$ hesaplanır.

Λ_n'ler tek boyutlu olduğunda III. postüla'dır. Ancak tek boyutlu değil [Genelde A'nın (a_i özdeğerli) özvektörleri uzayı].

BS K

II.a Bir A gözlenebilirli aşağıdaki sonuçlarla ölçülmüş olsun:

$$a_1, a_2, \ldots$$
$$w_{a_1}, w_{a_2}, \ldots$$

burada w_{a_i}, a_i değerinin ölçüldüğü bağıl frekanstır (yani N ölçmeden sonra a_i değeri $w_{a_i} \cdot N$ defa oluşsun), o zaman ölçmeyi hemen izleyen sist.'in durumu W istatistiksel operatörü ile temsil edilir.

$$W = \sum_{a_i} w_{a_i} \Lambda_{a_i} \frac{1}{\underbrace{\dim(\Lambda_{a_i}\mathcal{H})}} \quad (*)$$

Λ_{a_i} : a_i özdeğerli A'nın özuzayları üzerindeki izdüşüm operatörleridir.

$= Tr(\Lambda_{a_i})$: $\Lambda_{a_i}\mathcal{H}$ uzayının boyutunu gösterir.

<u>Özel Durum:</u> a_n, $w_n = 1$ olasılığı ile ölçülsün ve bütün diğerleri $w_i \ (i \neq n) = 0$ olsun.

$$W = \Lambda_{a_n} \frac{1}{\dim(\Lambda_{a_n}\mathcal{H})} \quad \text{olarak seçilir}$$

$$\langle A \rangle = Tr(AW) = \frac{1}{\dim(\Lambda_{a_n}\mathcal{H})} Tr(A\Lambda_{a_n}) = a_n \quad \underline{\text{beklenen değer}},$$

$$w_{a_n} = \langle \Lambda_{a_n} \rangle = Tr(\Lambda_{a_n} W) = \frac{1}{\cancel{\dim(\Lambda_{a_n}\mathcal{H})}} \cancel{Tr(\Lambda_{a_n})} = 1.$$

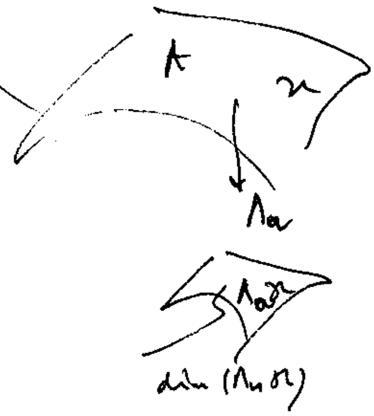
(*) İstatistiksel operatörü, A'nın ölçümünün hemen tekrarı için, kesinlikle a_n değerini öngörür.

BS K

Biraz daha fazla Matematik: !!!

I. Özdeğeri a olan A'nın özvektörlerinin $\Lambda_a \mathcal{H}$ uzayı $\dim(\Lambda_a \mathcal{H})$ boyutuna sahipse, o zaman $\dim(\Lambda_a \mathcal{H})$ tane lineer bağımsız özvektör vardır. Özdeğeri a olan A'nın $\dim(\Lambda_a \mathcal{H})$ karşılıklı ortonormal özvektörlerinin keyfi bir bazı seçilebilir, yani

$$\phi_a^1,\ \phi_a^2,\ \ldots,\ \phi_a^k,\ \ldots,\ \phi_a^{\dim(\Lambda_a \mathcal{H})}$$ vektörler kümesi



bunlar şu koşulları sağlar:

$$A\phi_a^k = a\,\phi_a^k\,, \qquad (\phi_a^k, \phi_a^{k'}) = \delta_{kk'}$$

()

bütün uzay için baz,

$$\phi_{a_1}^1,\ \phi_{a_1}^2,\ \ldots,\ \phi_{a_1}^{\dim(\Lambda_{a_1}\mathcal{H})}$$

$$\vdots$$

$$\phi_{a_j}^1,\ \phi_{a_j}^2,\ \ldots,\ \phi_{a_j}^{\dim(\Lambda_{a_j}\mathcal{H})}$$

$$\vdots$$

() ile verilir. Genelde, $\dim(\Lambda_{a_i}\mathcal{H}) \neq \dim(\Lambda_{a_j}\mathcal{H})$

$\dim(\Lambda_{a_j}\mathcal{H})$ den herhangi biri ∞ olabilir ya da olmayabilir.

keyfi bir $f \in \mathcal{H}$

$$f = \sum_{a_i} \sum_{k=1}^{\dim(\Lambda_{a_i}\mathcal{H})} |\phi_{a_i}^k\rangle\langle\phi_{a_i}^k|f\rangle$$

şeklinde yazarız.

$$Af = \sum_{a_i,k} a_i\, |\phi_{a_i}^k\rangle\langle\phi_{a_i}^k|f\rangle \quad \Rightarrow \quad A = \sum_{a_i,k} a_i\, |\phi_{a_i}^k\rangle\langle\phi_{a_i}^k|$$

BS K

$$A = \sum_{a_i} a_i \underbrace{\sum_k |\phi_{a_i}^k\rangle\langle\phi_{a_i}^k|}_{\Lambda_{a_i}}$$

Λ_{a_i} operatörü özdeğeri a_i olan A'nın özvektörlerinin $\Lambda_{a_i}\mathcal{H}$ alt uzayı üzerine bir izdüşüm operatörüdür.

Çünkü;

$$\Lambda_{a_i}\Lambda_{a_j} = \sum_k \sum_{k'} |\phi_{a_i}^k\rangle\underbrace{\langle\phi_{a_i}^k|\phi_{a_j}^{k'}\rangle}\langle\phi_{a_j}^{k'}|$$

$$= \sum_k |\phi_{a_i}^k\rangle\langle\phi_{a_j}^{k'}| \, \delta_{a_i a_j} \delta_{kk'}$$

$$= \Lambda_{a_i} \delta_{a_i a_j}$$

$$A(\Lambda_{a_i} f) = \sum_k a_i |\phi_{a_i}^k\rangle\langle\phi_{a_i}^k|f\rangle = a_i (\Lambda_{a_i} f)$$

Böylece, $\boxed{A = \sum_{a_i} a_i \Lambda_{a_i}}$ A operatörünün spektral gösterimi. Λ_{a_i} kümesi, spektral aile olarak bilinir.

A operatörünün spektral ailesine göre özdeşlik operatörü I'nın ayrımı:

$$I = \sum_{a_i,k} |\phi_{a_i}^k\rangle\langle\phi_{a_i}^k| = \sum_{a_i} \Lambda_{a_i}$$

bu $\langle A\rangle = \mathrm{Tr}(AW) = a_n$ 'nin ispatıdır.

$$\mathrm{Tr}(A\Lambda_n) = \sum_{jk} (\phi_{a_j}^k, A\Lambda_{a_n}\phi_{a_j}^k) = \sum_k (\phi_{a_n}^k, A\phi_{a_n}^k)$$

$$= \sum_k a_n (\phi_{a_n}^k, \phi_{a_n}^k) = a_n \dim(\Lambda_{a_n}\mathcal{H})$$

BS K

Sıra değiştiren operatörler:

iki A ve B Hermitsel op.'ü sıradeğiştiren olarak adlandırılır ancak ve ancak

$$AB = BA \quad , \quad [A, B] = 0$$

Λ_{a_i} ; A'nın spektral ailesi

P_{b_i} ; B'nin " " olsun. A ve B'nin sıradeğiştirmesi,

$$\Lambda_{a_i} P_{b_j} = P_{b_j} \Lambda_{a_i} \qquad \text{her }, a_i \text{ ve } b_j$$

Böylece, $A P_{b_j} = P_{b_j} A$ her b_j için ise A ile B sıradeğiştirir.

Operatörler fonk.'u:

$f(a_i)$; a_i kesikli değişkeninin bir fonk.'u olsun.

$$f(A) = \sum_{a_i} f(a_i) \Lambda_{a_i}$$

ile $f(A)$ operatörünü tanımlarız.

$$[A, B] = 0 \Rightarrow [f(A), B] = 0 .$$

BS K

$$W = \sum_{a_i} w_{a_i} \Lambda_{a_i} \frac{1}{\dim(\Lambda_{a_i}\mathcal{H})}$$

$$A = \sum_{a_i} a_i \Lambda_{a_i}$$

bunları karşılaştırırsak, ilk Hermitsel op. W 'nın A gözlenebilirinin $\{\Lambda_{a_i}\}$ spektral ailesine göre spektral temsilidir. Dolayısı ile

$$\frac{w_{a_i}}{\dim\{\Lambda_{a_i}\mathcal{H}\}} \quad ; W\text{'nın özdeğerleri}$$

A'nın beklenen değeri için ilkinden,

$$Tr(AW) = \sum_{a_i} w_{a_i} \frac{1}{\dim(\Lambda_{a_i}\mathcal{H})} Tr(A\Lambda_{a_i}) \quad a_n \dim(\Lambda_{a_n}\mathcal{H})$$

$$\langle A \rangle = Tr(AW) = \sum_{a_i} w_{a_i} a_i$$

#1 özdeğeri a olan A'nın özuzayındaki Λ_a izdüşüm operatörü a gözlenebilirinin olasılığını temsil eder. Bunu görmek için:

$$Tr(\Lambda_a W) = \sum_{a_i} w_{a_i} Tr(\underbrace{\Lambda_a \Lambda_{a_i}}_{\delta_{a_i a}\Lambda_a}) \frac{1}{\dim(\Lambda_{a_i}\mathcal{H})}$$

$$= \sum_{a_i} w_{a_i} \delta_{a_i a} Tr(\Lambda_a) \frac{1}{\dim(\Lambda_{a_i}\mathcal{H})} = w_a$$

Böylece, W istatiksel operatörü bir gözlenebilirinin ~~[illegible]~~ ölçümünün hemen tekrarı orijinal ölçüm ile aynı sonuçları verir. Bir durumun hazırlanmasını oluşturan hiçbir ölçüm yapılmazsa, bu duruma ait hiçbir bilgi elde edilmez, o zaman her saf durumun eşit olasılıkta olduğunu varsayarız. Böyle bir durum için istatiksel op. birim op. ile orantılı olmalıdır.

$$\tilde{W} = I$$

BS K

Bu hipotez – bir ölçmede etkilenmemiş properties aynı olasılık ile vuku bulur varsayılır – III a temel varsayımında ele alınmıştır. Orada, $k = 1, 2, \ldots \dim(\Lambda_{a_i}\mathcal{H})$ farklı değerler arasında ayrım yapan hiçbir gözlenebilir ölçülmemişti. Böylece şu varsayıldı:

(*) Herbir a_i için $|\phi_{a_i}^1\rangle\langle\phi_{a_i}^1|, |\phi_{a_i}^2\rangle\langle\phi_{a_i}^2|, \ldots, |\phi_{a_i}^k\rangle\langle\phi_{a_i}^k|$

saf durumlarının herhangi biri aynı olasılıkla görülür, yani olasılık;

$$W_{a_i}^k = Tr\left(|\phi_{a_i}^k\rangle\langle\phi_{a_i}^k| W\right) = \sum_{a_j} Tr\left(|\phi_{a_i}^k\rangle\langle\phi_{a_i}^k|\Lambda_{a_j}\right)\frac{W_{a_j}}{\dim(\Lambda_{a_j}\mathcal{H})}$$

$$= \sum_{a_j k'} Tr\left(|\phi_{a_i}^k\rangle\underbrace{\langle\phi_{a_i}^k|\phi_{a_j}^{k'}\rangle}\langle\phi_{a_j}^{k'}|\right)\frac{W_{a_j}}{\dim(\Lambda_{a_j}\mathcal{H})}$$

$$= \frac{W_{a_i}}{\dim(\Lambda_{a_i}\mathcal{H})}$$

Dahası, $\psi \in \Lambda_{a_i}\mathcal{H}$ vektörü ile taşınır edilen $\Lambda_{a_i}\mathcal{H}$ uzayının herhangi diğer saf durumu da bu olasılık ile görülür, çünkü bu olasılık

$$W_{a_i}^\psi = Tr\left(|\psi\rangle\langle\psi| W\right) = \sum_{a_i k'} Tr\left(|\psi\rangle\langle\psi|\phi_{a_i}^{k'}\rangle\langle\phi_{a_i}^{k'}|\right)\frac{W_{a_i}}{\dim(\Lambda_{a_i}\mathcal{H})}$$

$$= \left(\sum_{a_i k'} |\langle\psi|\phi_{a_i}^{k'}\rangle|^2\right)\frac{W_{a_i}}{\dim(\Lambda_{a_i}\mathcal{H})} = \frac{W_{a_i}}{\dim(\Lambda_{a_i}\mathcal{H})}$$

$$1 = \|\psi\|^2 = \sum_{a_j k} |\langle\psi|\phi_{a_j}^k\rangle|^2 =$$

$$= \sum_k |\langle\psi|\phi_{a_i}^k\rangle|^2$$

$\langle\psi|\phi_{a_j}^k\rangle = 0 \quad a_i \neq a_j$ için

Λ_{a_i} operatörü, a_i özdeğerli A'nın özvektörleri $\Lambda_{a_i}\mathcal{H}$ uzayında birim işlemcidir. Bu da $\tilde{W} = I$ ile $\Lambda_{a_i} = \sum_k |\phi_{a_i}^k\rangle\langle\phi_{a_i}^k|$ karşılaştırılarak görülür. O zaman,

$$W = \Lambda_{a_n} \frac{1}{\dim(\Lambda_{a_n}\mathcal{H})}$$

bağıntısı: W, a_i özdeğerli A'nın özfonksiyonları altuzayında birim operatör ile verilir (normalizasyon dışında, ki bu da Tr W = 1 olarak seçilir). der.

Sist.'in termodinamik dengede olduğu bilinir ise, O zaman W

$$\tilde{W} = e^{-H/kT}$$

Gibbs dağılımı olarak seçilir. H: enerji op. IIa'nın sonuçlarından biri şudur: Herhangi bir deneyde ölçülen bir gözlenebilirin mümkün değerleri, bunun op.'nün özdeğerleridir. Bu şu demektir: teori tahmin sürecinde, bir gözlenebilirini temsil eden operatör öyle seçilmelidir ki sözü geçen gözlenebiliri ölçen deneyde elde edilmiş bütün değerler, bu op.'ün özdeğerleridir.

III.b. <u>Bir sist. W durumunda olsun ve bir B gözlenebilir bu sist. üzerinde ölçülsün.</u> B'nin özdeğerleri $b_1, b_2, \ldots$ ve karşılığı olan özuzaylar üzerindeki projek. operatörleri $\Lambda_{b_1}, \Lambda_{b_2}, \ldots$ olsun. O zaman ölçümden sonra sist.'in durumu,

$$W' = \sum_{b_i} \Lambda_{b_i} W \Lambda_{b_i}$$

ile verilir. Eğer bu ölçüm belirli bir alt topluluğu B'nin kesin bir b değeriyle seçmek için kullanılırsa, o zaman durum

$$W' = \frac{1}{\mathrm{Tr}(\Lambda_b W \Lambda_b)} \Lambda_b W \Lambda_b$$

ile verilir.

BS K

Bir gözlenebilirin ölçümünün, W durumunu değiştirmediği özel bir durum vardır; bu, ancak B'nin, W ile sıradeğiştiren gözlenebilirleri temsil ettiği durumdur. çünkü,

$$[B, W] = 0$$

$$W' = \sum_i \Lambda_{b_i} W \Lambda_{b_i} = \sum_i \Lambda_{b_i} \Lambda_{b_i} W = \sum_i \Lambda_{b_i} W$$

$$= W \quad , \quad \sum_i \Lambda_{b_i} = I$$

(iki gözlenebilir compatible olarak adlandırılır, eğer birinin ölçümü, diğerinin ölçülmesi ile hazırlanan durumu değiştirmezse. önceki tartışmamızda compatible gözlenebilirlerin commuting observable ile temsil edildiğini görmüştük.

noncommuting operatörler $\longrightarrow$ incompatible ✓

$$W_1 = \Lambda_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$$

$$W_2 = \Lambda_\phi = |\phi\rangle\langle\phi|$$

gibi iki saf durumumuz olsun. Yeni bir durum elde etmek için bunları ~~karıştırır~~ karıştırabiliriz:

$$W = \lambda W_1 + (1-\lambda) W_2 \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

W_1 ve W_2 saf durumlarının $\lambda/(1-\lambda)$ oranında karıştığı bir durum.

ϕ ve ψ dik $\Rightarrow$ $\Lambda_\psi \Lambda_\phi = 0$, bunları eşit oranda karıştırırsak, $\lambda = 1/2$

O zaman; $\quad W = \frac{1}{2}(\Lambda_\psi + \Lambda_\phi) = \frac{1}{2}\Lambda$

Λ: ϕ ve ψ tarafından gerilen 2 boyutlu alt uzaydan üzerine izdüşürür.

Λ_ψ özelliğini bulma olasılığı

$$w_\psi = Tr(\Lambda_\psi W) = \frac{1}{2} Tr\left(\Lambda_\psi(\Lambda_\psi + \Lambda_\phi)\right) = \frac{1}{2}$$

BS K

İki Λ_ψ ve Λ_ϕ saf durum ile yeni durum vektörleri tanımlayalım.

$$\alpha_1 \psi + \alpha_2 \phi \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$$

bütün bu vektörler saf durumlar temsil eder. Örneğin $\alpha = 1/\sqrt{2}$ seçersek

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi + \phi)$$

$$\Lambda_\chi = |\chi\rangle\langle\chi| \quad \text{saf durum.}$$

Λ_χ durumu, Λ_ψ ve Λ_ϕ durumlarının süperpozisyonu.

İki durumun süperpozisyonunu belirlemek için sadece α_1 ve α_2 lerin sayısal büyüklükleri değil, onların fazları da önemlidir:

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = -\alpha_2 \quad \text{seçilirse,} \qquad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi - \phi)$$

$\Lambda_\eta = |\eta\rangle\langle\eta|$ (Λ_χ dan farklı saf durum.) χ ve η birbirine dik.

W bileşimi ile $\alpha_1\psi + \alpha_2\phi$ bileşimi farklıdır. 2.ciye koherent bileşim olarak adlandırılır. Harmonik salınıcıların $\Lambda_n = |\phi_n\rangle\langle\phi_n|$ $(n=1,2,\ldots)$ enerji özdurumlarının inkoherent bileşimi:

$$W = \sum_n w_n \Lambda_n$$

ϕ_n enerji özvektörlerinin en genel koherent bileşimi:

$$\psi = \sum_n \alpha_n \phi_n$$

α_n'nin büyüklük ve fazlarında herhangi bir değişme (ψ'nin genel büyüklük ve faz değişimi dışında) farklı bir saf Λ_ψ durumu taşıyan eden bir vektör verir. Herhangi bir durum vektörü iki ya da daha fazla durum vektörünün üstüste bindirilmesi sonucu olarak görülebilir ve bu sonsuz sayıda yolla yapılabilir. Çünkü,

BS K

H'nin ϕ_n özvektörleri yerine, ψ vektörünün açılımı için $\mathcal{E}$ uzayının herhangi başka bir bazı seçilebilir. Tersine olarak, iki ya da daha fazla durum vektörleri yeni bir durum vektörü vermek üzere üstüste bindirilebilir. Bu süperpozisyon ilkesi $\mathcal{E}$ lineer uzayının

$$\phi + \psi = \psi + \phi$$

özelliğinin bir sonucudur. χ ve η süperpozisyonlar, orijinal ψ ve ϕ vektörleri ile aynı iki boyutlu uzayı gerer ve bu 2 boyutlu uzaydaki $W = \frac{1}{2}\Lambda$ izdüşüm op.'ü

$$\Lambda = \Lambda_\chi + \Lambda_\eta$$

olarak yazılabilirdi. Böylece W karışık durum,

$$W = \frac{1}{2}\left(\Lambda_\psi + \Lambda_\phi\right) = \frac{1}{2}\left(\Lambda_\chi + \Lambda_\eta\right)$$

ile verilir ve Λ_χ saf durum ile Λ_η saf durumunun $w_\chi = w_\eta = 1/2$ karışım oranında karışımı olarak görülebilir.

BS K

II.5 Temel Varsayımların Harmonik Osilatöre Uygulaması ve Bazı Tarihsel Notlar:

Harmonik osilatörün durumu

$$W = \Lambda_n$$

olarak bulunur. (Λ_n, ϕ tarafından gerilen uzayda izdüşüm op.) Bu durumda enerjinin ölçümü daima E_n verir. Saf Λ_n durumunda, P mom.'unun beklenen değeri:

$$\langle P \rangle = Tr(PW) = Tr(P\Lambda_n) = \sum_m (\phi_m, P\Lambda_n \phi_m)$$

$$= (\phi_n, P\phi_n) = \langle n | P | n \rangle$$

sonuç: $\langle P \rangle = 0$

Not: $a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{\mu w}{\hbar}}\, Q + \frac{i}{\sqrt{\mu w \hbar}} P \right)$ $\quad a^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{\mu w}{\hbar}}\, Q - \frac{i}{\sqrt{\mu w \hbar}} P \right)$

benzer şekilde $\langle Q \rangle = 0$ bulunur.

$$\langle P^2 \rangle = (\phi_n, P^2 \phi_n), \quad P^2 = -\frac{\mu w \hbar}{2} (a^{+} - a)^2$$

$$= \mu w \hbar \left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad Q^2 = \frac{\hbar}{2\mu w} (a^{+} + a)^2$$

$$\langle Q^2 \rangle = \frac{\hbar}{\mu w} \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

P, Q, P^2, Q^2 gözlenebilirlerinin beklenen değerleri tek bir şekilde belirlenmesine karşın, bir A gözlenebilirinin herhangi bir ölçüm için aynı a_i değerini elde etmeyi beklememeliyiz. Beklediğimiz A'nın Λ_n üzerindeki bir çok tekrarlanmış ölçümler serisindeki elde edilmiş değerlerin ortalaması $\langle A \rangle$'dır, ki bu değer tek bir şekilde belirlenir.

BS K

Genelde, 1. ölçmede a_1, 2. ölçmede a_2, ... gibi elde edilen değerler birbirinden tamamen farklıdır ve geniş olarak dağınıktır. Nicel olarak ölçülmüş değerlerin dağınımını tasvir etmek için, herhangi bir gözlenebilir A ve W durumu için,

$$(A - \langle A \rangle I)^2$$

yeni bir gözlenebilir tanımlayalım: Ölçülen $a_1, a_2, \ldots$ değerlerinin dağınımını tasviri için bunun uygun olduğunu görmek için, W durumunda bunun beklenen değerini alalım. Bunu W durumunda A'nın dağınımı olarak adlandıracağız.

$$\mathrm{disp}_{(W)} A \equiv \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle_W$$

$$= \mathrm{Tr}(A^2 W) - 2\,\mathrm{Tr}(A \langle A \rangle_W W) + \mathrm{Tr}(\langle A \rangle_W^2 W)$$

$$= \mathrm{Tr}(A^2 W) - (\mathrm{Tr}(AW))^2 = \langle A^2 \rangle_W - \langle A \rangle_W^2$$

$(\mathrm{Tr}\, W = 1$ varsaydım.$)$

$$\mathrm{disp}_{(W)} A = \langle A^2 \rangle_W - \langle A \rangle_W^2$$

Özel olarak, Harmonik os. için Λ_n durumunda H gözlenebilirliği ki

$$\mathrm{disp}_{(\Lambda_n)} H = \mathrm{Tr}(H^2 \Lambda_n) - (\mathrm{Tr}(H \Lambda_n))^2$$

$$= (\phi_n, H^2 \phi_n) - E_n^2 = 0$$

Genel olarak, A'nın Λ saf durumunda dağınımı sıfırdır. Ama tersi doğru değildir.

BS K

Dejenere spektrumlu bir gözlenebilir A olsun. Bir W durumu, eğer W

$$W = \sum_k w^k \, |\phi_a^k\rangle\langle\phi_a^k|$$

şeklinde temsil edilebilirse, A gözlenebilirinin özdurumu olarak adlandırılır; burada a) $w^k \geq 0$, b) $\sum_k w^k = 1$ ve c) ϕ_a^k, $k=1,2,\dots,\dim\Lambda_a\mathcal{H}$, a özdeğerli A'nın $\Lambda_a\mathcal{H}$ özuzayının herhangi bir bazıdır.

Bu özdurumun özel hali $w^k = w = (\dim\Lambda_a\mathcal{H})^{-1}$ alındığında,

$$W = \Lambda_a \frac{1}{Tr(\Lambda_a)}$$

ile verilir. Harmonik Os. için Λ_n enerji özdurumu, P ve Q gözlenebilirlerinin her biri için bir özdurum değildir, bu nedenle dağınım sıfırdan farklıdır.

$$disp_{(\Lambda_n)} P = \langle P^2\rangle - \cancel{\langle P\rangle^2} = \hbar\mu\omega\left(n+\tfrac{1}{2}\right)$$

$$disp_{(\Lambda_n)} Q = \frac{\hbar}{\mu\omega}\left(n+\tfrac{1}{2}\right)$$

Dağınımın karekökü, W durumundaki A'nın belirsizliği denir ve ΔA ile gösterilir,

$$\Delta A = \sqrt{disp\, A}$$

$$\Delta P \Delta Q = \hbar\left(n+\tfrac{1}{2}\right)$$

Harmonik os.'un herhangi bir saf enerji özdeğeri için

$$\Delta P \Delta Q \geq \hbar/2$$

Bu $[P,Q] = \frac{\hbar}{i} I$ 'nın bir sonucudur.

BS K

Şimdi, $W \equiv \sum_n w_n \Lambda_n$ ile tasvir edilen enerji kayıp deneyinin W karışımını ele alalım. Tanım olarak

$$\text{disp}_{(W)} H = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 = \sum_\nu E_\nu^2 w_\nu - \left(\sum_\nu w_\nu E_\nu \right)^2$$

$$= \left(\sum_\nu w_\nu \right) \left(\sum_\nu E_\nu^2 w_\nu \right) - \left(\sum_\nu w_\nu E_\nu \right)^2 \geq 0$$

$$\text{Tr}\,(HW) = \sum_n w_n \, (\phi_n, H \phi_n)$$

son ifade de

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 \sum_{n=0}^{\infty} y_n^2 \geq \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n \right)^2 \qquad x_n = \sqrt{w_n} \quad y_n = E_n \sqrt{w_n}$$

Cauchy eşitsizliğini kullandık. Böylece bir karışımdaki $\text{disp}_{(W)} H$ daima sıfıra eşit veya sıfırdan büyüktür. Eğer

$$w_\nu = \delta_{n\nu} \quad \text{yani} \quad W = \Lambda_n$$

ise eşitlik geçerlidir.

disp H ya da ΔH, çarpışma odasındaki CO moleküllerinin karışık W durumu için 0'dan büyüktür, çünkü bu, farklı enerjide CO moleküllerinin bir karışımı idi. H'nın W deki ölçümünün sonucunun tam olarak belirlenememesinin nedeni farklı sist.'i ayırmak için ya da daha kesin olarak farklı durumları birbirinden ayırmak için yeterince karışıklığın yapılmamasıdır.

Çarpışma odasındaki H. osil.'ler, en azından düşünce deneyinde 8 kümeye ayrılabilir; herbiri N_n molekül (aynı E_n enerjili) kümesi olan, öyleki n. kümede H'nın ölçümü kesinlikle E_n değerini verir. Her kümenin durumu Λ_n' dir. Daha ileri giderek bu kümeleri farklı sist.'in daha alt kümelerine bölmek mümkün değildir. Bu, Λ_n'yi saf bir durum olarak çağırmanın nedenidir. Şimdi, saf durumdaki sist. üzerinde bir gözlenebilirin ölçümünü gerçekleştirirsek, klasik düşüncelerden şunu bekleriz ki saf

BS K

durumdaki küme sadece bir türden olduğundan en iyi tanımlanmış bir sayıya kesinlikle götürmelidir. H ya da N gözlenebilirini seçersek, bu öyle_dir. P ya da Q'yu seçersek durum farklıdır. Saf durumlarda bile, bir gözlenebilirin ölçümünün sonucu genellikle tek bir şekilde belirlenemez. Böylece istatistik ilke olarak Q.M.'den elimine edilemez. Aynı saf durumdaki sist.'ler bir ölçüme özdeş değerler vermez. Bütün söylenebilecek bir gözlenebilirin ölçümünde hangi W_n olasılığı ile bir a_n değerini belirleneceğidir.

Bunu bir düşünce deneyi ile gösterelim: Λ_n durumunda Q gözlenebilirinin ölçümünü ele alalım, ve Q'nun ölçümünde x değerini belirlememizin olasılığını soralım? A'nın beklenen değeri

$$\langle A \rangle = \sum_i w_i a_i \qquad (*)$$

$$\langle Q \rangle = \mathrm{Tr}(Q\Lambda_n) = \sum_i \langle i | Q\Lambda_n | i \rangle \qquad \psi_i = |i\rangle \text{ tam baz sist.'i}$$

$$(\phi, \psi) = \langle \phi | \psi \rangle \quad \text{ya da} \quad (\psi_i, \psi_j) = \langle i | j \rangle$$

$$(\phi, A\psi) = \langle \phi | A | \psi \rangle$$

$|i\rangle$ için herhangi bir tam baz sist.'ni alabiliriz. Q operatörünün özvektörler sist.'ni baz olarak seçelim: $Q|x\rangle = x|x\rangle$ ✓

$$\langle Q \rangle = \sum_x \langle x | Q\Lambda_n | x \rangle = \sum_x x \langle x | \underbrace{\Lambda_n}_{=|n\rangle\langle n|} | x \rangle$$

$$= \sum_x x \langle x | n \rangle \langle n | x \rangle$$

$$= \sum_x x\, \phi_n^*(x) \phi_n(x) = \sum_x x\, |\phi_n(x)|^2 \qquad (*)$$

(*)'lar karşılaştırılırsa

En enerjili durum dalga fonk.'u.

$$|\langle x | n \rangle|^2 = |\phi_n(x)|^2 = W_n(x)$$

Λ_n durumundaki bir sistem için Q gözlenebilirinin bir ölçümünde x değerini elde etmenin olasılığı.

BS K

II.6. Q.M.'nin Temel Varsayımlarının Bazı Genel Sonuçları:

Keyfi bir mikrofiziksel sist.'in keyfi bir W durumunu alalım ve bu sist.'in keyfi ~~WIM~~ Hermitsel $A, B, \ldots$ operatörlerinin değerini ölçmek için ne öngörebileceğimize bakalım.

1. Keyfi bir W durumundaki herhangi bir A gözlenebilirinin dağınımı

$$\mathrm{disp}_{(W)} A \geq 0 \quad \text{sağlar} \quad (= 0 \text{ ancak ve ancak } W,\ A\text{'nın özdurumu ise})$$

2. Keyfi bir W durumundaki iki A, B gözlenebilirinin belirsizlikleri

$$\Delta A \, \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle [A, B] \rangle_W \right| \quad \text{sağlar.}$$

Bunun özel bir hali $[P, Q] = \hbar I / i$ ve $\langle \hbar I / i \rangle = \frac{\hbar}{i} \mathrm{Tr}(WI) = \frac{\hbar}{i}$

$$\Delta Q \Delta P \geq \hbar / 2 \quad \text{çıkar.}$$

İspat 1.

Her istatiksel operatör $W = \sum_i w_i \Lambda_i$ şeklinde yazılabilir. w_i: gerçel sayılar; Λ_i: tek ϕ_i vektörleri ile gerilen $\Lambda_i \mathcal{H}$ uzayları üzerine izdüşüren tek boyutlu izdüşüm op.; $\phi_1, \phi_2, \ldots$ ortonormal baz:

$$(\phi_i, \phi_j) = \delta_{ij}$$

$w_i \geq 0$ ve $\sum_i w_i = \mathrm{Tr}\, W = 1$ sağlar. $\delta_{ij} \phi_i$

$$\mathrm{Tr}(BW) = \sum_j (\phi_j, B \sum_i w_i \Lambda_i \phi_j) = \sum_j w_i \overset{\delta_{ij}}{(} \phi_i, B \phi_i) \quad (*)$$

[$B = I$ alınır $\Rightarrow \sum_i w_i = 1$ bulunur.].

$$\mathrm{disp}_{(W)} A = \langle (A - \alpha I)^2 \rangle_W = \mathrm{Tr}\left((A - \alpha I)^2 W \right)$$

$$\alpha = \langle A \rangle_W = \mathrm{Tr}(AW) \quad \text{ile tanımlanır.}$$

BS K

(*)'dan $B = (A-\alpha I)^2$ alırız. $\Rightarrow \mathrm{Tr}\,W = \sum_i w_i = 1$.

$$disp_{(w)} A = \sum_i w_i \left(\phi_i, (A-\alpha I)^2 \phi_i\right)$$

$$= \sum_i w_i \left((A-\alpha I)\phi_i, (A-\alpha I)\phi_i\right)$$

$$= \sum_i w_i \|(A-\alpha I)\phi_i\|^2$$

$w_i \geq 0$ ve $\|(A-\alpha I)\phi_i\| \geq 0$ olduğundan $disp_{(w)} A \geq 0$ 'dır.

Dahası,

$$disp_{(w)} A = 0$$

$\Rightarrow W_i \|(A-\alpha I)\phi_i\| = 0$ tüm i'ler için verilen bir i için

ya $w_i = 0$ ya da $\|(A-\alpha I)\phi_i\| = 0$ olur. Eğer $w_i = 0$ ise, $w_i \Lambda_i$ de sıfırdır ve bu terim $W = \sum_i w_i \Lambda_i$ toplamında yer almaz. Toplamda sadece $w_i > 0$ olan i'ler olur. Kalan i'ler için

$\|(A-\alpha I)\phi_i\|^2 = 0$ olur. Bu da $(A-\alpha I)\phi_i \Rightarrow A\phi_i = \alpha\phi_i$ demektir.

Bu nedenle $disp_{(w)} A = 0 \Rightarrow$ i'nin kalan değerleri için tüm ϕ_i'ler

aynı α özdeğerine ait olan A'nın övektörleri olmalıdır. Ancak o zaman W durumu A'nın bir özdurumunu temsil eder.

<u>İspat 2.</u>

iki A ve B operatörü için

(*) $h(A,B) \equiv \mathrm{Tr}(WA^+B) = \mathrm{Tr}(WI(A^+B)) = h(I, A^+B) = \langle A^+B \rangle$

tanımları. Kolayca görülür ki;

- $\mathrm{Tr}(A) = \sum_\gamma (\phi_\gamma, A\phi_\gamma)$
- Tr. özellikleri

BS K

(a) $h(A,A) \geq 0$

(b) $h(A,B) = \overline{h(B,A)}$

(c) $h(aA,B) = \bar{a}\, h(A,B)$

(d) $h(A+B,C) = h(A,B) + h(C,B)$

(*) ile tanımlanan $h(A,B)$, pozitif Hermitsel form için olan tüm koşulları sağlıyor. $h(A,B)$ için Schwartz eşitsizliği geçerli

$$|h(A,B)|^2 \leq h(A,A)\, h(B,B)$$

varsayalım ki A ve B Hermitsel olsun.

$$|\langle [A,B] \rangle|^2 = |h(I,[A,B])|^2$$

$$= |h(A,B) - h(B,A)|^2$$

$$\leq 4\, h(A,A)\, h(B,B)$$

$$\left.\begin{array}{ll} A \to A - \alpha I & \alpha = Tr(WA) \\ B \to B - \beta I & \beta = Tr(WB) \end{array}\right\} \text{koyarsak,}$$

$$h(A-\alpha I, A-\alpha I)\, h(B-\beta I, B-\beta I) \geq \frac{1}{4} |h(I,[A-\alpha I, B-\beta I])|^2$$

$$\text{disp}\, A\, \text{disp}\, B \geq \frac{1}{4} |h(I,[A,B])|^2 = \frac{1}{4} |\langle [A,B] \rangle|^2$$

BS K

II.7. Konum ve Mom. Operatörlerinin Özvektörleri: Harmonik Os. Dalga Fonk.'ları.

Q'nun mümkün x özdeğerlerinin ne olduğunu bilmek istiyoruz. X'in hangi değerleri için

$$Q|x) = x|x)$$

sağlanır? $|n) = \phi_n$ (H ve N'nin bir özdurumu) ile $|x)$ vektörleri (Q'nun özdurumları) arasında dönüşen $(x|n)$ geçiş katsayısını bulmak istiyoruz;

$$|n) = \sum_x |x)(x|n)$$

$$Q|n) = \left(\frac{\hbar}{2\mu\omega}\right)^{1/2} (a + a^+)|n)$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2\mu\omega}\right)^{1/2} \left\{ \sqrt{n}\,|n-1) + \sqrt{n+1}\,|n+1) \right\}$$

$$(n|Q|x) = \left(\frac{\hbar}{2\mu\omega}\right)^{1/2} \left[\sqrt{n}\,(n-1|x) + \sqrt{n+1}\,(n+1|x) \right]$$

$$= x\,(n|x) \qquad \text{I}$$

$$x\,(m-1|x) = \left(\frac{\hbar}{2\mu\omega}\right)^{1/2} \left[\sqrt{m-1}\,(m-2|x) + \sqrt{m}\,(m|x) \right]$$

→ $m = n+1$ diyelim !!!

$$\sqrt{m}\,(m|x) = \sqrt{\frac{2\mu\omega}{\hbar}}\, x\,(m-1|x) - \sqrt{m-1}\,(m-2|x) \qquad (*)$$

$n = 0, 1, 2, 3, \ldots \Rightarrow m = 1, 2, 3, \ldots$ olur.

BS K

$n=0$ $(m=1)$ için,

$$\begin{cases} Q(0) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}} \sqrt{0+1}\, |0+1) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}\, |1) \\ \sqrt{1}\, (1|x) = \sqrt{\frac{2\mu\omega}{\hbar}}\, x\, (0|x) \end{cases}$$

$$y \equiv \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}\, x \quad , \quad f_n(y) \equiv \sqrt{2^n n!}\, \frac{(n|x)}{(0|x)} \quad \text{diyelim.}$$

$$(*):\quad \sqrt{m}\, (m|x) = \sqrt{2}\, y\, (m-1|x) - \sqrt{m-1}\, (m-2|x)$$

$$\sqrt{\frac{m}{2^m m!}}\, f_m(y) = \sqrt{\frac{2}{2^{m-1}(m-1)!}}\, y\, f_{m-1}(y) - \sqrt{\frac{m-1}{2^{m-2}(m-2)!}}\, f_{m-2}(y)$$

$$f_m(y) = 2y\, f_{m-1}(y) - 2(m-1)\, f_{m-2}(y)$$

$$f_1(y) = 2y\, f_0(y) \qquad f_0(y) = 1$$

y'nin reel değerleri için $f_n(y)$ Hermit polinomlarıdır.

$$f_n(y) = H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2}$$

sonlu olan $(0|x)$ için (Λ_0 taban durumuna karşı gelir) $(n|x)$ geçiş katsayılarını elde ettik.

$$(n|x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\, (0|x)\, H_n\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}\, x\right) \qquad -\infty < x < +\infty$$

BS K

I. $Q|x) = x|x)$ bağıntısına uyan $|x)$'ler $\Phi^{\times}$'in elemanlarıdır ve Q op.'nun genelleştirilmiş özvektörleridir. $|x)$, $-\infty < x < +\infty$ kümesi genelleştirilmiş baz sist.'dir. Q'nun spektrumu süreklidir ve $\mathbb{R}$ eksenin tümüdür. N ve H'nin spektrumu kesiklidir. x herhangi bir reel sayı iken $|n) = \sum_x |x)(x|n)$ toplamı bir integral'dir. Buna göre her $\varphi \in \Phi$

$$\varphi = \int dx\, |x\rangle\langle x|\varphi\rangle = \int dx\, |x\rangle\, \varphi(x)$$

olarak yazılabilir. $|x) \longrightarrow |x\rangle$.

$$\langle x'|\varphi\rangle = \int dx\, \langle x'|x\rangle\langle x|\varphi\rangle$$

$\langle x'|x\rangle : \varphi(x) \longrightarrow \varphi(x')$ δ dağılımı ya da Dirac δ-fonk.

$$\sum_x |x)(x| \longrightarrow \int dx\, |x\rangle\langle x|$$

II.

$\langle 0|x\rangle$'i hesaplayalım.

$$\phi_n = |n) \rightarrow |n) = \int dx\, |x\rangle\langle x|n)$$

$$\delta_{mn} = (\phi_m, \phi_n) = \int dx\, (m|x\rangle\langle x|n)$$

$\langle x|n) = \overline{(n|x\rangle}$. $*$ kullanacağız.

[. Eğer $|n\rangle = \phi_n$ ve $|x\rangle = \chi$ 'nin herikisi de Hilbert uzayında vektörler olsa idi, o zaman (*) bağıntısı skaler çarpımın tanımı olacaktı. Ancak $(n|x\rangle$, $|n) \in \Phi$ elemanında $|x\rangle \in \Phi^{\times}$ fonksiyonelidir. Bu nedenle (*) bağıntısı açık değildir. Fakat bu bağıntı genelde kesikli ve sürekli bazlar arasındaki geçiş katsayıları için doğrudur. Bu nedenle $|\,)$ ve $|\,\rangle$ arasındaki yazılım farkını bırakıp, genel olarak $|\,\rangle$ kullanılacaktır.].

$$\delta_{mn} = (m|n) = \int dx\, (m|x\rangle\langle x|n)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\hbar}{2^n 2^m n!\, m!\, \mu\omega}\right]^{1/2} \int dy\, \left|\langle 0|\sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}}\, y\rangle\right|^2 H_m(y) H_n(y) = \delta_{mn}$$

$$\int dy\, e^{-y^2} H_m(y) H_n(y) = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ n!\, 2^n \sqrt{\pi} & m = n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left|\langle 0|\sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}}\, y\rangle\right|^2 = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}}\, e^{-y^2}$$

keyfi bir faz çarpanı farkı ile (ki bir onu 1 alacağız).

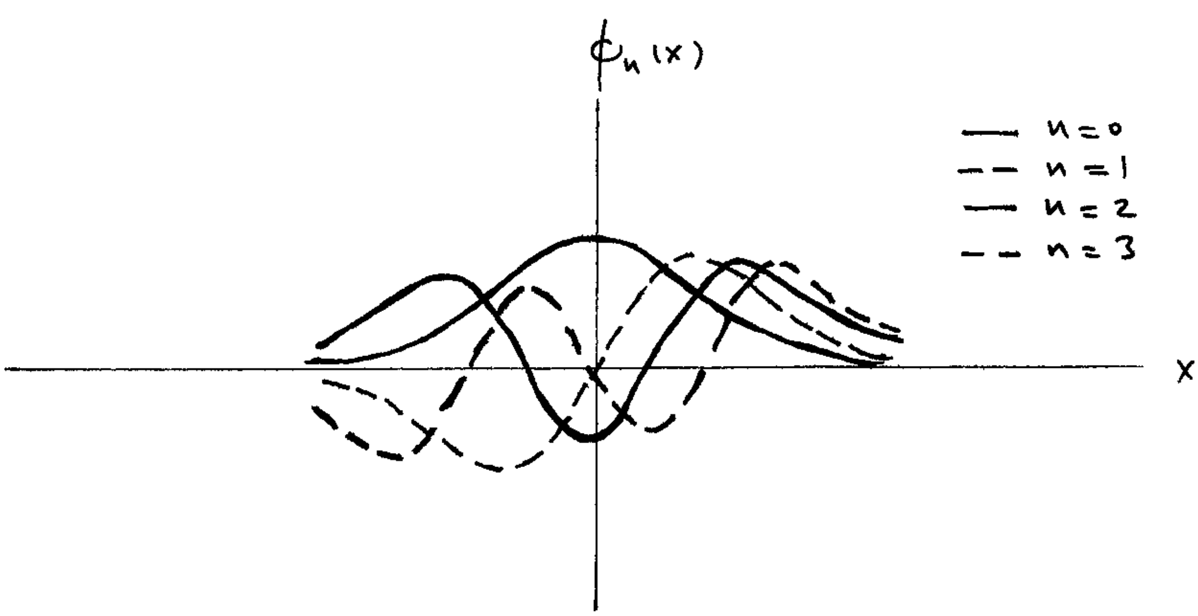
$$\langle 0|x\rangle = \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\mu\omega x^2/2\hbar}$$

O zaman,

$$\langle n|x\rangle = \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}\, x\right) e^{-\mu\omega x^2/2\hbar} = \langle x|n\rangle$$

$$= \phi_n(x)$$

BS K



Aynı şekilde P operatörü için yaparız. $P|p\rangle = p|p\rangle$

$$P|n\rangle = -i\sqrt{\frac{\mu\omega\hbar}{2}}\,(a-a^{+})|n\rangle$$

$$= -i\sqrt{\frac{\mu\omega\hbar}{2}}\left(\sqrt{n}\,|n-1\rangle - \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\right)$$

$\langle p|$ ile skaler çarp.

$$p\langle p|n\rangle = -i\sqrt{\frac{\mu\omega\hbar}{2}}\left(\sqrt{n}\,\langle p|n-1\rangle - \sqrt{n+1}\,\langle p|n+1\rangle\right)$$

$i^{-n}/$ $$p\langle n|p\rangle = +i\sqrt{\frac{\mu\omega\hbar}{2}}\left(\sqrt{n}\,\langle n-1|p\rangle - \sqrt{n+1}\,\langle n+1|p\rangle\right)$$

$(n|p)$ niceliklerini $\langle n|p\rangle = i^n\,(n|p)$ ile tanımlayalım.

O zaman
$$\begin{cases} i\langle n-1|p\rangle = i\, i^{n-1}(n-1|p) = i^n\,(n-1|p) \\ -i\langle n+1|p\rangle = -i\, i^{n+1}(n+1|p) = i^n\,(n+1|p) \end{cases}$$

Buna göre

$$p\,(n|p) = \sqrt{\frac{\hbar\mu\omega}{2}}\left(\sqrt{n}\,(n-1|p) + \sqrt{n+1}\,(n+1|p)\right) \text{ olur.}$$

$\times\sqrt{\mu\omega/\hbar} \Longrightarrow p/\sqrt{\mu\omega\hbar}$ ile önceki bağıntı. (I)

BS K

Buna göre,

$$\langle n|p\rangle = i^n \left(\frac{1}{\pi\mu\omega\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\, H_n\left(\frac{1}{\sqrt{\hbar\mu\omega}}\, p\right) e^{-p^2/2\mu\omega\hbar}$$

Q'ya benzer olarak P op.'nün spektrumu süreklidir.

$$\text{spekt. } P = \{ p \mid -\infty < p < +\infty \}$$

ve $|p\rangle$'ler genelleştirilmiş özvektörler.

$$|n\rangle = \int dp\, |p\rangle\langle p|n\rangle$$ deki $\langle p|n\rangle$ geçiş katsayıları

mom. gösterimindeki dalga fonk.'ları olarak adlandırılır ve

$$\phi_n(p) \equiv \langle p|n\rangle$$

ile gösterilir.

Osilatörün Λ_n enerji özdurumunda P mom.'nun ölçümünde p değerini bulma ~~olasılığı~~ olasılık yoğunluğu,

$$w_n(p) = |\langle p|n\rangle|^2$$ 'dir.

Herhangi keyfi φ vektörü için geçiş katsayısı,

$$\varphi(p) = \langle p|\varphi\rangle$$

[$\varphi = \int dp\, |p\rangle\langle p|\varphi\rangle$ içindeki] mom. uzay dalga fonk.'u ya da p-gösterimindeki φ durumu için dalga fonk.'u olarak adlandırılır.

BS K

→ Buraya kadar, Q'nun matris elemanını x-gösteriminde elde ettik.

$$\langle n | Q | x \rangle = x \langle n | x \rangle$$

ya da daha genel olarak, her iyi davranışlı φ vektörü için

$$\langle \varphi | Q | x \rangle = x \langle \varphi | x \rangle \quad , \quad \langle x | Q | \varphi \rangle = x \langle x | \varphi \rangle$$

→ Benzer şekilde P'nin matris elemanını p-gösteriminde elde ettik.

$$\langle n | P | p \rangle = p \langle n | p \rangle$$

ya da daha genel olarak,

$$\langle \varphi | P | p \rangle = p \langle \varphi | p \rangle \quad , \quad \langle p | P | \varphi \rangle = p \langle p | \varphi \rangle .$$

Şimdi { P'nin matris elemanlarını Q'nun genelleştirilmiş bazında / Q'nun kileri de P'ninkinde elde etmek istiyoruz.

Önce $\langle x | p \rangle$ sembolünün neyi temsil ettiğini bulur ve hemen $\langle x | P | n \rangle$'yi hesaplarız.

$|n\rangle = \int dx \, |x\rangle \langle x | n \rangle$ 'yi $\langle p|$ ile soldan çarp.

$$\langle p | n \rangle = \int dx \, \langle p | x \rangle \langle x | n \rangle$$

$|n\rangle = \int dp \, |p\rangle \langle p | n \rangle$ 'yi $\langle x|$ "

$$\langle x | n \rangle = \int dp \, \langle x | p \rangle \langle p | n \rangle$$

biliyorum!!

BS K

$$\langle n|x\rangle = \left(\frac{\mu w}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\,H_n\!\left(\sqrt{\frac{\mu w}{\hbar}}\,x\right) e^{-(\mu w/2\hbar)x^2}$$

$$\langle n|p\rangle = i^n\left(\frac{1}{\pi\mu w\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\,H_n\!\left(\frac{1}{\sqrt{\mu w\hbar}}\,p\right) e^{-p^2/2\mu\hbar w}$$

bağıntıları,

$$i^n e^{-\eta^2/2} H_n(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \,\frac{e^{i\xi\eta}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{-\xi^2/2} H_n(\xi)$$

denklemi ile kullanılırsa;

$$\langle n|p\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \,\frac{e^{ixp/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\,\langle n|x\rangle$$

$$\langle p|n\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \,\frac{e^{-ixp/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\,\langle x|n\rangle = \int dx \,\langle p|x\rangle\langle x|n\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{-ixp/\hbar} \, . \qquad \langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{ixp/\hbar}$$

$$\langle x|p\rangle = \overline{\langle p|x\rangle}$$ dir.

* Şimdi P'nin matris elemanlarını Q'nun genelleştirilmiş özvektörleri bazında hesaplamak kolaydır.

$$\langle x|P|\varphi\rangle = \int dp\, p\,\langle x|p\rangle\langle p|\varphi\rangle = \int dp\, p\,\frac{e^{ixp/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\,\langle p|\varphi\rangle$$

$$= \int dp\,\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\langle x|p\rangle\langle p|\varphi\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\int dp\,\langle x|p\rangle\langle p|\varphi\rangle$$

$$\langle x|P|\varphi\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\langle x|\varphi\rangle$$

BS K

Benzer şekilde

$$\langle p | Q | \varphi \rangle = -\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dp} \langle p | \varphi \rangle$$

Bu realizasyon Schrödinger temsili olarak adlandırılır.

(*) Harmonik os. için $H \phi_n = E_n \phi_n$ enerji özdeğer denkleminin Schrödinger temsilini bulalım.

$$\langle x | H | n \rangle = \frac{1}{2\mu} \langle x | P^2 | n \rangle + \frac{\mu \omega^2}{2} \langle x | Q^2 | n \rangle$$

$$\langle x | P^2 | n \rangle = \sum_{n'} \langle x | P | n' \rangle \langle n' | P | n \rangle$$

$$= \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \sum_{n'} \langle x | n' \rangle \langle n' | P | n \rangle$$

$$= \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \langle x | P | n \rangle = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \frac{d^2}{dx^2} \langle x | n \rangle$$

$$\langle x | Q^2 | n \rangle = x^2 \langle x | n \rangle$$

$$\langle x | H | n \rangle = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} \langle x | n \rangle + \frac{\mu \omega^2}{2} x^2 \langle x | n \rangle$$

$$= \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\mu \omega^2}{2} x^2 \right) \langle x | n \rangle = E_n \langle x | n \rangle$$

Schrödinger T.'de özdeğer. denklemi

<u>x temsilinde</u>

$$P \leftrightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$$

$$H \leftrightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\mu \omega^2}{2} x^2 \right)$$

BS K

II. 8. Sürekli Spektrumlu Gözlenebilirler:

Saf bir durumun istatiksel operatörü,

$$W = \Lambda_{b_0} = |b_0\rangle\langle b_0|$$

(B gözlenebilirinin $|b_0\rangle$ özvektörü ile gerilen tek boyutlu alt uzaya izdüşüren op.)

Keyfi bir $\{\phi_n\}$ bazında W

$$W = \sum_{m,n} C_m \bar{C}_n \, |\phi_m\rangle\langle\phi_n| \qquad (*)$$

$$W = \sum_{mn} |\phi_m\rangle\langle\phi_m|b_0\rangle \times \langle b_0|\phi_n\rangle\langle\phi_n|$$

olarak yazılır. burada $C_n = \langle\phi_n|b_0\rangle$.
$\{\phi_n\}$ baz sistemi B'nin ve bu nedenle W'nin diagonal olduğu $\{\phi_b = |b\rangle\}$ baz sist.'i alınırsa,

$$C_b = \langle\phi_b|b_0\rangle = \langle b|b_0\rangle = \delta_{bb_0}.$$

Bir karışım için W,

$$W = \sum_{mn} W_{mn} \, |\phi_m\rangle\langle\phi_n|$$

$\{\phi_n\}$ bazında W'nin matris elemanı ; $\{W_{mn}\}$: yığınluk matrisi.

~~sürekli~~ spektrumu durumunda (*) denklemi,

$$W = \int dx' dx'' f(x') \bar{f}(x'') \, |x'\rangle\langle x''|$$

BS K

burada, $\{|x\rangle\}$ sürekli spektrumu olan (Q gibi) bir gözlenebilirin genelleştirilmiş özvektörlerinin baz sist.'dir. $W = \Lambda_{b_0}$ saf durumu için sürekli x değişkeninin $f(x)$ test fonk.'u (iyi davranışlı)

$$f(x) = \langle x | b_0 \rangle = \langle x | b_0)$$

genelleştirilmiş özvektör. has özvektör.

Bir karışım için genelleyerek,

$$W = \int dx'\, dx''\, F(x', x'')\, |x'\rangle\langle x''|$$

burada , Q'nın genelleştirilmiş özdeğerleri olan, x' ve x'' 'nün fonk.'udur.

(#) $B = Q$ alırsak, $f(x) = \langle x | x_0 \rangle = \delta(x - x_0)$

(kesikli: $W = \Lambda_{x_0} = |x_0\rangle\langle x_0|$ durumuna karşı gelmek üzere) seçilebilir görülüyor. Ancak, sürekli bir spektrumu olan bir gözlenebilirin özel bir noktasının ölçümünü sormak anlamsız oluyor. Herhangi bir ölçme aygıtı sonlu boyuttadır. Anlamlı olan, Q gözlenebilirinin ölçümünün matematiksel olarak tanımlanmış x_0 noktası civarında $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ aralığında x değerlerini veren bir fiziksel sist.'in durumunu aramaktır. Böylece fiziksel nedenlerle sürekli spekt.'u olan Q gözlenebilirli için

$$W = \int dx'\, dx''\, f_\varepsilon(x'; x_0)\, \bar{f}_\varepsilon(x'', x_0)\, |x'\rangle\langle x''|$$

BS K

$f_\varepsilon(x,x_0)$, x_0'ın $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ komşuluğunda ana desteğe sahip olan bir fonk.'dur. ve ölçüm aletinin ayırma gücünü tarif eder.

(*) ile verilen durumda, B'nin ölçümünün b değerini verme olasılığı

$$Tr(\Lambda_b W) = (b|W|b) = (b|b_0)(b_0|b) = \delta_{bb_0}\delta_{b_0b} = \delta_{b_0b}$$

Yukarıdaki W ile verilen durum için Q'nun ölçümünün x değerini verme ihtimali bir olasılık değil olasılık dağılımı (yoğunluğu)'dur.

$$\langle x|W|x\rangle = \int dx'\,dx''\, f_\varepsilon(x';x_0)\,\bar{f}_\varepsilon(x'';x_0)\underbrace{\langle x|x'\rangle}_{\delta(x-x')}\underbrace{\langle x''|x\rangle}_{\delta(x''-x)}$$

$$= f_\varepsilon(x;x_0)\,\bar{f}_\varepsilon(x;x_0)$$

$$= |f_\varepsilon(x;x_0)|^2 = F_\varepsilon(x;x_0)$$

sembolik olarak; $\Lambda_x = |x\rangle\langle x|$ ile $\langle x|W|x\rangle = Tr(\Lambda_x W)$ yazabiliriz. Ancak Λ_x: bir alt uzay üzerine izdüşürücü bir op. değil.

Soru: Q gözlenebilirlik bir ölçümü W durumunda yapıldığında x_1 ve x_2 aralığında bir x değeri elde etme olasılığı nedir?

Burada $x_1 \square x_2$ aralığı ölçümün yapıldığı aygıtın ayırma gücü ile belirlenir ve sonsuz küçük olamaz, tam olarak belirlenemez.

$x_1 < x < x_2$ aralığında konum bulmayı temsil eden op.

$$\Lambda(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} dx\, |x\rangle\langle x|$$

izdüşüm op.'dür. Sist. W durumunda olduğunda konum bu aralıkta herhangi bir yerde bulma olasılığı,

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\langle x'|x\rangle}_{\delta(x-x')}\langle x|W|x'\rangle$$

$$Tr(\Lambda(x_1, x_2)W) = \int dx' \langle x'|\Lambda(x_1, x_2)\, W|x'\rangle$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \ \langle x|W|x\rangle$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \ |f_\varepsilon(x; x_0)|^2 = \int_{x_1}^{x_2} dx\ F_\varepsilon(x; x_0)$$

(deneysel durumla belirlenir.)

ε: , W durumu ile hazırlanan aygıtın gücünü tasvir eder. Ayırma gücü iyi oldukça ε daha küçüktür ve ideal ve fiziksel olmayan $\varepsilon \to 0$ limitinde

$$|f_\varepsilon(x; x_0)|^2 = F_\varepsilon(x; x_0) \longrightarrow \delta(x - x_0)$$

olur. Gerçekte varolmayan sonsuz derecede keskin ayırma gücü olan bir aygıta karşı gelir. Böylece W durumu deneysel ayırma gücünün izin verdiği ölçüde saf ya da keskin'dir; ve δ-ile temsil edilecek kadar ideal keskinlikte olamaz.

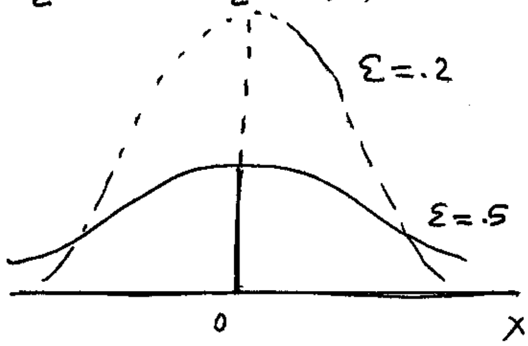
$\langle \phi | x \rangle = \sum_n \langle \phi | u_n \rangle \langle u_n | x \rangle$ $f_n(x)$

W durumunun normalize olması için, $f_\varepsilon(x;x_0)$ şunu sağlamalıdır;

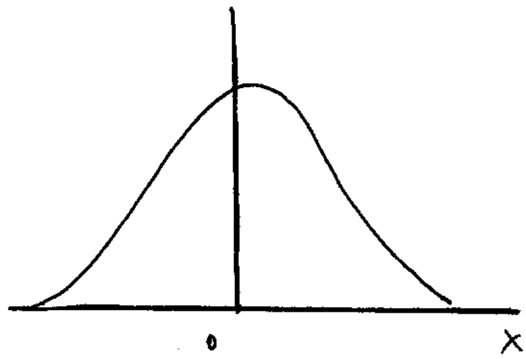
$$Tr(W) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \langle x | W | x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, |f_\varepsilon(x;x_0)|^2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F_\varepsilon(x;x_0)\, dx = 1$$

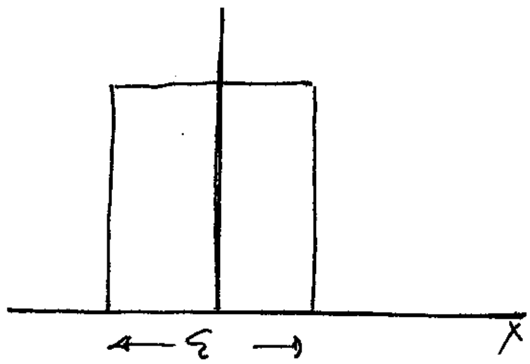
$F_\varepsilon(x) = F_\varepsilon(x;0)$ örnekleri ;



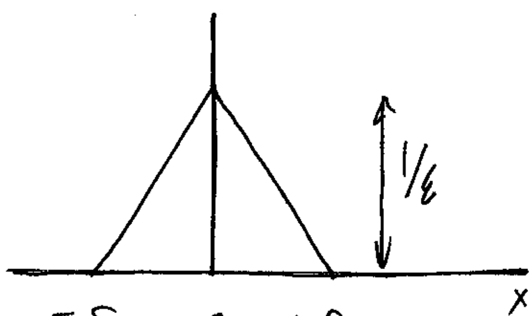
$$F_\varepsilon = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$$



$$F_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\varepsilon}\, e^{-x^2/2\varepsilon^2}$$



$$F_\varepsilon = \begin{cases} 0 & x < -\varepsilon/2 \\ 1/\varepsilon & |x| < \varepsilon/2 \\ 0 & x > \varepsilon/2 \end{cases}$$



$$F_\varepsilon = \begin{cases} 0 & x \le -\varepsilon \\ \dfrac{x+\varepsilon}{\varepsilon^2} & -\varepsilon \le x \le 0 \\ \dfrac{-x+\varepsilon}{\varepsilon^2} & 0 \le x \le +\varepsilon \\ 0 & x > \varepsilon \end{cases}$$

BS K

Bütün bu fonksiyonlar $-\varepsilon < x < +\varepsilon$ aralığında ana desteğe sahiptirler ve

$$F_\varepsilon(x) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \delta(x).$$

Sürekli Spektrum için temel Varsayım III.a:

Deneysel olarak mümkün olan en darlıkta bir $F_\varepsilon(x)$ dağılım fonksiyonuna sahip W istatiksel operatörü, saf bir özdurumun sürekli spektrum benzeridir. Böyle bir durumu, spektrumu sürekli olan gözlenebilirin "hemen hemen kesin" durumu ya da "hemen hemen özdurumu" olarak adlandırırız.

Keyfi bir durum (hazırlanmasında kesinliğine hiç bir teşebbüs yapılmamış olabilir)

$$W = \int dx' \int dx'' \, F(x',x'') \, |x'\rangle\langle x''|$$

ile tasvir edilir. $F(x',x'')$, Q'nun olasılık dağılım fonk.una şöyle bağlanabilir:

$$Tr(\Lambda_x W) = \langle x|W|x\rangle = \int dx' dx'' \, F(x',x'') \, \langle x|x'\rangle\langle x''|x\rangle$$

$$= F(x,x)$$

BS K

Sürekli spektrum için temel varsayım III. b.:

Fiziksel sistem W durumunda olsun; bir gözlenebilirin (sürekli ya da kesikli spektrumu olan ya da tamamıyle belirsiz olan) ölçümleri ile bu durum hazırlanabilir. $-\infty < x < +\infty$ sürekli spektrumu olan bir Q gözlenebilirinin bir ölçümü W durumunda yapılırsa ve $x_1 < x < x_2$ bölgesinde uzanan Q'nun x değerleri ile bir alt topluluk seçmek için kullanılır ise, o zaman bu alt topluluğu tasvir eden (normalize olmamış) W' durum,

$$W' = \Lambda(x_1, x_2)\, W\, \Lambda(x_1, x_2)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx' \int_{x_1}^{x_2} dx'' \, |x'\rangle\langle x'|W|x''\rangle\langle x''| \, .$$

Bu ifade, $W' = [\mathrm{Tr}(\Lambda_b W \Lambda_b)]^{-1} \Lambda_b W \Lambda_b$ denkleminin sürekli spektrum benzeridir.

$x_1, x_2 \to -\infty$ $\pm\infty$ için $W' = W$ elde ederiz. Bu hiç bir ölçümün yapılmadığını söyler.

$x_1 < x < x_2$ sonlu büyüklükte aralık olmalıdır; sonsuz küçük olamaz, aygıtın sonlu ayırımı ve sonlu boyutu nedeni ile.

Yukarıdaki denk. ile, x değerini elde etmek için ~~x değerini elde etmek için~~ olasılık yoğunluğunu hesaplayalım:

$$\langle \Lambda_x \rangle' = \frac{1}{\mathrm{Tr}(W')} \mathrm{Tr}(\Lambda_x W') = \frac{1}{\mathrm{Tr}(W')} \langle x | W' | x \rangle$$

BS K

$$\langle \Lambda_x \rangle' = \frac{1}{\mathrm{Tr}(W')} \int_{X_1}^{X_2} dx' \int_{X_1}^{X_2} dx'' \, \langle x | x' \rangle \langle x' | W | x'' \rangle \langle x'' | x \rangle$$

$$= \begin{cases} 0 & x < X_1 \text{ ya da } x > X_2 \\ \left(\mathrm{Tr}(W')\right)^{-1} \langle x | W | x \rangle & X_1 < x < X_2 \end{cases}$$

Gerçek bir durum ölçümü, küçük bir $X_0 - \varepsilon < x < X_0 + \varepsilon$ aralığındaki bazı değerler üzerinedir. Q ölçümü için olasılığın bu aralıkta olması için,

$$\langle \Lambda (X_0 - \varepsilon, X_0 + \varepsilon) \rangle' = \int_{X_0 - \varepsilon}^{X_0 + \varepsilon} dx \, \langle \Lambda_x \rangle'$$

$$= \begin{cases} 0 & (X_0 - \varepsilon, X_0 + \varepsilon) \cap (X_1, X_2) = \emptyset \\ \dfrac{1}{\mathrm{Tr}(W')} \displaystyle\int_{X_0 - \varepsilon}^{X_0 + \varepsilon} dx \, \langle x | W | x \rangle & (X_0 - \varepsilon, X_0 + \varepsilon) \subseteq (X_1, X_2) \end{cases}$$

Böylece, W' konumun (X_1, X_2) aralığında olduğu bir durumu temsil eder.

BS K

II. 9 Konum ve Momentum Ölçümleri:

• Harmonik Os.'ün klasik modelini hatırlarsak;

O zaman

$m_2 \gg m_1 \Rightarrow m_2$ durgun (m_1'in (x ve p koordinatı)

Konumun bir ölçümü Q.M. sel Harmonik osi. de nasıl yapılabilir? bu sistemin bir realizasyonu olarak CO diatomik molekülünü almıştık o zaman soru: CO molekülünün iki atomu arasındaki uzaklık nasıl ölçülür sorusuna döner. $W(x)$ ve $W(p)$ olasılıklarının pratik bir değeri yok.

$W' = \Lambda(x_1, x_2) W \Lambda(x_1, x_2)$'ye göre Q konum op.'nin bir ölçümünden sonra, fiziksel sist. konum op.'nin hemen hemen bir özdurumundadır; yani bütün moleküller $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ aralığında yerelleşmiş bir konum vardır.

* Klasik model için: m_1, m_2 den $\bar{x}$ uzaklığında $(x-\varepsilon < \bar{x} < x+\varepsilon)$
Ancak, m_1'in küçük bir uzay bölgesinde yerelleştiği klasik bir sist. bir salınıcı değildir. O bir yerelleşmiş kütle noktası ya da parçacıktır.. H. OS.'de Q'nun ölçümü, salınıcıyı yok eder, sonuç bir parçacıktır.

CO deki gözlenebilirler:

1°) Titreşen CO mol.'nin enerji op.'ü

2°) " " bağıl konum op.'ü.

2° sinde özdurumları hazırlanmış sist.'i bozar. 2. nin ölçümü için sist.'i genişletmek gerekir:

BS K

CO molekülleri ; C , O atomları :

O zaman CO molekülü bu geniş sist.'in özel durumlarında, Q op.'nün, hemen hemen özdurumu için,

$$W(x) = \iint dx'\,dx''\, f_\xi(x'-x)\,\bar{f}_\xi(x''-x)\,|x'\rangle\langle x''|$$

vardır. $Q|x\rangle = x|x\rangle$ ve $|f_\xi(x'-x)|^2$, F_ξ özelliğindedir.

Aynı şeyi, P mom. op.'ü için tanımlayalım.

$$W(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp' \int_{-\infty}^{+\infty} dp''\, f_\varepsilon(p'-p)\,\bar{f}_\varepsilon(p''-p)\,|p'\rangle\langle p''|$$

burada $P|p\rangle = p|p\rangle$ ve $|f_\varepsilon(p'-p)|^2 \longrightarrow F_\varepsilon$.

P'nin ölçümü $\bar{p}$ verir : $p-\varepsilon < \bar{p} < p+\varepsilon$. Böyle bir durum H. osil. tarafından realize edilemez.

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{P^2}{\mu} + \mu\omega^2 Q^2\right) \rightarrow \text{gerekmez}$$

$$[P, Q] = \frac{\hbar}{i} I \quad \rightarrow \text{gerekir.}$$

bunun sonucu $\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{-ixp/\hbar}$ ile verilir.

H ile P ve Q arasındaki ilişki $H = P^2/2m$ ise, Buna uygun kuantum mekaniksel sist. → serbest non-relativistik elementer parçacıktır.

BS K

* İyi tanımlı mom.'u olan Q.M. bir sistem, klasik görüntü olarak bir dalgaya sahiptir.

* Bir parçacığın karakteristiği uzayda yerelleşmesidir. Bir dalganın karakteristiği sonsuz periyodik uzaysal uzantı'sıdır. Bir düzlem dalganın matematiksel tanımı :

$$\phi(x,t) = A e^{ikx} e^{-i\omega t}$$

periyodik uzaysal uzantı $u(x) = A e^{ikx}$ ile taşınır edilir. Temel dalga sayısı : $\lambda = 2\pi/k$. Dalga düzlem dalga değilse iyi tanımlı bir dalga sayısına sahip değildir ; ancak belli bir aralıkta $(k-\Delta k, k+\Delta k)$ k' dalga sayıları varsa o zaman bir dalga paketi

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk'\, A(k') e^{ik'x}$$

ile tanımlanır. $(k-\Delta k, k+\Delta k)$ aralığında sıfırdan farklı.

İyi tanımlı mom.'u olan bir durumun uzaysal dağılımını hesaplayalım : Bunu,

tam $|p\rangle$ mom.'u olan $\left(W(p) = dp\, |p\rangle\langle p| \right)$

" $|x\rangle$ kon.'u " $\left(W(x) = dx\, |x\rangle\langle x| \right)$

durumları ile yapalım. İyi davranışlı durum vektörü ψ olan saf bir Λ_ψ durumu için uzaysal dağılım $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ dalga fonk.'u ile taşınır edilir. ψ durumunun konum ölçümünde x değerini ölçmek için olasılık yoğunluğu

$$W_\psi(x) = |\langle x|\psi\rangle|^2 \text{ 'dir.}$$

BS K

Şimdi ψ iyi davranışlı olmasın ve bu yüzden fiziksel olmayan durum vektörü $|p\rangle$ olsun. O zaman uzaysal dağılım,

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{ixp/\hbar}$$

ile verilir. Bunu Ae^{ikx} in $|x|$ ile karşılaştırırsak şunu görürüz.: Q.M. sis.'in bir tam mom. özdurumu, klasik sist. ile aynı (düzlem dalga denilen) uzaysal dağılıma sahiptir; dalga sayısı ve boyu de Broglie bağıntısı ile verilir.

$$k = \frac{1}{\hbar} p \quad , \quad \lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{p}$$

Şimdi durumu $W(p)$ ile verilen fiziksel duruma dönelim, bu durum mümkün olduğunca dar mom. dağılımı $|f_\varepsilon(p'-p)|^2$ sahip olsun. $W(p)$ durumunda Q'nun ölçümünde x değerini elde etmek için olasılık yoğunluğu,

$$\langle x|\, W(p)\, |x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp' \int_{-\infty}^{+\infty} dp''\, f_\varepsilon(p'-p)\, \bar{f}_\varepsilon(p''-p)\, \langle x|p'\rangle\langle p''|x\rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dp'\, f_\varepsilon(p'-p)\, \frac{e^{ixp'/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp''\, \bar{f}_\varepsilon(p''-p)\, \frac{e^{-ixp''/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

Bunu $\phi(x) = \int dk'\, A(k')\, e^{ik'x}$ ile karşılaştırmak için şunu tanımlayalım:

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp'\, f_\varepsilon(p'-p)\, \frac{e^{ixp'/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dk'\, \hbar\, \underbrace{\frac{f_\varepsilon(k'-k)}{\sqrt{2\pi\hbar}}}_{A(k')}\, e^{ixk'}$$

BS K

$A(k') = \sqrt{\hbar/2\pi}\, f_\varepsilon(k'-k)$ ile $\phi(x)$ gerçekten bir dalga

paketi tanımlar. Şiddeti,

$$\langle x | W(p) | x \rangle = |\phi(x)|^2$$

x değeri için olasılık yoğunluğunu verir. Böylece iyi tanımlı mom.'u olan bir durumda Q.M. sistem klasik görüntü olarak bir dalga paketine sahiptir.; bunun λ dalga boyu dar bir aralıktadır:

$$\frac{2\pi\hbar}{p-\varepsilon} > \lambda > \frac{2\pi\hbar}{p+\varepsilon}$$

Bu dalganın şiddeti, konum ölçümü için olasılık yoğunluğuna karşı gelir. $\phi(x)$ olasılık taşıdır eder ve olasılık genliği olarak adlandırılır.

* [$\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$ 'nın şimdi niçin bir dalga fonk.'u olarak adlandırıldığını anlıyoruz: W_ψ saf bir durum olsun, yani ψ tarafından gerilen uzayda bir projektör olsun. O zaman, konumun ölçümünde x değerini elde etme olasılık yoğunluğu

$$W_\psi(x) = \langle x | W_\psi | x \rangle = \langle x | \psi \rangle \langle \psi | x \rangle$$

$$= \psi(x)\bar{\psi}(x) = |\psi(x)|^2$$

öte yandan,

$$\langle x | W_\psi | x \rangle = \langle x | \psi \rangle \langle \psi | x \rangle = \int dp'\, dp'' \langle x | p' \rangle \langle p' | \psi \rangle \otimes \langle \psi | p'' \rangle \langle p'' | x \rangle$$

BS K

$$= \int dp' \frac{e^{ixp'/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \psi(p') \int dp'' \frac{e^{-ixp''/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \psi(p'')$$

Bu ikisi karşılaştırılır ise,

$$\psi(x) = \int dp' \frac{e^{ixp'/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \psi(p')$$

$$\psi(p') = \langle p' | \psi \rangle$$

$\psi(x)$: düzlem dalgaların süperpozisyonu.

Dalga karakteri $\rightarrow$ kırınım deneyi.

Hemen hemen mom. özdurumunda hazırlanmış bir sist. ele alalım: yani kuantum parçacıklarının monokromatik bir demeti olsun. Parçacıklar yüklü ise böyle bir demeti hazırlamak kolaydır. Bu nedenle elektron demeti alalım. Eğer $f_\varepsilon(p'-p)$ bu demetin mom. yayılımını tasvir eder ise, o zaman uzaysal dağılım

$$\phi(x) = \int dk' \hbar \frac{f_\varepsilon(k'-k)}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ik'x'}$$

ile verilir. Eğer mom. yayılımı $\hbar k$ civarında dar olursa bu bir düzlem dalgaya yakındır:

$$\phi(x) \approx A e^{ikx}$$

Bu yaklaşık düzlem dalga bir engelden kırınıma tipik bir kırınım şekli elde edilir.

BS K

$\lambda = h/p$ 'ye ek olarak, özel rölativiteden $\omega = E/\hbar$ denk.i vardır. Bu ikisi arasındaki bağlantı dalgamız için olan $\omega = f(k)$ dağınım bağıntısından elde edilir. $E = f(p)$

* foton için: $\underbrace{\omega = ck}_{\text{dalga}}$ $\underbrace{E = cp}_{\text{kütlesiz parçacık}}$ $[\ E^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2\ ]$

$\omega = E/\hbar \rightarrow \lambda = h/p$ 'nin sonucudur (ya da tersi

* rölativistik olmayan elekt. için:

$$\omega = k^2/2(m/\hbar) \rightarrow E = p^2/2m$$

parçacık : yerelleşebilir kütle noktası. Klasik olarak böyle bir parçacığın enerjisine mom.'u kesin olarak verilebilir.
$\vec{p} = m\vec{v}$, $E = p^2/2m$

dalga : $\omega, \vec{k}$

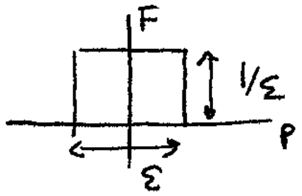
Q.M. de fiziksel sist. farklı durumlardan oluşur. Örneğin bu hemen hemen mom. durumunda bulunabilir. Böyle bir durum, konumunu sorabiliriz, yani konumu $x - \frac{\Delta}{2} < x' < x + \frac{\Delta}{2}$ aralığında herhangi bir yerde bulma olasılığını bilmek isteyebiliriz. Bu şöyle ifade edilir:

BS K

$$\mathrm{Tr}\left(\Lambda\left(x-\frac{\Delta}{2}, x+\frac{\Delta}{2}\right)W(p)\right)$$

$$= \int_{x-\Delta/2}^{x+\Delta/2} dx' \, \langle x' | W(p) | x' \rangle$$

kesinleştirmek için hemen hemen momentum durumları

[$F_\varepsilon(p)$,  alınarak bulunur.

$f_\varepsilon(p'-p) = 1/\sqrt{\varepsilon}$, $\left(p-\frac{\varepsilon}{2}, p+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ aralığında]

$$\langle x | W(p) | x \rangle = \int_{p-\frac{\varepsilon}{2}}^{p+\frac{\varepsilon}{2}} dp' \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{e^{ixp'/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{p-\frac{\varepsilon}{2}}^{p+\frac{\varepsilon}{2}} dp'' \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{e^{-ixp''/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\,\varepsilon \qquad \varepsilon x/\hbar \ll 1 \text{ için}$$

olur. Sonuç konumdan bağımsızdır. Böylece fiziksel sistem için x civarında Δ uzunluğunda aralıkta bir değer bulmanın olasılığı

$$\int_{x-\frac{\Delta}{2}}^{x+\frac{\Delta}{2}} dx' \, \langle x' | W(p) | x' \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar}\,\varepsilon\Delta$$

olur. Yani sistem aynı olasılıkla uzayda heryerde bulunabilir. $\varepsilon \to 0$ için, bu olasılık 0 olur, ki bu gerçekçi değildir.

Hemen hemen mom. durumu için her konum aynı olasılığa sahiptir yani konum belirsizdir. Fiziksel sist. oldukça iyi tanımlanmış dalga sayısı ve dalga boyu ile bir dalga durumu içindedir; böylece bir dalga olarak görünür.

BS K

Mom. durumundaki bir kuantum fiziksel sist.'i durumu değiştiren bir ölçme yapılıncaya kadar bir dalga gibi davranır. Böyle bir ölçme yapılmadıkça teorik öngörüler, klasik dalga teorisindeki ile tamamı ile aynıdır.

Hemen hemen konum özdurumlar $W(x)$ ile de aynı tartışma yapılabilirdi: Mom. op.'ün olasılık yoğunluğu,

$$\langle p | W(x) | p \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \xi$$

Mom.'u $p - \varepsilon/2$ ve $p + \varepsilon/2$ aralığında bulma olasılığı,

$$\int_{p-\varepsilon/2}^{p+\varepsilon/2} dp' \langle p' | W(x) | p' \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \xi \varepsilon .$$

parçacık $\longrightarrow$ kesin mom. değeri yok. (p'nin her değeri için aynı olasılık)

$W(p) = \Lambda \left(p - \frac{\varepsilon}{2}, p + \frac{\varepsilon}{2} \right)$: Fiz. sist. iyi tanımlı mom. durumda

$W(x) = \Lambda \left(x - \frac{\xi}{2}, x + \frac{\xi}{2} \right)$: 〃 〃 konum 〃.

Bu ikisi birbirlerine (complementary)'dir denir
(tamamlayıcı, tümleyici)

$\tilde{\Lambda}$ ve Λ comp. $\Rightarrow$ $1 - \tilde{\Lambda}$ ve Λ
$\tilde{\Lambda}$ ve $1 - \Lambda$
$1 - \tilde{\Lambda}$ ve $1 - \Lambda$ comp. dir.

$K\Lambda$: Λ özelliğini durumu.

BS K

Prb. 2.4.) ϕ_n Harmonik osil.'ün normalize vektörleri olsun. Herbir kompleks z sayısı için

$$|z\rangle \equiv e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \phi_n$$

koherent durum vektörü tanımlanmış olsun. **(a)** $|z\rangle$ koherent durumunun a operatörünün z özdeğerli bir özdurumu olduğunu gösteriniz.

$$a|z\rangle = e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} a_n\phi_n \quad \sqrt{n}\,\phi_{n-1}$$

$$= e^{-|z|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{(n-1)!}} \phi_{n-1}$$

$$= e^{-|z|^2/2} z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} \phi_{n-1} = z\, e^{-|z|^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\sqrt{m!}} \phi_m$$

$$= z|z\rangle$$

$$\boxed{a|z\rangle = z|z\rangle}$$

(b) ϕ_n'nin $|z\rangle$ ile skaler çarpımı $|\langle\phi_n|z\rangle|^2 = \frac{|z|^{2n}}{n!} e^{-|z|^2}$ özelliğine sahip olduğunu gösteriniz.

$$\langle\phi_m|z\rangle = e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \langle\phi_m|\phi_n\rangle = e^{-|z|^2/2} \frac{z^m}{\sqrt{m!}}$$

$$\Rightarrow \quad |\langle\phi_m|z\rangle|^2 = e^{-|z|^2} \frac{|z|^{2m}}{m!}$$

BS K

(c) $|z\rangle$ ve $|z'\rangle$ gibi iki koherent durumun skaler çarpımını bulunuz.

$$\langle z|z'\rangle = e^{-|z|^2/2}\, e^{-|z'|^2/2} \sum_{n,m} \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}} \frac{z'^m}{\sqrt{m!}} \langle \phi_n|\phi_m\rangle$$

$$= \exp\left\{-\frac{|z|^2}{2} - \frac{|z'|^2}{2}\right\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n z'^n}{n!}$$

$$= \exp\left\{-\frac{|z|^2}{2} - \frac{|z'|^2}{2} + \bar{z} z'\right\}$$

(d) $|z\rangle$ koherent durumunda H, Q ve P operatörlerinin beklenen değerlerini hesaplayınız.

$$\langle z|H|z\rangle = \hbar\omega\, e^{-|z|^2} \sum_{n,m} \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}} \cdot \frac{z^m}{\sqrt{m!}} \langle \phi_n| (a^\dagger a + \tfrac{1}{2}) |\phi_m\rangle$$

$$= \hbar\omega\, e^{-|z|^2} \sum_{n,m} \frac{\bar{z}^n z^m}{\sqrt{n!m!}} (n+\tfrac{1}{2}) \langle \phi_n|\phi_m\rangle$$

$$= \hbar\omega\, e^{-|z|^2} \sum_{n} \frac{|z|^n}{n!} (n+\tfrac{1}{2})$$

$$= \hbar\omega\, e^{-|z|^2} \Bigg[|z|^2 \underbrace{\sum_n \frac{|z|^{2n-2}}{\cancel{n!}_{(n-1)!}} \cancel{n}}_{e^{-|z|^2}} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_n \frac{|z|^{2n}}{n!}}_{e^{-|z|^2}} \Bigg]$$

$$= \hbar\omega \left(|z|^2 + \frac{1}{2}\right)$$

(e) $W = |z\rangle\langle z|$ saf koherent durumu için $\Delta P \Delta Q = \hbar/2$ olduğunu gösteriniz.

$$Q = \sqrt{\hbar/2\mu\omega}\,(a + a^\dagger) \qquad P = -i\sqrt{\mu\omega\hbar/2}\,(a - a^\dagger)$$

BS K

$$\langle z|Q|z\rangle = \sqrt{\hbar/2\mu\omega}\;(z+\bar{z})$$

$$[a, a^{+}] = 1$$

$$\langle z|P|z\rangle = -i\sqrt{\mu\omega\hbar/2}\;(z-\bar{z})$$

$$\langle z|Q^2|z\rangle = \frac{\hbar}{2\mu\omega}\langle z|(\underbrace{aa^{+}}_{1+a^{+}a} + a^{+}a + a^2 + a^{+2})|z\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2\mu\omega}\langle z|(2a^{+}a + a^2 + a^{+2} + 1)|z\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2\mu\omega}\langle z|[(z+\bar{z})^2 + 1]|z\rangle$$

$$(\Delta Q)^2 = \hbar/2\mu\omega \qquad (\Delta P)^2 = \mu\omega\hbar/2$$

$$\Delta Q\,\Delta P = \hbar/2 .$$

BS K

Prb. 6.) Bir Q.M. osilatörümüz olsun. **(a)** sist.'in durumun $W \equiv \sum_n w_n \Lambda_n$ ile verilsin. $\mathrm{Tr}W = 1$ 'in $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = 1$ 'den çıktığını gösteriniz.

$$\mathrm{Tr}\,W = \sum_\gamma (\phi_\gamma, W\phi_\gamma) = \sum_\gamma \left(\phi_\gamma, \sum_n w_n \Lambda_n \phi_\gamma\right)$$

$$= \sum_{n,\gamma} w_n (\phi_\gamma, \underbrace{\Lambda_n \phi_\gamma}_{\delta_{n\gamma}}) = \sum_\gamma w_\gamma \underbrace{(\phi_\gamma, \phi_\gamma)}_{1}$$

$$= 1 \iff \sum_\gamma w_\gamma = 1 \text{ ise.}$$

(b) $W = \tilde{W}/(\mathrm{Tr}\,\tilde{W})$ 'nin normalize istatiksel op. olduğunu gösteriniz. ($\tilde{W} = \sum_n h_n \Lambda_n$ Eq. 4.22.)

$$\langle A \rangle = \mathrm{Tr}(A\tilde{W})/\mathrm{Tr}\,\tilde{W} = \mathrm{Tr}\left(AW\cancel{\mathrm{Tr}\tilde{W}}\right)/\mathrm{Tr}\left(W\cancel{\mathrm{Tr}\tilde{W}}\right)$$

$$= \mathrm{Tr}(AW)/\mathrm{Tr}(W).$$

(c) Λ projeksiyon op.'ü olsun. $\mathrm{Tr}\,\Lambda = \dim(\Lambda \mathcal{H})$ olduğunu gös.

$$\mathrm{Tr}\,\Lambda_n = \sum_k \sum_m (\phi_m^k, \underbrace{\Lambda_n \phi_m^k}_{\phi_n^k})$$

$$= \sum_{k=1}^{\dim(\Lambda_n \mathcal{H})} = \dim(\Lambda_n \mathcal{H}).$$

BS K

Prb. 2.7.) Q.M. osilatör $W = \Lambda_n$ durumunda iken Q, Q^2, P ve P^2 op. lerinin beklenen değerlerini hesaplayınız. Burada Λ_n, $E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$ özdeğerine karşı gelen enerji özuzayı üzerine projeksiyon operatörüdür.

$$\langle Q \rangle = \mathrm{Tr}(QW) = (\phi_n, Q\phi_n) \qquad Q = \sqrt{\hbar/2\mu\omega}\,(a+a^\dagger)$$

$$(\phi_n, a\phi_n) = (\phi_n, a^\dagger \phi_n) = 0 \quad \Rightarrow \langle Q \rangle = 0$$

$$\langle Q^2 \rangle = \frac{\hbar}{2\mu\omega}(\phi_n, (a+a^\dagger)^2\phi_n) \quad , \quad a^{\dagger 2} + a^2 + \underbrace{a a^\dagger + a^\dagger a}_{2a^\dagger a + 1}$$

$$= \frac{\hbar}{2\mu\omega}(\phi_n, (2a^\dagger a + 1)\phi_n)$$

$$= \frac{\hbar}{2\mu\omega}(2n+1) = \frac{\hbar}{\mu\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right) \qquad P = -i\sqrt{\mu\omega\hbar/2}\,(a-a^\dagger)$$

$$\langle P \rangle = 0$$

$$\langle P^2 \rangle = -\frac{\mu\omega\hbar}{2}(\phi_n, (a-a^\dagger)^2\phi_n) \qquad a^2 + a^{\dagger 2} \underbrace{- a a^\dagger - a^\dagger a}_{-2a^\dagger a - 1}$$

$$= +\frac{\mu\omega\hbar}{2}(2n+1) = \mu\omega\hbar\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Delta Q\, \Delta P = \hbar\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

BS K

Prb. 2.8.) Λ, ψ tarafından gerilen $(\|\psi\|=1)$ bir-boyutlu alt uzay üzerine projektör olsun. Sist. $W=\Lambda$ durumunda iken H'nin dispersiyonunu $(\mathrm{disp}_{(\Lambda)} H)$ hesaplayınız ve ≥ 0 olduğunu gösteriniz.

$$\mathrm{disp}_{(\Lambda)} H = \langle H^2\rangle_\Lambda - \langle H\rangle_\Lambda^2$$

$$= \mathrm{Tr}(H^2\Lambda) - [\mathrm{Tr}(H\Lambda)]^2$$

$$= (\psi, H^2\Lambda\psi) - (\psi, H\Lambda\psi)^2$$

$$= (\psi, H^2\psi) - (\psi, H\psi)^2 \quad ; \quad |\psi\rangle = \sum_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n|\psi\rangle$$

$$H|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle$$

$$= \sum_n E_n^2 |\langle\psi|\phi_n\rangle|^2 - \left(\sum_n E_n |\langle\psi|\phi_n\rangle|^2\right)^2$$

$$= \sum_n E_n^2 |\langle\psi|\phi_n\rangle|^2 - \sum_{nm} E_n E_m |\langle\psi|\phi_n\rangle|^2 |\langle\psi|\phi_m\rangle|^2$$

$$1 = \sum_n |\langle\psi|\phi_n\rangle|^2 = \langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi|\sum_n|\phi_n\rangle\langle\phi_n|\psi\rangle$$

$$= \sum_m |\langle\psi|\phi_m\rangle|^2 \sum_n E_n^2 |\langle\psi|\phi_n\rangle|^2 - \left(\sum_n E_n |\langle\psi|\phi_n\rangle|^2\right)^2$$

≥ 0 Cauchy eşitsizliği bkz. txt.

BS K

Prb. 2.10.) $W = \sum_k w^k |\phi_a^k\rangle\langle\phi_a^k|$ ile verilmiş olsun. $disp_{(W)} A = 0$ olduğunu gösteriniz.

$$disp_{(W)} A = \langle A^2 \rangle_W - \langle A \rangle_W^2$$

$$= Tr\,(A^2 W) - [Tr\,(AW)]^2$$

1.) 2.)

1.) $$Tr\,A^2 W = \sum_n (\phi_n^k, A^2 W \phi_n^k)$$

$$= \sum_{n,k} w^k (\phi_n^k, A^2 \underbrace{|\phi_a^k\rangle}_{a^2|\phi_a^k\rangle} \underbrace{\langle\phi_a^k|\phi_n^k}_{\delta_{na}})$$

$$= \sum_k w^k (\phi_a^k, a^2 \phi_a^k)$$

$$= a^2 \sum_k w^k = a^2$$

2.) $$Tr\,AW = a \quad \Rightarrow \quad disp_{(W)} A = 0$$

BS K

Prb. 2.11.) $W = \sum_{a_i} w_{a_i} \Lambda_{a_i} \frac{1}{\dim(\Lambda_{a_i}\mathcal{H})}$ (Eq. 4.31) verilmiş olsun.

$\langle A \rangle$'yı hesaplayınız. Eq. 4.51 ile verilen W' normalize midir?

$$\langle A \rangle = \mathrm{Tr}(AW) = \frac{1}{\dim(\Lambda_{a_i}\mathcal{H})} \sum_{a_i, \kappa} w_{a_i}^{\kappa} \left(\phi_{a_n}^{\kappa}, \underbrace{A \Lambda_{a_i} \phi_{a_n}^{\kappa'}}_{a_n^{\kappa} \delta_{a_i a_n}} \right)$$

$$= \frac{1}{\dim(\Lambda_{a_i}\mathcal{H})} \sum_{\kappa} w_{a_n}^{\kappa} a_n^{\kappa} .$$

$$W' = \sum_{b_i} \Lambda_{b_i} W \Lambda_{b_i} \qquad \text{Eq. 4.51.}$$

$$\mathrm{Tr}\, W' = \sum_i (\phi_i, W' \phi_i)$$

$$= \sum_{i, b_i} \left(\phi_i, \Lambda_{b_i} W \underbrace{\Lambda_{b_i} \phi_i}_{\phi_{b_i} \delta_{i, b_i}} \right)$$

$$= \sum_{b_i} \left(\phi_{b_i}, \Lambda_{b_i} W \phi_{b_i} \right)$$

$$= \sum_{b_i} \left(\phi_{b_i}, \underbrace{\Lambda_{b_i} \phi_n}_{\phi_n \delta_{b_i n}} \right) = (\phi_n, \phi_n) = 1 .$$

BS K

Prb. 2.13.) Harmonik Os.'ün $\phi_n = |n\rangle$ enerji özvektörleri arasında P ve Q op.'nın $\langle n|P|m\rangle$, $\langle n|Q|m\rangle$ matris elemanlarını hesaplayınız.

$$\langle n|Q|m\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu w}}\left(\langle n|a|m\rangle + \langle n|a^{+}|m\rangle\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu w}}\left(\sqrt{m}\,\langle n|m-1\rangle + \sqrt{m+1}\,\langle n|m+1\rangle\right.$$

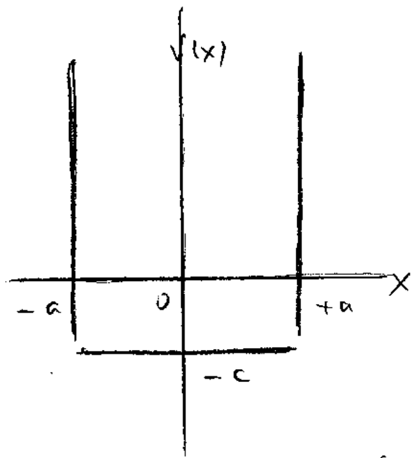
$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu w}}\left(\sqrt{m}\,\delta_{n,m-1} + \sqrt{m+1}\,\delta_{n,m+1}\right)$$

$$\langle n|P|m\rangle = -i\sqrt{\frac{\mu w\hbar}{2}}\left(\langle n|a|m\rangle - \langle n|a^{+}|m\rangle\right)$$

$$= -i\sqrt{\frac{\mu w\hbar}{2}}\left(\sqrt{m}\,\delta_{n,m-1} - \sqrt{m+1}\,\delta_{n,m+1}\right)$$

BS K

Prb. 2.18.) m kütleli bir Q.M. parçacık $-a<x<+a$ bölgesine nüfuz edilemez duvarlarla hapis edilmiş olsun. Bu genelleştirilmiş konum özdurumları $|x\rangle$ arasında pot. enerji op. V'nin beklenen değerinin $\langle V\rangle_x = \langle x|V|x\rangle / \langle x|x\rangle = -c$ olduğu anlamına gelir. Q konumunun bir ölçümünün x değerini vereceği olasılığın sadece $-a<x<+a$ için sıfırdan farklı olduğu anlamına da gelir. $H = P^2/2m + V$ enerji op.'nün özvektörlerini $|n\rangle$ ile gösterelim ve Λ_n, $|n\rangle$ tarafından gerilen uzaya izdüşüm op. olsun. H'nin özdeğerlerini ve Q, Q^2, P ve P^2 nin beklenen değerlerini sist. bir Λ_n enerji özdurumunda iken hesaplayınız.



$$W = \Lambda_n = |n\rangle\langle n|$$

$$\frac{\mathrm{Tr}\,HW}{\mathrm{Tr}\,W} = \sum_i (\phi_i, HW\phi_i) / \mathrm{Tr}\,W = E_n$$

$$\mathrm{Tr}(HW) = \sum_i \left(\phi_i, \frac{P^2}{2m} W\underbrace{\phi_i}_{\phi_n}\right) + \sum_i (\phi_i, VW\underbrace{\phi_i}_{\phi_n})$$

$$= \frac{1}{2m}(\phi_n, P^2\phi_n) + (\phi_n, V\phi_n)$$

$$|\phi_n\rangle = \int dx\, |x\rangle\langle x|$$

$$\mathrm{Tr}(HW) = \frac{1}{2m}\int dx\, \langle\phi_n|P^2|x\rangle\langle x|\phi_n\rangle + \int dx\, \langle\phi_n|V|x\rangle\langle x|\phi_n\rangle$$

$$= \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \frac{d^2}{dx^2}\langle x|\phi_n\rangle - c\,\langle x|\phi_n\rangle$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi_n(x) - c\,\phi_n(x) = E_n\phi_n(x)$$

$$E_n + c = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{a^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \quad ; \begin{cases} \phi_n^{(+)}(x) = A\cos\frac{\pi}{a}\left(n+\frac{1}{2}\right)x \\ \phi_n^{(-)}(x) = B\sin\frac{\pi}{a}nx \end{cases}$$

BS K

$$\phi_n(\mp a) = 0 = \begin{cases} A\cos ka + B\sin ka \\ A\cos ka - B\sin ka \end{cases}$$

$$\phi_n^{(+)}(x) = A\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{a} \qquad \phi_n^{(-)}(x) = A\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$A = B = 1/\sqrt{a}\,.$$

$$E_n = \frac{n^2\pi^2}{8a^2 m}$$

$$\langle Q^2\rangle = \int_{-a}^{+a} dx\; x^2\, |\phi_n^-(x)|^2$$

$$= \frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a} dx\; x^2 \cos^2\frac{m\pi}{2a}x = a^2\left[\frac{1}{3} + \frac{(-1)^m}{m^2\pi^2}\right]$$

BS K

F507 Q.M. Dersi I. Ödevi 23 Kasım 1998.

Bir boyutta harmonik osilatörün $|z\rangle$ koherent durumları a op.'nün z özdeğerli özdurumlarıdır, fakat a^+ op.'nün özdurumları değildirler. İspatlayınız.

<u>İspat</u> : $|z\rangle \to |\alpha\rangle$ alalım.

$a^+|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ olsun.

$\Rightarrow \therefore \quad \langle n|a^+|\alpha\rangle = \alpha\langle n|\alpha\rangle$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \quad , \; a|0\rangle = 0$$

$$, \; \langle n|a^+ = \sqrt{n}\,\langle n-1|$$

$n=0$, $n\neq 0$ $\Rightarrow$

$$\langle 0|a^+|\alpha\rangle = \alpha\langle 0|\alpha\rangle$$

$$0 = \alpha\langle 0|\alpha\rangle \quad \# \; \# \quad n=0$$

$$\langle n-1|\alpha\rangle\sqrt{n} = \alpha\langle n|\alpha\rangle \quad \# \quad n=1,2,\ldots$$

$\alpha=0$ ise, tüm n'ler için $\langle n|\alpha\rangle=0$ bulunur!...

$\alpha\neq 0$ ise,

$$0 = \alpha\langle 0|\alpha\rangle \quad \text{yani} \quad \langle 0|\alpha\rangle = 0 \quad n=0$$

$$\langle n-1|\alpha\rangle\sqrt{n} = \alpha\langle n|\alpha\rangle \quad \text{yani} \quad \langle n|\alpha\rangle = 0 \quad n=1,2,\ldots$$

BS K $\therefore \quad |\alpha\rangle \equiv 0.$

$$\mathrm{Tr}(\Omega) = \sum_n \Omega_{nn} = \sum_n \langle n | \Omega | n \rangle$$

$$\mathrm{Tr}(A^\dagger A) = \sum_n \langle n | A^\dagger A | n \rangle \quad , \quad \sum_n |n\rangle\langle n| = 1$$

$$= \sum_n \langle n | A^\dagger \sum_m |m\rangle\langle m | A | n \rangle$$

$$= \sum_{n,m} \langle n | A^\dagger | m \rangle \langle m | A | n \rangle = \sum_{nm} | \langle n | A | m \rangle |^2$$

$$= \mathrm{Tr}(A A^\dagger)$$

$$\mathrm{Tr}([A, A^\dagger]) = 0$$

$$= \mathrm{Tr}(\mathbb{I}) = \sum_{n=}^{\infty} \langle n | n \rangle = \infty$$

$$0 = \infty$$

BS K