(one-particle syst.) 4

H atomu: elektrik alanında tek elektron

Titreşen diatomik mol : osilatör

dönen " " : bir merkez etrafında dönen sist.

X. [redacted]

Buraya kadar, aynı türden sadece bir bileşenli bir sistem ele alındı.

1°) Tek parçacıklı sistemler,

2°) Çok parçacıklı " : aynı türden birçok ($N = 2, 3, \ldots$) tek parçacıklı sistemlerin bileşimi'dir.

1., 2., ..., N. tek parçacık sisteminin fiziksel durumlarının uzayları, $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_N$ olsun; IVa temel postülasından şunu bekleriz: N-parçacık sistemi, durumlar uzayı olarak

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_N \qquad 1.1.$$

direkt çarpım uzayına sahip olacaktır. N parçacıklı sistemin cebri

$$A = \sum A_1 \otimes A_2 \otimes \ldots \otimes A_N$$

bütün operatörler kümesi'dir, burada A_i, $\mathcal{H}_i$ deki gözlenebilirlerin cebrinin bir elemanıdır. Örneğin: bu N parçacıklı sistem birbiri ile etkileşmiyor ise $\mathcal{H}$ deki gözlenebilirlerin cebrinin bütün elemanları

$$A = A_1 \otimes I \otimes I \otimes \ldots \otimes I_N + I \otimes A_2 \otimes \ldots \otimes I_N$$
$$+ \ldots I \otimes I \otimes \ldots \otimes A_N$$

türündendir. (1.1) ile tasvir edilen N parçacıklı sistemi, klasik düşüncelerden bekleriz. Klasik parçacıklar numaralandırılabilirler. Q.M.'sel olarak bu mümkün değildir.

$\Rightarrow$ Özdeş Q.M.'sel parçacıklar ayırt edilemezler.

aynı gözlenebilir değerlerine sahip

$\mathcal{H}_i$

Şimdi ayırtedilemezliğin matematiksel formülasyonunu vereceğiz. $\mathcal{H}_i$ uzayındaki bir baz $|\xi_i\rangle_i$ ile gösterelim; ξ_i simgesi, $\mathcal{H}_i$'nin baz sistemini işaretlemek için gerekli kuantum sayılarının kümesini göstersin (CSCO'nun özdeğerleri). Açık olması için N parçacık, Coulomb alanındaki elektronlar olsun; o zaman $\mathcal{H}_i$'nin herbiri $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{orb} \otimes \mathcal{E}^{s}$ uzaydır ve $|\xi_i\rangle_i = |n_i l_i j_i j_{i3}\rangle$'dır. (1.1)'in bazı

$$|\xi_1 \xi_2 \dots \xi_N\rangle = |\xi_1\rangle_1 \otimes |\xi_2\rangle_2 \otimes \dots \otimes |\xi_N\rangle_N$$

ξ

ile verilir. Bize belirli sırada N tane eleman verilsin.

( )

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$$

böyle bir düzenleme bir permütasyon olarak adlandırılır. Bu N eleman, farklı sırada yazılabilir $(\eta_1, \dots, \eta_N)$ buna N nesnenin permütasyonu denir. N nesnenin N! tane farklı permütasyonu vardır. Özel bir tane permütasyon, "orijinal", "natural" ya da "standart" olarak alınır. Diğerleri bundan sıra değiştirerek elde edilir. Bu sıra değiştirme işlemi de permütasyon olarak adlandırılır.

( ) Permütasyon işlemi $\quad P : (\xi_1, \dots, \xi_N) \rightarrow (\eta_1, \dots, \eta_N)$

Örnek: $\quad P_{12} : (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \rightarrow (\eta_1 = \xi_2, \eta_2 = \xi_1, \eta_3 = \xi_3, \dots \eta_N = \xi_N)$

$$P_{ij} : (\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_N) \rightarrow (\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_i, \dots, \xi_N)$$

İki elemanın konumunu değiş tokuş eden permütasyonlara transpozisyon denir.

BS K

Her permütasyon, sonlu sayıda transpozisyon'dan elde edilebilir.
$(\xi_2, \xi_3, \xi_1, \xi_4, \dots, \xi_N)$ permütasyonu önce P_{13} ve sonra P_{12} ile elde edilebilir:

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \dots, \xi_N) \xrightarrow{P_{13}} (\xi_3, \xi_2, \xi_1, \xi_4, \dots, \xi_N)$$

$$\xrightarrow{P_{12}} (\xi_2, \xi_3, \xi_1, \xi_4, \dots, \xi_N)$$

transpozisyonların sayısı, özel permütasyona bağlı olarak TEK veya ÇİFT'tir. Bir permütasyon

- TEK'tir denir eğer bu orijinal permütasyondan tek sayıda transpozisyon ile elde edilmiş ise:

ÇİFT'tir " " " " " çift " " " " " " :

Bu N nesne kuantum sayılarının N kümesi olsun:

$$(\xi_1, \dots, \xi_N) \equiv (n_1 l_1 j_1 j_{1z}, n_2 l_2 j_2 j_{2z}, \dots)$$

- Her permütasyon $(\eta_1, \dots, \eta_N)$, ya da her permütasyon işlemi $P : (\xi_1, \dots, \xi_N) \mapsto (\eta_1, \dots, \eta_N)$, $\mathfrak{H}$ uzayında bir $\mathbb{P}$ lineer op.'ü ile temsil edilir ve bu

$$\mathbb{P} \downarrow \mathfrak{H}$$

$$\mathbb{P}\, |\xi_1, \dots, \xi_N\rangle = |\eta_1, \dots, \eta_N\rangle \qquad (4)$$

ile tanımlanır. Örneğin, P_{12} transpozisyonu $\mathbb{P}_{12}$ op.'ü ile temsil edilir:

$$\mathbb{P}_{12}\, |\xi_1 \xi_2 \dots \xi_N\rangle = |\xi_2 \xi_1 \xi_3 \dots \xi_N\rangle$$

üniter olarak seçilecek

BS K

$\Lambda_{|\xi\rangle}$: $|\xi\rangle = |\xi_1 \ldots \xi_N\rangle$ ile gerilen tek boyutlu altuzayı üzerinde izdüşüm op.'ünü

$\Lambda_{|\eta\rangle}$: $|\eta\rangle$ ile gerilen tek boyutlu altuzay üzerinde izdüşüm op.'ünü

göstersin: (4)'den,

$$\Lambda_{|\eta\rangle} = |\eta\rangle\langle\eta| = \mathbb{P}|\xi\rangle\langle\xi|\mathbb{P}^{+} = \mathbb{P}\Lambda_{|\xi\rangle}\mathbb{P}^{+}$$

bağıntısını elde ederiz.

Ayırt edilemezlik nedeni ile, $\Lambda_{|\xi\rangle}$ ve $\Lambda_{|\eta\rangle}$ (saf) bir fiziksel durumu temsil edebilir eğer,

$$\Lambda_{|\eta\rangle} = \Lambda_{|\xi\rangle} \qquad (7)$$

ise ya da $\Lambda_{|\xi\rangle} = \mathbb{P}\Lambda_{|\xi\rangle}\mathbb{P}^{+}$ ise. (8)

Böylece $\mathcal{E}$ direkt çarpımının bir boyutlu altuzaylarından sadece (8)'i sağlayanlar fiziksel durumları temsil edebilir. Buna göre (1)'in hepsi değil ama onun bir altuzayı, fiziksel durumlar uzayıdır. Genelde (3) direkt çarpım bazı uygun değilleri; fiziksel durumlar bunların lineer kombinasyonları ile temsil edilebilir.

ψ, fiziksel altuzayın bir vektörü, $\mathbb{P}$ bir permütasyon op.'ü olsun. Eğer parçacıklar ayırt edilemez ise ψ ve $\chi = \mathbb{P}\psi$ [ya da Λ_ψ ve $\Lambda_\chi = \Lambda_{\mathbb{P}\psi}$] aynı fiziksel durumu temsil ederler. Her A gözlenebilirinin beklenen değeri için ψ ve χ için aynı olmalıdır. Yani,

$$\langle\psi|A|\psi\rangle = \langle\chi|A|\chi\rangle = \langle\psi|\mathbb{P}^{+}A\mathbb{P}|\psi\rangle$$

$$A = \mathbb{P}^{+}A\mathbb{P}$$

sonucuna varırız.

BS.K

$\{A\}$

Böylece herhangi $A \in \mathcal{A}$ için ve herhangi bir $\mathbb{P}$ permütasyon op. için,

(7) $$[\mathbb{P}, A] = 0 \qquad (11)$$

olur. (11) denk.'i özdeş parçacıklar ayırt edilemezler ifadesinin matematiksel formülasyonu'dur. Buradan şu çıkar: $\mathcal{H}$'nin fiziksel alt uzayının vektörleri ya

$$\mathbb{P}\psi = +\psi \quad \text{tüm } \mathbb{P}\text{'ler için sağlar} \qquad (12)$$

ya da

$$\mathbb{P}\psi = (-)^p\psi \quad \begin{cases} \mathbb{P} \text{ çift ise } p \text{ çift} \\ \mathbb{P} \text{ tek ise } p \text{ tek.} \end{cases} \qquad (13)$$

sağlar. (12)'yi sağlayan ψ simetrik (13)'ü sağlayan ψ'ye de antisimetrik denir. Bunu çıkartmak için A gözlenebilirlerinin $\mathcal{A} = \{A\}$ cebrinin fiziksel olarak açık matematiksel formülasyonuna gerek duyarız.; bu şöyle gerçekleştirilir: $\mathcal{A} = \{A\}$, bir CSCO içerir, Bu koşulun fiziksel olarak doğrulanması için hatırlayalım ki bir durumun scf olarak adlandırılması şöyleki onun ölçüsü bir topluluğun iki ya da daha fazla alttopluluğa ayrılmaması ile verilir.

$$\left([\mathbb{P}, A]\psi = 0 \qquad \mathbb{P}A\psi = A\mathbb{P}\psi \right)$$

BS K

$A_1, \ldots, A_n$ gözlenebilirlerin cebrinin CSCO 'nu

$|a\rangle = |a_1 \ldots a_n\rangle$ karşı gelen özvektörleri

$\Lambda_{|a\rangle}$ ile de $|a\rangle$ ile gerilen altuzaylar üzerindeki projektörler olsun.

$\Lambda_{|a\rangle}$: beklenen değerleri, $A_1, \ldots, A_n$ ölçümünde $a_1, \ldots, a_n$ elde etme olasılığı veren gözlenebilir.

Gözlenebilirler olarak, (11) ile uyumlu olarak $\Lambda_{|a\rangle}$ bütün $\mathbb{P}$ permütasyonlar ile sıra değiştirir.

$$[\mathbb{P}, \Lambda_{|a\rangle}] = 0 \qquad \text{tüm } \mathbb{P} \text{ 'ler için.}$$

<u>ispat</u>: $[\mathbb{P}, \Lambda_{|a\rangle}]|\psi\rangle = 0$

$$\mathbb{P}\Lambda_{|a\rangle}|\psi\rangle = \Lambda_{|a\rangle}\mathbb{P}|\psi\rangle \qquad \Lambda_{|a\rangle} = |a\rangle\langle a| \text{ kullanılırsa}$$

$$\mathbb{P}|a\rangle\langle a|\psi\rangle = |a\rangle\langle a|\mathbb{P}|\psi\rangle$$

$$\mathbb{P}|a\rangle = |a\rangle \frac{\langle a|\mathbb{P}|\psi\rangle}{\langle a|\psi\rangle} \quad \text{özdeğeri.}$$

$\langle a|\mathbb{P}|\psi\rangle / \langle a|\psi\rangle$ mümkün özdeğerleri permütasyon grubunun şu özelliğinden çıkar: Permütasyon grubu 2 adet bir boyutlu temsile sahiptir.

(i) Bütün permütasyonların, $\mathbb{I}$ birim op. 'ü ile temsil edildiği simetrik temsil; yani

$$\mathbb{P}|\psi\rangle = +|\psi\rangle \quad \text{tüm } \mathbb{P} \text{ ler için}$$

(ii) Tüm çift permütasyonları $\mathbb{I}$ ve tüm tek permütasyonları $-\mathbb{I}$ ile temsil edildiği antisimetrik temsil. , yani

BS K

$$\mathbb{P}|\psi\rangle = (-1)^p|\psi\rangle \quad \begin{cases} \mathbb{P} \text{ çift} \Rightarrow p \text{ çift} \\ \mathbb{P} \text{ tek} \Rightarrow p \text{ tek.} \end{cases}$$

III.3 bölümünde gördük ki $\{\mathbb{P}\}$'nin cebrinin bir indirgenemez temsil uzayı, bütün $\mathbb{P}$'lerin bu uzayın bir elemanına uygulayarak elde edilen bir temsil uzayıdır. $|a\rangle$'nın bütün $\mathbb{P}$'lerin bir özvektörü olması olgusu şu demektir: $|a\rangle$ tek boyutlu indirgenemez uzayını gerer. Bu nedenle permütasyon grubunun yukarki özelliğinden, ya

$$\mathbb{P}|a\rangle = +|a\rangle \quad \text{tüm } \mathbb{P}\text{'ler için}$$

ya da

$$\mathbb{P}|a\rangle = -|a\rangle \quad \text{"} \quad \text{"} \;.$$

olmalıdır. Bu her baz vektörü $|a\rangle$ için doğru olduğundan, her $|\psi\rangle$ için de doğrudur; çünkü her $|\psi\rangle$ baz vektörlerinin bir lineer kombinasyon olarak yazılır.

Simetrik vektörden ibaret olan $\mathcal{H}$'nin altuzayını $\mathcal{H}_+^N$ ile gösterelim:

$$\mathcal{H}_+^N = \{ |\psi\rangle \in \mathcal{H} : \mathbb{P}|\psi\rangle = |\psi\rangle \}$$

Anti-simetrik vektörlerden ibaret olan $\mathcal{H}$'nin altuzayını $\mathcal{H}_-^N$ ile gösterelim

$$\mathcal{H}_-^N = \{ |\psi\rangle \in \mathcal{H} : \mathbb{P}|\psi\rangle = (-1)^p|\psi\rangle \}$$

N özdeş Q.M.'sel sistemin fiziksel durumlar uzayı ya $\mathcal{H}_+^N$ ya da $\mathcal{H}_-^N$'dir.

BS K

$$|\xi\rangle_+ = |\xi_1 \cdots \xi_N\rangle_+ = \sum_{\mathbb{P}} \mathbb{P}\, |\xi_1 \cdots \xi_N\rangle \;\in\; \mathcal{H}_+^N$$

N tane nesnenin tüm $\mathbb{P}$ ler üzerinden permütasyon toplamı.

dahi normalize olmamış vektörler.

Açıkca görülüyor ki $|\xi\rangle_+$ dahi $\xi_1, \ldots, \xi_N$ kuantum sayılarının sırası önemsizdir.

○ [[$|\xi\rangle_+$ 'lar simetriktir.

İspat: keyfi bir $\mathbb{P}_1$ için

$$\mathbb{P}_1 |\xi\rangle_+ = \sum_{\mathbb{P}} \underbrace{\mathbb{P}_1 \mathbb{P}}_{\mathbb{P}'} |\xi_1 \cdots \xi_N\rangle = \sum_{\mathbb{P}'} \mathbb{P}' |\xi_1 \cdots \xi_N\rangle = |\xi\rangle_+$$

$\mathbb{P}_1$ sabitlenir ise $\mathbb{P}$ bütün permütasyonları tarar o zaman $\mathbb{P}'$ de tüm perm. ları tarar. Böylece,

○ $$\mathbb{P}_1 |\xi\rangle_+ = |\xi\rangle_+$$]]

$$|\xi\rangle_- = |\xi_1 \cdots \xi_N\rangle_- = \sum_{\mathbb{P}} (-1)^P\, \mathbb{P}\, |\xi_1 \cdots \xi_N\rangle \;\in\; \mathcal{H}_-^N$$

dahi normalize olmamış vektörler.

[[$|\xi\rangle_-$ 'ler antisimetriktir.

$$\mathbb{P}_1 |\xi\rangle_- = \sum_{\mathbb{P}} (-1)^P\, \mathbb{P}_1 \mathbb{P}\, |\xi_1 \cdots \xi_N\rangle$$

$$= \sum_{\mathbb{P}'} (-1)^{P_1} (-1)^{P'}\, \mathbb{P}' |\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_N\rangle$$

$$= (-1)^{P_1} |\xi\rangle_-$$

$$(-1)^{P'} = (-1)^{P+P_1}$$

$$\Rightarrow (-1)^P = (-1)^{P'} (-1)^{P_1}$$

BS K

Wb.

N tane özdeş Q.M.'sel sist.'in fiziksel anlamların uzayı

$\mathcal{H}_+^N$ 'dir eğer bunların açısal mom.'u (spin) tam değere sahip

ise ve $\mathcal{H}_-^N$ 'dir yarım değere sahipse

$\mathcal{H}_+^N \to$ bozonlar

$\mathcal{H}_-^N \to$ fermiyonlar.

buradan Pauli ilkesi: iki ya da daha fazla elektronun kuantum sayıları aynı olamaz.

prb. X.1.

$$|\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N\rangle_+ = \sum_{P} P\, |\xi_1\rangle \otimes \ldots \otimes |\xi_N\rangle$$

$${}_+\langle \xi_1 \ldots \xi_N | \xi_1 \ldots \xi_N \rangle_+ = \sum_{PP'}$$

$$\langle \xi_N | \otimes \ldots \otimes \langle \xi_1 | P'^{\dagger} P | \xi_1 \rangle \otimes \ldots \otimes |\xi_N\rangle$$

$$\langle \xi_i | \xi_i \rangle = 1$$

$\longrightarrow N!$

$$|\xi_1 \dots \xi_N\rangle_{+} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P} P\, |\xi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\xi_N\rangle$$

$$|\xi_1\, \xi_2\rangle_{+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\xi_1 \xi_2\rangle + |\xi_2 \xi_1\rangle \right)$$

$$|\xi_1\, \xi_2\rangle_{-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\xi_1 \xi_2\rangle - |\xi_2 \xi_1\rangle \right)$$

$$|\xi_1 \xi_2\rangle = |\xi_1\rangle \otimes |\xi_2\rangle$$

$$|\xi_1\, \xi_2\rangle_{\mp} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\xi_1\rangle_1 \otimes |\xi_2\rangle_2 \mp |\xi_2\rangle_1 \otimes |\xi_1\rangle_2 \right)$$

$$\langle \vec{r}\, |\xi_1 \xi_2\rangle_{+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_1(r_1)\varphi_2(r_2) + \varphi_1(r_2)\varphi_2(r_1) \right)$$

$$\langle \vec{r}\, |\xi_1 \xi_2\rangle_{-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_1(r_1)\varphi_2(r_2) - \varphi_1(r_2)\varphi_2(r_1) \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \varphi_1(r_1) & \varphi_1(r_2) \\ \varphi_2(r_1) & \varphi_2(r_2) \end{vmatrix}$$

BS K