IV. SIRADEĞİŞTİREN GÖZLENEBİLİRLERİN TAM SİSTEMLERİ (CSCO)

Tek boyutlu harmonik salınıcı için, fiziksel durumlar uzayının baz vektörlerini indislemek için bir sayıya ihtiyaç duyduk. Gözlenebilir N'nin özdeğeri olan n sayısını kullandık.

$$N|n\rangle = n|n\rangle \quad \text{ya da} \quad H_{osc}|n\rangle = E_n|n\rangle \quad n=0,1,\ldots$$

n kuantum sayısı yerine, "sürekli kuantum sayısı" x yani konum operatörünün genelleştirilmiş özdeğerini kullanabilirdik. $|n\rangle$ baz vektörleri yerine de genelleştirilmiş $|x\rangle$ baz vektörlerini kullanabilirdik.

$$Q|x\rangle = x|x\rangle \quad , \varphi = \int dx\,|x\rangle\langle x|\varphi\rangle = \int dx\,|x\rangle\,\varphi(x)$$

Ya da p'yi kullanabilirdik. Bütün bunlar tek boyutlu harmonik salınıcı içindi ve tek bir kuantum sayısı ile etiketlendi. Demek ki; N, H, Q ve P'lerin spektrumları basit ve dejenere değildir.

Rotatör için, iki kuantum sayısına gerek duyduk: bunlar, J^2 ve J_3'ün özdeğerleri olan j ve j_3 sayılarıdır:

$$J^2|j,j_3\rangle = j(j+1)\hbar^2|j,j_3\rangle$$

$$J_3|j,j_3\rangle = j_3\hbar\,|j,j_3\rangle$$

J^2 nin spektrumu basit değildir, dejeneredir ve baz vektörlerini etiketlemek için j ye ek olarak j_3 kuantum sayısına gerek duyarız.

BS K

Yukarıdaki baz vektörleri yerine, rotatörün $\mathcal{R}$ fiziksel durumları uzayı için başka baz vektörleri alabiliriz:

$$J^2 \,|j j_3\} = j(j+1)\hbar^2 \,|j j_3\}$$

$$J_3 \,|j j_3\} = j_3 \hbar \,|j j_3\}$$

Her iki kümede normalizasyon koşulu ile baz vektörlerini bir faz çarpanına kadar belirler. Bu şu demektir: $\psi \in \mathcal{R}$ için $J^2\psi = a\psi$ ve $J_3\psi = b\psi$ ise, o zaman

$$a = j'(j'+1)\hbar^2 \quad (j' \text{ tam ya da yarı-tam})$$

$$b = j'_3 \quad (j'_3 \text{ tam ya da yarı-tam ve } -j' \le j'_3 \le j')$$

ve $\psi = \alpha |j', j'_3\rangle$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Yukarıdaki iki baz sistemi,

$$|E_n) = \sum_{i=1}^{\infty} |i\rangle\langle i|E_n) \qquad |i\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |E_n)(E_n|i\rangle$$

baz dönüşümleri ile birbirine bağlanır. Dönüşüm katsayıları

$\boxed{\langle j j_3 | j' j'_3\}}$, gözlenebilirlik cebiri ile tamamen ile belirlenebilir (faz çarpanları hariç.)

Salınıcı için bir gözlenebilir ve bir kuantum sayısı (H_{osc}, n) rotatör için ise iki sıra değiştiren op. ve iki kuantum sayısı (J^2, J_3 ; j, j_3).

Belirli bir yere kadar hangi gözlenebilirliği alacağımız bir seçimi vardır, ancak fiziksel sistemler uzayının baz vektörlerini niteleyecek ikisinin sayısı fiziksel sist. tarafından belirlenir.

BS K

— ~~Baz~~ sistemini tam olarak niteleyen, sıra değişmeli hermitsel operatörler sistemine (C.S.C.O) denir. Bir CSCO'nun genelleştirilmiş özdeğerleri kuantum sayıları olarak adlandırılır. (P.M. Dirac)

— Tek boyutlu Harmonik salınıcı ~~için~~, CSCO tek bir operatörden ibarettir: ya N, ya da Q, ya da başka bir operatör. ~~Rotator için~~ CSCO, iki operatörden ibarettir. J^2 ve J_3 seçimi uygun olanıdır.

— Başka sistemlerde cebir daha büyük ile, operatörler sayısı daha fazla olabilir.

Direkt çarpım uzayında, bir baz sistemi iki çarpan uzayındaki baz vektörlerinin direkt çarpımı olarak ifade edilir, açıkça iki sistemin birleşiminin bir CSCO'su her alt sist. için olan iki CSCO'nun birleşimi ile verilir. Örneğin titreşen rotatör için CSCO,

$$(N, J^2, J_3)$$

ile verilir. Ancak değişik mümkün CSCO'lar vardır.

Fizikçinin problemi; verilen bir cebir için bir CSCO bulmak değildir, bunun tersidir. Deneysel verilerden kaç tane kuantum sayısı gerektiğini ve bunların mümkün değerlerini ve olasılığını bulunur. Bu, tam sıra değiştiren kümeyi $\{A_k\}$'yı ve onun spektrumunu verir. $\{A_k\}$ ya min. sayıda başka operatör ekleyerek toplam A cebiri tahmin edilir ki A'nın elemanlarının matris elemanları, karşı gelen gözlenebilirlerin deneysel değerleri ile uyuşur.

BS K

Q.M. deki cebirler için daima bir CSCO 'nun var olduğunu varsayabiliriz. Böylece $\mathcal{A}$ cebiri için,

$$A_1, A_2, \ldots, A_N \in \mathcal{A} \qquad \underbrace{\text{CSCO}}$$

şeklinde sıradeğiştiren op. kümesi vardır. Bunların bir (genelleştirilmiş) özvektörler kümesi vardır.

$$A_k \,|\lambda_1, \ldots, \lambda_N\rangle = \lambda_k \,|\lambda_1, \ldots, \lambda_N\rangle$$

öyle ki her fiziksel ϕ durum vektörü,

$$\phi = \int_\Lambda d\mu(\lambda)\, |\lambda_1 \ldots \lambda_N\rangle\langle\lambda_1 \ldots \lambda_N | \phi\rangle$$

olarak temsil edilebilir. Burada $\Lambda = \{(\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_N)\}$ kümesi <u>CSCO 'nun spektrumudur</u>: $\Lambda_k = \{\lambda_k\}$, A_k gözlenebilirinin spektrumu olmak üzere. Bu, A_k 'nın <u>sürekli bir spektrumu var ise</u>, Λ_k bir genelleştirilmiş özdeğerler kümesi'dir demek anlamına gelir. A_k <u>kesikli spektruma sahip ise</u> Λ_k, bütün kesikli özdeğerler kümesidir.

$$\int_\Lambda d\mu(\lambda) = \int_{\Lambda_1} \cdots \int_{\Lambda_N} d\mu(\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_N)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{kesikli} \rightarrow \text{toplam} \\ \text{sürekli} \rightarrow \text{integral} \end{array} \right\}$$

Bazen, $A_1, A_2, \ldots, A_N$ gözlenebilirlerinden bazıları sürekli spektrum $\Lambda_c = \{(\lambda_1 \ldots \lambda_M)\}$ ve bazıları ise $\Lambda_D = \{(\lambda_{M+1}, \ldots, \Lambda_N)\}$ kesikli spektruma sahiptir. O zaman

$$\phi = \int_{\Lambda_c} \cdots \int d\mu(\lambda_1 \ldots \lambda_M) \sum_{\Lambda_D} \cdots \sum$$

$$|\lambda_1 \ldots \lambda_M, \lambda_{M+1}, \ldots \lambda_N\rangle\langle\lambda_1 \ldots \lambda_N | \phi\rangle$$

BS K

Bu bağıntı Q.M. de Dirac formülasyonunun temelidir.

[redacted]:

$A_1, A_2, \dots A_N$ 'ler (genelleştirilmiş) özvektörleri $|\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_N\rangle = |\lambda\rangle$ olan bir CSCO olsun, öyleki

$$A_k |\lambda\rangle = \lambda_k |\lambda\rangle \qquad k = 1, \dots, N$$

O zaman

$$A_i \,| a\} = a_i \,| a\} \qquad i = 1, \dots, N$$

den özdeğerler kümesinin aynı olduğu çıkar

$$\{ (a_1, \dots, a_N) \} = \{ (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \}$$

ve aynı $a = \lambda$ özdeğerleri olan özvektörler için

$$|a\} = \alpha \,|\lambda\rangle \qquad \alpha \in \mathbb{C}.$$

vardır.