V. AÇISAL MOMENTUMLARIN TOPLANMASI
WIGNER – ECKART TEOREMİ

Q.M.'sel rotatörün fiziksel durumlarının uzayı

$$\mathcal{H} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \oplus\, \mathcal{R}^{\ell}$$

$\mathcal{R}^{\ell}$: L_i açısal mom. cebrinin indirgenemez temsilinin uzayı.

$$[L_i, L_j] = i\hbar\, \epsilon_{ijk} L_k$$

$\mathcal{E}(SO(3)_{L_i})$: rotatör için gözlenebilirlerin cebrinin alt cebri.

[$\mathcal{E}(SO(3)_{L_i})$ çeşitli açısal mom.'ları temsil edebilir. Örneğin bir nokta kütlenin yörüngesel açısal mom.'u, ya da bir halterin açısal mom.'u, ya da bir elektronun spin operatörü olabilir. Çeşitli farklı fiziksel realizasyonları olabilir.]

$\ell = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$ olan, fiziksel durumların uzayı $\mathcal{R}^{\ell}$ olan fiziksel bir sist.'i alalım. Eğer, $E^{ext} \ll E_{\ell} - E_{\ell-1}$ ve $E_{\ell+1} - E_{\ell}$ ise her rotatör böyle bir sist. olarak ele alınabilir. Durumlar uzayı $\mathcal{R}^{\ell}$ olan fiziksel bir sist.'i elementer rotatör olarak adlandırırız.

Elementer rotatörler diatomik molekülün altyapıları değildirler, fiziğin tüm alanlarındaki Q.M.'sel sistemlerde ortaya çıkarlar.

(rotatör'e (den) transfer edilen enerji.)

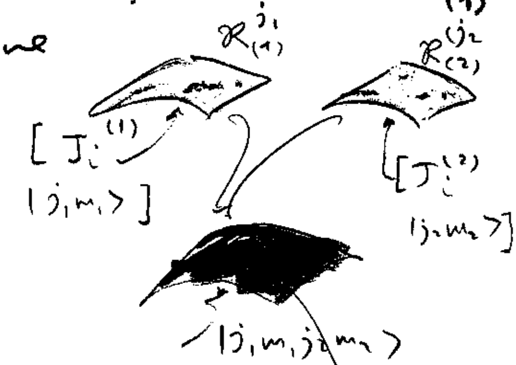
BS K

V.2. Elemanter Rotatörlerin Birleşimi:

Temel varsayım IV 'e göre, uzayları $\mathcal{R}^{j_1}_{(1)}$ ve $\mathcal{R}^{j_2}_{(2)}$ olan iki elemanter rotatörün birleşiminin fiziksel durumlarının uzayı

$$\mathcal{R}^{j_1}_{(1)} \otimes \mathcal{R}^{j_2}_{(2)} = \mathcal{R}$$

direkt çarpım uzayıdır. $J_i^{(1)}$ ve $J_i^{(2)}$ 'ler karşılıklı olarak $\mathcal{R}^{j_1}_{(1)}$ ve $\mathcal{R}^{j_2}_{(2)}$ de açısal mom. op. 'leri olsun, ve



$$|j_1m_1\rangle \qquad m_1 = -j_1, \dots, +j_1$$

$$|j_2m_2\rangle \qquad m_2 = -j_2, \dots, +j_2$$

'lerde $\mathcal{R}^{j_1}_{(1)}$ ve $\mathcal{R}^{j_2}_{(2)}$ deki baz sistemleri olsun. O zaman $\mathcal{R}^{j_1}_{(1)} \otimes \mathcal{R}^{j_2}_{(2)}$ deki bir baz sist. 'i

$$\boxed{|j_1m_1\rangle \otimes |j_2m_2\rangle = |j_1m_1j_2m_2\rangle} \qquad (*)$$

ile verilir. $J_i^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, 2)$ 'ler

$$[J_i^{(\alpha)}, J_j^{(\alpha)}] = i\hbar \, \epsilon_{ijk} J_k^{(\alpha)}$$

sıradeğişme bağıntılarını sağlarlar. $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{j_1}_{(1)} \otimes \mathcal{R}^{j_2}_{(2)}$ de operatörleri

$$J_i = J_i^{(1)} \otimes I + I \otimes J_i^{(2)}$$

ile tanımlarız ve J_i 'ler

$$[J_i, J_j] = i\hbar \, \epsilon_{ijk} J_k$$

bağıntısını sağlarlar.

birleşik sist. 'in top. açısal mom. operatörleri

BS K

$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$

$\mathcal{R}$'nin $\circledast$ baz sist. i aşağıdaki CSCO'nun özvektörlerinden ibarettir:

$$\vec{J}^{(1)^2} \otimes I \qquad J_3^{(1)} \otimes I \qquad I \otimes \vec{J}^{(2)^2}, \quad I \otimes J_3^{(2)}$$

bunların özdeğerleri;

$$\vec{J}^{(1)^2} \otimes I\, |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = j_1(j_1+1)\hbar^2\, |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

$$J_3^{(1)} \otimes I\, |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = m_1\hbar\, |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

$$I \otimes \vec{J}^{(1)^2}\, |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = j_2(j_2+1)\hbar^2\, |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

$$I \otimes J_3^{(2)}\, |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = m_2\hbar\, |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

$\circledast$ deki operatörler için kısaltılmış notasyon kullanalım.

$$\boxed{J_i^{(1)} = J_i^{(1)} \otimes I \qquad J_2^{(2)} = I \otimes J_i^{(2)}}$$

$\circledast$ Bunları, $\mathcal{R}^{j_\alpha}_{(\alpha)}$ uzayının $J_i^{(\alpha)}$ ları ile karıştırmayalım.

$\circledast$ bazı genelde birleşik sist. in fiziksel bazı değildir. Bir baz ancak içinde fiziksel sist. in barındırılabildiği özdurumlardan ibaret ise fizikseldir. Eğer bütün fiziksel durumlar, fiziksel sist.'in H enerji op.'ü özdurumları ise, o zaman fiziksel baz enerji op.'ü ile sıra değiştiren op.'lerin özvektörlerinden ibaret olmalıdır. Genelde $J_i^{(\alpha)}$ ların hepsi enerji op.'ü ile sıra değiştirmez (özellikle iki açısal mom. op.'ü arasında etkileşme varsa).

$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$

BS K

$$[H, J^2_{top}] = 0$$

Genelde enerji op.'ü ile sıradeğiştiren op.'ler J_i toplam açısal mom. larıdır (bunlar H ile, H dönme değişmez olduğunda sıra değiştirir). Bu nedenle $\mathcal{R}$'de CSCO'in özvektörlerinden ibaret bir baz seçmek uygundur. Bu CSCO'lar,

$$\vec{J}^{(1)2} = \vec{J}^{(1)2} \otimes I \;, \quad \vec{J}^{(2)2} = I \otimes \vec{J}^{(2)2} \quad \vec{J}^2 = \sum_i J_i^2 \;, \; J_3 .$$

Bu bazı $|j_1 j_2 jm\rangle$ ile gösterelim. Bu baz şu özelliklere sahiptir.

$$\begin{cases} \vec{J}^{(\alpha)2} |j_1 j_2 jm\rangle = j_\alpha (j_\alpha + 1) \hbar^2 |j_1 j_2 jm\rangle \\ J_3 |j_1 j_2 jm\rangle = m\hbar |j_1 j_2 jm\rangle \\ \vec{J}^2 |j_1 j_2 jm\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j_1 j_2 jm\rangle \end{cases}$$

Her vektör, ve sonuç olarak $\otimes$ bazının her baz vektörü bu baz sist. ine göre açılabilir:

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = \sum_{jm} \underbrace{|j_1 j_2 jm\rangle\langle j_1 j_2 jm|}_{|jm\rangle\langle jm|} j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

veya tersi

$$|j_1 j_2 jm\rangle = \sum_{m_1 m_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \underbrace{\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 jm\rangle}_{|jm\rangle}$$

Clebsch – Gordan

ya da Wigner katsayıları.

j_1 ve j_2 'nin sbt değerleri için,

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle = \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m\rangle$$
$$= C(j_1 j_2 j m_1 m_2 m)$$
$$= \langle m_1 m_2 | j m\rangle$$
$$= C^{j_1 j_2 j}_{m_1 m_2 m}$$

ile gösterilirler.

$\ddagger$ denklemi $|j_1 m_1' j_2 m_2'\rangle$ ile skaler çarparsak,

$$\delta_{m_1' m_1}\delta_{m_2' m_2} = \sum_{jm} \langle j_1 m_1' j_2 m_2' | j m\rangle\langle j m | j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

$\ddagger$ denklemi: $|j_1 j_2 j' m'\rangle$ ile skaler çarparsak
$|j' m'\rangle$

$$\delta_{jj'}\delta_{mm'} = \sum_{m_1 m_2} \langle j' m' | j_1 m_1 j_2 m_2\rangle\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m\rangle$$

(*) Şimdi, $\vec{J}^2$ ve J_3 'ün $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{j_1}_{(1)} \otimes \mathcal{R}^{j_2}_{(2)}$ deki spektrumunu bulmak istiyoruz; yani $|j_1 j_2 j m\rangle$ bazında j ve m hangi değerleri alır.

$$J_3 = J_3^{(1)} + J_3^{(2)}$$
$$\vec{J}^2 = \left(\vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)}\right)^2$$

BS K

Açıklık için, direkt çarpım baz vektörlerinde kıvrık parantez kullanalım. ($|j_1 j_2 jm\rangle$ den ayırt etmek için),

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\} = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$$

j_1 ve j_2 sbt. değerler olduğundan,

$$|m_1 m_2\} = |j_1 m_1 j_2 m_2\} \quad \text{ve} \quad |jm\rangle = |j_1 j_2\, jm\rangle$$

alırız. $|m_1 m_2\}$ vektörleri m_1+m_2 özdeğerli $J_3 = J_3^{(1)} + J_3^{(2)}$ nin özvektörleri olduğundan, $\mathcal{R}$ deki J_3 'ün spektrumu $m_2 = j_2, j_2-1, \ldots, -j_2$ ile $m_1 = +j_1, j_1-1, \ldots, -j_1$ 'in bütün mümkün toplamları olarak verilir:

$$\text{spekt } J_3 = \{ j_1+j_2,\, j_1+j_2-1, \ldots, -j_1-j_2 \}.$$

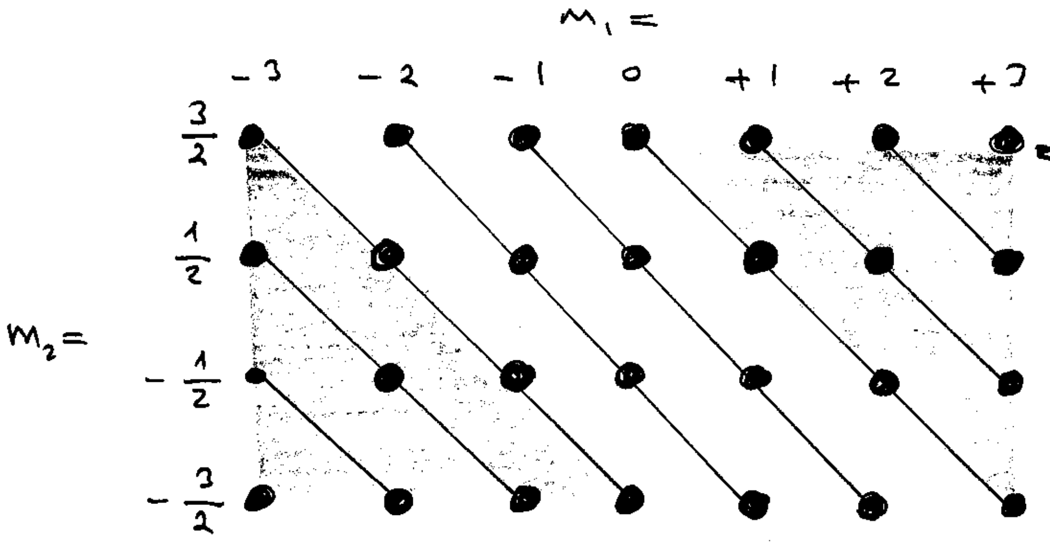
$$J_3 |jm\rangle = \hbar m |jm\rangle$$

olduğundan $|jm\rangle$ bazındaki m kuantum sayıları yukarıki değerleri alır. m için özel bir değeri olan J_3 'ün bütün özvektörlerinden ibaret $\mathcal{R}$'nin altuzayı $\mathcal{R}_m$ ile gösterilir. $\mathcal{R}_m$ 'nin boyutu, $m_1+m_2=m$ olan direkt çarpım baz vektörleri $|m_1 m_2\}$ 'nin sayısı sayılarak elde edilir ve

$$\dim \mathcal{R}_m = \begin{cases} j_1+j_2+1-|m| & |m| \geq |j_1-j_2| \text{ için} \\ j_1+j_2+1-|j_1-j_2| & |m| \leq |j_1-j_2| \quad \text{"} . \end{cases}$$

Aşağıdaki şekil $j_1 = 3$, $j_2 = 3/2$ durumunu gösterir ve genel $j_1 j_2$ için bu sayımın nasıl yapılacağını tanımlar. $\mathcal{R}_m$ uzayının boyutu, $m_1+m_2=m$ olan köşegen boyunca noktalar sayılarak elde edilir.

BS K



$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{(1)}^{j_1=3} \otimes \mathcal{R}_{(2)}^{j_2=\frac{3}{2}}$$

Gölgeli alanlar $|m| \geq |j_1 - j_2|$ olduğu baz vektörleri[illegible] işaret eder.

$\mathcal{R}_{j_1+j_2}$ uzayı, tek boyutludur ve direkt çarpım baz vektörü $|j_1 j_2\}$ tarafından gerilir. $|j_1 j_2\}$, $\vec{J}^2$'nin $(j_1+j_2)(j_1+j_2+1)$ özdeğerli bir özvektörüdür.

İspat: $\vec{J}^2 = (\vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)})^2 = \vec{J}^{(1)2} + 2\vec{J}^{(1)} \cdot \vec{J}^{(2)} + \vec{J}^{(2)2}$

$$= \vec{J}^{(1)2} + \vec{J}^{(2)2} + 2\left(J_1^{(1)} J_1^{(2)} + J_2^{(1)} J_2^{(2)} + J_3^{(1)} J_3^{(2)}\right)$$

$$= \vec{J}^{(1)2} + \vec{J}^{(2)2} + 2J_3^{(1)} J_3^{(2)} + J_-^{(2)} J_+^{(1)} + J_-^{(1)} J_+^{(2)}$$

<u>j_1 ve j_2, m_1 ve m_2'nin mümkün en yüksek değerleri olduğundan</u>

$$J_+^{(1)} |j_1 j_1\rangle = 0 \quad \text{ve} \quad J_+^{(2)} |j_2 j_2\rangle = 0 \text{'dır.}$$

Böylece, $\{(J_-^{(2)} J_+^{(1)} + J_-^{(1)} J_+^{(2)}) |j_1 j_1\rangle \otimes |j_2 j_2\rangle = 0$

$$\vec{J}^2 |j_1 j_2\} = \left(\vec{J}^{(1)2} + \vec{J}^{(2)2} + 2J_3^{(1)} J_3^{(2)}\right) |j_1 j_1\rangle \otimes |j_2 j_2\rangle$$

$$= [j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1) + 2j_1 j_2]\hbar^2 |j_1 j_1\rangle \otimes |j_2 j_2\rangle$$

$$= (j_1+j_2)(j_1+j_2+1)\hbar^2 |j_1 j_2\} \quad \square\#$$

$|j_1 j_2\}$, CSCO $\vec{J}^{(1)2}, \vec{J}^{(2)2}, \vec{J}^2, J_3$ 'lerin bir özvektörü olurken, toplam açısal mom. baz vektörü $|j_1+j_2\ j_1+j_2\rangle$ 'ye bir kompleks sayı ile sağlanır; bu vektör aynı özdeğerlere sahiptir ve $\mathcal{R}$ 'nin aynı tek boyutlu alt uzayı gerer:

$$|j_1+j_2\ j_1+j_2\rangle = \alpha\,|j_1\,j_2\} \qquad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Her bir baz vektörünün normalize olduğunu varsayarak, α bir faz çarpanıdır ve onu bir seçeriz, öyle ki,

$$|j_1+j_2\,j_1+j_2\rangle = |j_1\,j_2\} \qquad \text{(Condon - Shortley konvensiyonu.)}$$

ve $\{j_1 j_2\,|\,j_1+j_2\ j_1+j_2\rangle = 1.$

$\mathcal{R}_{j_1+j_2}$ 'yi germenin yanında; $|j_1+j_2\ j_1+j_2\rangle$, özdeğeri $j(j+1)$ $=(j_1+j_2)(j_1+j_2+1)$ olan $\vec{J}^2$ 'nin bütün özvektörlerinin $\mathcal{R}^{j_1+j_2}$ uzayına aittir. Toplam açısal mom. 'un böyle herhangi $\mathcal{R}^j$ özuzayı, $J_i = J_i^{(1)} + J_i^{(2)}$ 'nin uygulanması altında değişmezdir ve bu toplam açısal mom. operatörlerine nazaran elementer bir rotatör uzayının özelliklerine sahiptir. Böylece, madem ki $|j_1+j_2\,j_1+j_2\rangle$, $\mathcal{R}^{j_1+j_2}$ de herhangi bir vektörün m değeri için en yüksek değere sahiptir, toplam açısal mom. vektörleri $|jm\rangle$ nin bir bazı, $\mathcal{R}^{j_1+j_2}$ de

$$\boxed{J_- = J_-^{(1)} + J_-^{(2)}}$$ 'yi ardışık olarak

$|j_1+j_2\ j_1+j_2\rangle$ 'ye uygulayarak bulunabilir.

Bu süreçle $2(j_1+j_2)+1$ baz vektörü elde edilir.

$$\boxed{|j_1+j_2\ m\rangle \qquad m = j_1+j_2,\ j_1+j_2-1,\ \dots,\ -(j_1+j_2)}$$

BS K

Şimdi J_3'ün $m = j_1+j_2-1$ özdeğerli özvektörlerinin $\mathcal{R}_{j_1+j_2-1}$ uzayını gözönüne alalım. ($\dim \mathcal{R}_m$)'ye göre bu uzay iki boyutludur ($j_1=0$ ya da $j_2=0$ olmadıkça). $\mathcal{R}_{j_1+j_2-1}$'de bir toplam açısal mom. baz vektörü $|j_1+j_2\ j_1+j_2-1\rangle$ vektörüdür ki bu $\mathcal{R}^{j_1+j_2}$ de bir baz vektörü olarak göründü. $\mathcal{R}^j$ uzaylarının özellikleri nedeni ile $\mathcal{R}_{j_1+j_2-1}$ de diğer baz vektörü $|j\ m=j_1+j_2-1\rangle$ bir $\mathcal{R}^j$ uzayına ait olmalıdır ve bunun için $j = j_1+j_2-1+n$ (n = negatif olmayan tam 1 dir. Ancak, bu, $j > j_1+j_2$ olduğu bir $\mathcal{R}^j$ uzayına elbette ait olamaz, çünkü bu j_1+j_2 den daha büyük m değerlerinin $\mathcal{R}$ de olacağını ima eder ve o $\mathcal{R}^{j_1+j_2}$ uzayına da ait olamaz çünkü o zaman $|j_1+j_2\ j_1+j_2\rangle$ ye dik olamaz. Böylece bu yeni vektör $\mathcal{R}^{j_1+j_2-1}$ uzayına aittir. Bu, $|j_1+j_2-1\ j_1+j_2-1\rangle$ baz vektörünü keyfi bir faza kadar belirler ki bu faz

$$\{ j_1\ j_2-1 \,|\, j_1+j_2-1\ j_1+j_2-1 \rangle$$

nin reel ve pozitif olması gereğinden sabitleştirilir.

$\mathcal{R}^{j_1+j_2}$ durumundaki gibi; $|j_1+j_2-1\ j_1+j_2-1\rangle$ $\mathcal{R}^{j_1+j_2-1}$de herhangi bir vektörün m'si için en yüksek değere sahip olduğundan, $\mathcal{R}^{j_1+j_2-1}$ deki bir baz J_-'yi ardışık olarak $|j_1+j_2-1\ j_1+j_2-1\rangle$ e uygulayarak oluştururuz; bu da şu $2(j_1+j_2-1)+1$ baz vektörünü verir: $|j_1+j_2-1\ m\rangle$, $m = j_1+j_2-1$, $j_1+j_2-2, \ldots -(j_1+j_2-1)$. $\dim \mathcal{R}_m$'ye göre, sonraki J_3 özuzayı $\mathcal{R}_{j_1+j_2-2}$, üç boyutludur ($j_1=0, \frac{1}{2}$ ya da $j_2=0, \frac{1}{2}$ olmadıkça). $\mathcal{R}_{j_1+j_2-2}$ de $|j_1+j_2\ j_1+j_2-2\rangle$ ve $|j_1+j_2-1\ j_1+j_2-2\rangle$ dik vektörlerini bulduk ve $\mathcal{R}_{j_1+j_2-2}$'yi germek için bunlara dik bir tane daha top. açısal mom. baz vektörüne gerek duyarız. Önceki paragrafta verilen tartışmaya benzer olarak yeni baz vektörü $|j\ m=j_1+j_2-2\rangle$ $j=j_1+j_2-2$ değerini almalıdır ve aşağıdaki $2(j_1+j_2-2)-1$ baz vektörleri ile gerilen $\mathcal{R}^{j_1+j_2-2}$ toplam açısal mom. uzayına ait olmalıdır

$$|j_1+j_2-2\,m\rangle \quad m=j_1+j_2-2,\ j_1+j_2-3,\ldots,-(j_1+j_2-2)$$

Bu vektörlerin fazları,

$\{j_1\ j_2-2\,|\,j_1+j_2-2\ j_1+j_2-2\rangle$ 'nin gerçel ve pozitif

olması gereğinden tesbit edilir.

(*) Bu şekilde devam eder ve J_3 'ün $\mathcal{R}_m$ $(m=j_1+j_2,\ j_1+j_2-1,\ \ldots\ |j_1-j_2|)$ öz uzaylarını ardışık olarak gözönüne alırız. Her basamakta, yeni bir toplam açısal mom. uzayı $\mathcal{R}^{j=m}$ sınırlanmalıdır ki bu $|m\,m\rangle$ vektörünü içerir sonra $\mathcal{R}_m$ uzayının sayımı tam yapmak için gerek vardır:

$$|j_1+j_2\ m\rangle,\ |j_1+j_2-1\ m\rangle,\ \ldots,\ |m+1\ m\rangle$$

Bu böyledir, çünkü, ardışık $\mathcal{R}_m$ uzaylarının boyutu, $\mathcal{R}_{|j_1-j_2|}$'ye erişinceye kadar 1 artar. $\mathcal{R}_{|j_1-j_2|}$ gözönüne alındığında ve son uzay $\mathcal{R}^{j=|j_1-j_2|}$ sınırlandığında, geriye kalan J_3 özuzayı $\mathcal{R}_m$, $m=|j_1-j_2|-1,\ |j_1-j_2|-2,\ \ldots,\ -(j_1+j_2)$ 'nin hiçbiri $\mathcal{R}_{|j_1-j_2|}$ ninkinden daha büyük boyuta sahip değildir, ve gerçekte bunlar, $\mathcal{R}^{j_1+j_2}$, $\mathcal{R}^{j_1+j_2-1}$, $\ldots$, $\mathcal{R}^{|j_1-j_2|}$ uzaylarında bulunan toplam açısal mom. baz vektörleri tarafından gerilirler. Böylece, j nin alabileceği değerler $j=j_1+j_2,\ j_1+j_2-1,\ \ldots,\ |j_1-j_2|$ dir. Faz seçimleri aşağıdaki kabulde örtülenir:

BS K

$$\{ j_1\ j-j_1 \mid j j \rangle \geq 0 \qquad j = m = j_1+j_2, j_1+j_2-1, \dots |j_1-j_2|$$

Bu C-G katsayıları için standart kabuldür.

R deki $\vec{J}^2$ 'nin spektrumunun

$$\text{spekt}\ \vec{J}^2 = \{ j(j+1) \mid j = j_1+j_2, j_1+j_2-1, \dots, |j_1-j_2| \}$$

ile verildiğini ve R uzayının

$$\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}^{j_1}_{(1)} \otimes \mathcal{R}^{j_2}_{(2)} = \mathcal{R}^{j_1+j_2} \oplus \mathcal{R}^{j_1+j_2-1} \oplus \dots \mathcal{R}^{|j_1-j_2|}$$

olarak ifade edilebileceğini gördük. Bu, R 'nin indirgenemez toplam açısal mom. uzaylarının toplama indirgenmesi olarak adlandırılır. ∎.

Özet: $\mathcal{R}^{j_1}_{(1)} \otimes \mathcal{R}^{j_2}_{(2)}$ uzayı genelde toplam açısal mom.'un $\mathcal{E}(SO(3)_{J_i})$ cebrinin indirgenemez bir temsili ya da meydana gelen temsil uzayı değildir. Yani, $\mathcal{R}^{j_1}_{(1)} \otimes \mathcal{R}^{j_2}_{(1)}$ 'nin bütün vektörleri, bunlardan birine $J_\pm$ 'yi yeterli kez uygulamak ile elde edilemez; ancak, böyle birkaç indirgenemez $\mathcal{R}^j$ uzaylarının direkt toplamıdır. Özellikle C-G katsayılarının $m = m_1+m_2$ ve j

$$j \neq j_1+j_2, \dots |j_1-j_2| \quad \text{olmadığı zaman ya da} \quad j = m = j_1+j_2, \dots |j_1-j_2|$$

olmadıkça sıfırdır; $\{ m_1 m_2 \mid j m \rangle = 0$

BS K

C–G katsayıları yinelemeli olarak hesaplanırlar. Yineleme bağıntıları, $J_\pm = J_\pm^{(1)} + J_\pm^{(2)}$ nin matris elemanı $|jm\rangle$ ve $|m_1 m_2\}$ durumları arasında alınırsa elde edilir:

$$\{m_1 m_2 | J_\pm | jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm1)}\,\hbar\,\{m_1 m_2 | j\, m\pm1\rangle$$

$$= \{m_1 m_2 | J_\pm^{(1)} + J_\pm^{(2)} | jm\rangle$$

$$= \left((J_\mp^{(1)} + J_\mp^{(2)}) |m_1 m_2\}, |jm\rangle \right)$$

$$= \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1\mp1)}\,\hbar\,\{m_1\mp1\, m_2 | jm\rangle$$

$$+ \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2\mp1)}\,\hbar\,\{m_1\, m_2\mp1 | jm\rangle \qquad (\pm \text{ denklemi})$$

(Burada $J_\pm^{(\alpha)\dagger} = J_\mp^{(\alpha)}$ kullanıldı.)

$\{m_1 m_2 | jj\rangle$ hesabı:

Yukarıda (+ denklemi) $m=j$ alalım. $J_+|jj\rangle = 0$,

$$-\sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1-1)}\,\{m_1-1\, m_2 | jj\rangle$$

$$= \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2-1)}\,\{m_1\, m_2-1 | jj\rangle$$

Dikkati $m_1+(m_2-1) = (m_1-1)+m_2 = j$ $(=m)$ değerleriyle sınırlı.
O zaman,

$$J_\pm\,|jm\rangle = \left[j(j+1)-m(m\pm1)\right]^{1/2}\hbar\,|j\,m\pm1\rangle$$

$$\{m_1m_2| \times \;\Rightarrow\; \underbrace{\{m_1m_2|\,J_\pm\,|jm\rangle}_{} = \left[j(j+1)-m(m\pm1)\right]^{1/2}\hbar\,\{m_1m_2|j\,m\pm1\rangle$$

$$= \{m_1m_2|\,J_\pm^{(1)}+J_\pm^{(2)}\,|jm\rangle = \left(\left(J_\mp^{(1)}+J_\mp^{(2)}\right)|m_1m_2\},\ |jm\rangle\right)$$

$$= \left[j_1(j_1+1)-m_1(m_1\mp1)\right]^{1/2}\hbar\,\{m_1\mp1\,m_2|jm\rangle$$

$$+\left[j_2(j_2+2)-m_2(m_2\mp1)\right]^{1/2}\hbar\,\{m_1\,m_2\mp1|jm\rangle \qquad (\pm\ \text{Denklemi})$$

$\{m_1m_2|jm\rangle$ hesabı:

(+ Denk.) de $m=j$ alalım, o zaman $J_+|jj\rangle=0$ olacağından,

$$-\left[j_1(j_1+1)-m_1(m_1-1)\right]^{1/2}\{m_1-1\,m_2|jj\rangle$$

$$= \left[j_2(j_2+1)-m_2(m_2-1)\right]^{1/2}\{m_1\,m_2-1|jj\rangle \text{ olur.}$$

Dikkatimizi $m_1+(m_2-1)=(m_1-1)+m_2=j\ (=m)$ değerlerine kısıtlarsak, (ki bu $m_2=j-m_1+1$ demektir)

$$-\left[j_1\underbrace{(j_1+1)-m_1(m_1-1)}_{}\right]^{1/2}\{m_1-1\;j-m_1+1|jj\rangle$$

$$= \left[\underbrace{j_2(j_2+1)-(j-m_1+1)(j-m_1)}_{}\right]^{1/2}\{m_1\;j-m_1|jj\rangle$$

$$= (j_2+m_2)(j_2-m_2+1) \text{ idi}$$

$$= (j_2+j-m_1+1)(j_2-j+m_1)$$

$$j_1^2+j_1-m_1^2+m_1$$

$$= j_1+m_1+(j_1-m_1)(j_1+m_1)$$

$$= (j_1+m_1)(j_1-m_1+1)$$

BS K

$$\{ m_1-1 \; j-m_1+1 \,|\, jj\rangle = -\left[\frac{(j_2+j-m_1+1)(j_2-j+m_1)}{(j_1+m_1)(j_1-m_1+1)} \right]^{1/2} \{ m_1 \; j-m_1 \,|\, jj\rangle$$

$m_1 = j_1$ den başlayarak, yukarıdan aşağı olarak bütün $\{m_1 m_2 \,|\, jj\rangle$ ler hesaplanabilir. Keyfi bir m_1 ve $m_2 = j-m_1$ için

$$\{ m_1 m_2 \,|\, jj\rangle = (-1)^{j_1-m_1}$$

$$\times \left[\frac{(j_2+j-j_1+1)(j_2+j-j_1+2)\cdots(j_2+j-m_1)(j_2-j+j_1)}{2j_1\,(2j_1-1)\cdots(2j_1-j_1+m_1+1)} \right.$$

$$\times \left. \frac{(j_2-j+j_1-1)\cdots(j_2-j+m_1+1)}{1\cdot 2\cdot \cdots (j_1-m_1)} \right]^{1/2} \{ j_1 \; j-j_1 \,|\, jj\rangle$$

$$= (-1)^{j_1-m_1} \left[\frac{(j_1+m_1)!\,(j_2-j+j_1)!\,(j_2+j-m_1)!}{(2j_1)!\,(j_1-m_1)!\,(j_2-j+m_1)!\,(j_2+j-j_1)!} \right]^{1/2}$$

$$\times \{ j_1 \; j-j_1 \,|\, jj\rangle$$

Diklik koşulu,

$$\delta_{jj'}\,\delta_{mm'} = \sum_{m_1 m_2} \langle j'm' \,|\, j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 \,|\, jm\rangle$$

$j=j'$, $m=m'$ için

$$1 = \sum_{m_1=-j_1}^{+j_1} \left| \{ m_1 m_2 \,|\, jj\rangle \right|^2$$

$$\sum_{m_1} \frac{(j_1+m_1)!}{(j_1-m_1)!}\,\frac{(j_2+j-m_1)!}{(j_2-j+m_1)!} = \frac{(j_1+j_2+j+1)!\,(-j_1+j_2+j)!\,(j_1-j_2+j)!}{(2j+1)!\,(j_1+j_2-j)!}$$

eşitliği kullanılarak,

$$|\{j_1\, j-j_1 | jj\rangle|^2 = \frac{(2j_1)!\,(2j+1)!}{(j_1+j_2+j+1)!\,(j_1-j_2+j)!}$$

Faz kabulü ile,

$$\{j_1\, j-j_1 | jj\rangle = +\sqrt{\frac{(2j_1)!\,(2j+1)!}{(j_1+j_2+j+1)!\,(j_1-j_2+j)!}}$$

bunu yukarıda kullanırsak, $\{m_1 m_2 | jj\rangle$ yi elde ederiz.

(– nasıl?)

$$\{m_1 m_2 | jm=j-1\rangle$$

in değerlerini verir ve tüm $j-1, j-2, \ldots, -j = m$ için $\{m_1 m_2 | jm\rangle$ in aranılan değerlerini verir.

Bu şekilde G-C katsayılarının türetilebilmesi için genel bir formül türetilecek:

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle = \{ m_1 m_2 | j m \rangle$$

$$= \delta_{m_1+m_2, m} \left[\frac{(2j+1)(j_1+j_2-j)!\,(j_1-j_2+j)!\,(-j_1+j_2+j)!}{(j_1+j_2+j+1)!} \right]^{1/2}$$

$$\times \left[(j_1+m_1)!\,(j_1-m_1)!\,(j_2+m_2)!\,(j_2-m_2)!\,(j+m)!\,(j-m)! \right]^{1/2}$$

$$\times \sum_z \Big\{ (-1)^z \Big/ \big[z!\,(j_1+j_2-j-z)!\,(j_1-m_1-z)!\,(j_2+m_2-z)!$$

$$\times (j-j_2+m_1+z)!\,(j-j_1-m_2+z)! \big] \Big\}$$

C-G katsayılarının simetri bağıntıları;

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 m_3 \rangle = (-1)^{j_2+m_2} \left[\frac{2j_3+1}{2j_1+1} \right]^{1/2} \langle j_2 -m_2\, j_3 m_3 | j_1 m_1 \rangle$$

$j_2 = 0$

$$\langle j_1 m_1 0 0 | j m \rangle = \delta_{j_1 j}\, \delta_{m_1 m}$$

$j_2 = 1/2$

$$\langle j_1\, m-m_2\, \tfrac{1}{2}\, m_2 | j m \rangle$$

$\langle j_1\, m-m_2\, \tfrac{1}{2}\, m_2 \| j m \rangle$	$m_2 = 1/2$	$m_2 = -1/2$
$j = j_1 + \frac{1}{2}$	$\sqrt{\dfrac{j_1+m+\frac{1}{2}}{2j_1+1}}$	$\sqrt{\dfrac{j_1-m+\frac{1}{2}}{2j_1+1}}$
$j = j_1 - \frac{1}{2}$	$-\sqrt{\dfrac{j_1-m+\frac{1}{2}}{2j_1+1}}$	$\sqrt{\dfrac{j_1+m+\frac{1}{2}}{2j_1+1}}$

Wigner 3-j sembolleri,

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1-j_2-m_3}(2j_3+1)^{-1/2}\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 -m_3\rangle$$

simetri özellikleri,

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_3 & j_1 & j_2 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{pmatrix}$$

$$(-1)^{j_1+j_2+j_3}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_3 & j_2 & j_1 \\ m_3 & m_2 & m_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix}$$

BS K