XII ZAMAN GELİŞİMİ (EVRİMİ)

Zamanı bir dizi durumu etiketleyen sürekli gerçel bir parametre olarak varsayacağız.

$W(t_0)$: $t = t_0$ zamanında hazırlanmış bir sist.'in durumunu göstersin.

Daha sonraki bir zamanda $t = t_1 > t_0$ $W(t_0)$, $W(t_1)$'i tek olarak belirler. Evrim esnasında, sistem dış etkilere maruz kalabilir, öyle ki bu evrim t_0'dan t_1'e olan aralığa açıkça bağlıdır. İlk olarak dış etkilerle rahatsız edilmemiş (izole sistemler) olarak evrim geçiren sist.'i ele alacağız. Bu gibi sist.'ler için

$$W(t_0) \longrightarrow W(t_1) \quad \text{evrim,} \qquad 1.1$$

t_0'a değil, ancak sist.'in $W(t_0)$ başlangıç durumuna ve $\tau_1 = t_1 - t_0$'a bağlıdır.

Gereksinimler:

1. (1.1.) ifadesi durumlar kümesinin bir lineer dönüşümüdür.

$$W_1(t_0) \to W_1(t_1) \quad \text{ve} \quad W_2(t_0) \to W_2(t_1) \quad \text{ise}$$

$$a, b \in \mathbb{C} \text{ için } \quad aW_1(t_0) + bW_2(t_0) \to aW_1(t_1) + bW_2(t_1)$$

2. Zaman evrimi, toplama göre bir yarı grup oluşturur.

$$W(t_0) \to W(t_0 + \tau_1) \qquad \tau_1 = t_1 - t_0 \text{ için}$$

$$W(t_1) \to W(t_1 + \tau_2) \qquad \tau_2 = t_2 - t_1 \text{ için ise o zaman}$$

$W(t_0) \rightarrow W(t_0+\tau_1+\tau_2)$ olur.

1. ve 2. gereksinimler tersinmez süreçler tarafından da sağlanmalıdır. Burada tersinir süreçlerin Q.M. ile ilgileniyoruz ve bu gibi süreçler için ek bir gereksinim:

(3) (1.1) zaman evrimi $U(\tau)$ üniter op. lü ile verilir ve bu op. şunları sağlar

$$W(t_0) \rightarrow W(t_1) = U^{+}(\tau_1)\, W(t_0)\, U(\tau_1) \qquad 1.2$$

$$U^{+}(\tau_1) = U^{-1}(\tau) \qquad 1.3$$

$$U(0) = I \qquad 1.4$$

$$U^{-1}(\tau) = U(-\tau) \qquad 1.5$$

$$U(\tau_1+\tau_2) = U(\tau_1)\, U(\tau_2) \qquad -\infty < \tau_1, \tau_2 < \infty \qquad 1.6$$

$U(\tau)$ τ. parametresinin sürekli bir op. fonk.'udur. 1.7

(1.5.) $W(t_1) = U^{+}(\tau_1)\, W(t_0)\, U(\tau_1)$

$$\Rightarrow U(\tau_1)\, W(t_1)\, U^{-1}(\tau_1) = W(t_0)$$

zamanda geriye doğru evrim $\qquad U^{-1}(\tau) = U(-\tau)$

$$W(t_0) = U^{-1}(-\tau_1)\, W(t_1)\, U(-\tau_1)$$

(1.1.6.) gereksinim (2) $W(t_0) \rightarrow W(t_0+\tau_1+\tau_2)$

$$U(t_2-t_0) = U(t_1-t_0)\, U(t_2-t_1) \qquad U(\tau_1+\tau_2) = U(\tau_1)\, U(\tau_2)$$

$\tau_1 = t_1 - t_0 \quad \tau_2 = t_2 - t_1$

1.6'yı sağlayan sürekli bir op. fonk.'u $\rightarrow$ tek parametreli op.'ler grubu.

Tanım: $A \equiv \left.\dfrac{dU(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0}$ sonsuz küçük op. yani $U(\tau)$ zaman evrimi op.'nün generatörü

$U(\tau)$ sadece türevlenemez aynı zamanda keyfi sayıda türevlenebilir. 1.6 yı τ_1'e göre türet.

$$\frac{dU(\tau+\tau_1)}{d(\tau+\tau_1)}\,\frac{d(\tau+\tau_1)}{d\tau_1} = \frac{dU(\tau_1)}{d\tau_1}\,U(\tau)$$

$$\tau_1 = 0 \Rightarrow \frac{dU(\tau)}{d\tau} = A\,U(\tau)$$

$$\frac{d^2U(\tau)}{d\tau^2} = A^2 U(\tau) \quad \ldots \quad \frac{d^pU(\tau)}{d\tau^p} = A^p U(\tau)$$

$U(0) = I$ için $\quad \left.\dfrac{d^pU(\tau)}{d\tau^p}\right|_{\tau=0} = A^p$

$U(\tau)$'nun Taylor açılımı:

$$U(\tau) = I + \tau A + \frac{\tau^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{\tau^n}{n!}A^n + \cdots$$

$$U(\tau) = e^{\tau A}$$

$$U(\tau)\,|a\rangle = e^{\tau a}\,|a\rangle \qquad \{A|a\rangle = a|a\rangle \text{ için}\}$$

$$U^{+}(\tau) = e^{\tau A^{+}}$$

$$U^{+}(\tau) = I + \tau A^{+} + \frac{\tau^2}{2!}A^{+2} + \cdots = e^{\tau A^{+}}$$

BS K

$$U^{+}(\tau)U(\tau)=I$$

$$\frac{dU^{+}(\tau)}{d\tau}U(\tau)+U^{+}(\tau)\frac{dU(\tau)}{d\tau}=0 \quad \left(\Big|_{\tau=0} \;\; \text{al.}\right)$$

$$A^{+}U(0)=-U^{+}(0)A$$

$$A^{+}U(0)=-U^{-1}(0)A \rightarrow A^{+}=-A \quad .1.17.$$

Skew-Hermitian.

$$H=-i\hbar A=-i\hbar\left.\frac{dU(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0}$$ zaman evrim op.'lü.

$$A=-\frac{1}{i\hbar}H=\frac{i}{\hbar}H$$

Schrödinger Temsili: (Resmi)

Korunumlu bir fiziksel sist., gözlenebilirler cebirinin Hermitsel bir eleman olan ve fiziksel sist.'in karakteristiği olan zaman öteleme jeneratörü H'ye sahiptir. Fiziksel durumun zaman evrimi

$$W(t)=U^{+}(t)W_0U(t)$$

ile verilir. burada

W_0 : $t=0$ başlangıçta sist.'in durumu

$$U(t)=e^{itH/\hbar}$$

BS K

A 'nın beklenen değeri,

$$\langle A \rangle = Tr\,(AW) \qquad \langle A \rangle_{t=t_0} \neq \langle A \rangle_{t=t_1}$$

$$\langle A \rangle_t = Tr\,(A W(t)) = Tr\,(A u^{+}(t) W_0 u(t))$$

$$= Tr\,(u(t) A u^{+}(t) W_0) = Tr\,(A(t) W_0)$$

$$A(t) = u(t)\, A\, u^{+}(t)$$

~~Vb~~ Heisenberg Temsili: (Resmi)

Konumunda fiziksel bir sist., gözlenebilirler cebirinin Hermitsel bir elemanı olan ve fiziksel sist.'in karakteristiği olan zaman ötelemesi için bir H jeneratörüne sahiptir. Fiziksel sistemde her A(t) gözlenebilirinin zaman ~~evrimi~~ gelişimi

$$A(t) = u(t)\, A\, u^{+}(t) \qquad 1.22$$

ile verilir; burada

A, $t_0 = 0$ da gözlenebilir

$$u(t) = e^{itH/\hbar}$$

1.22. den bir gözlenebilirin zamana bağımlılığını inceleyelim:

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} H e^{itH/\hbar} A e^{-itH/\hbar} + e^{itH/\hbar} A \left(-\frac{iH}{\hbar}\right) e^{-itH/\hbar}$$

$$= \frac{i}{\hbar}\,(H A(t) - A(t) H) \Rightarrow$$

BS K

$$i\hbar \frac{dA(t)}{dt} = [A(t), H] \qquad 1.24.$$

Heisenberg Hareket Denk.'i. Bunu sağlayanlar hareket sbt.'dır. H'yi içeren herhangi CSCO'nun elemanı bir hareket sbt.'dır.

Fiziksel bir sist. için P_i ve Q_i gösterimlerini alalım. Her ikisi de hareket sbt. değildir.

$t=0$ da $\quad [P_i, Q_j] = \frac{\hbar}{i}\delta_{ij} I$

$t>0$ da $\quad P_i(t) Q_j(t) - Q_j(t) P_i(t)$

$$= U(t) P_i U^+(t) U(t) Q_j U^+(t) - U(t) Q_j U^+(t) U(t) P_i U^+(t)$$

$$= U(t) \left(P_i Q_j - Q_j P_i \right) U^+(t) = U(t) U^+(t) \frac{\hbar}{i}\delta_{ij} I$$

$$= \frac{\hbar}{i}\delta_{ij} I$$

$$[P_i(t), Q_j(t)] = \frac{\hbar}{i}\delta_{ij} I$$

Hareket denklemleri,

$$H = \frac{1}{2m} P_i P_i + V(\vec{Q}) \qquad Q_i = Q_i(t) \quad P_i = P_i(t)$$

$$[Q_k, H] = \frac{1}{2m}[Q_k, P_i P_i] = \frac{1}{2m}\{[Q_k, P_i], P_i\}$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\delta_{ki}\{I, P_i\} = \frac{i\hbar}{m} P_k$$

$$\Rightarrow \frac{dQ_k(t)}{dt} = \frac{P_k(t)}{m}$$ Klasik bağıntının Q.M. karşılığı

klasik fizikte $\quad f_k = -\dfrac{\partial V(\vec{x})}{\partial x_k}$

Q.M. $\quad F_k \equiv -\dfrac{i}{\hbar}\left[P_k, V(\vec{Q})\right] = -\dfrac{``\partial V(\vec{Q})"}{\partial Q_k} \qquad (1.27.)$

komut op.

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[P_k, H\right] = -\frac{i}{\hbar}\left[P_k, V(\vec{Q})\right]$$

$$= F_k(\vec{Q}(t))$$

$$m\frac{d^2 Q_k(t)}{dt^2} = F_k(\vec{Q}(t))$$ Q.M. Newton denklemi.

$\dfrac{``\partial V(\vec{Q})"}{\partial Q_k}$: $V(\vec{Q})$ de Q_i 'leri x_i ile değiştir. $V(\vec{x})$ 'i x_k ya göre türet. $\partial V/\partial x_k$ da x_i'leri Q_i ile değiştir.

1.27.'nin daha açılımı:

1. $\quad V(\vec{Q}) = C + C_i Q_i + C_{ij} Q_i Q_j + \dots + C_{i_1 \dots i_n} Q_{i_1} \cdots Q_{i_n} + \dots$

$C_{i_1 \dots i_n}$ 'ler simetriktir: $C_{i_1 \dots i_p \dots i_q \dots i_n} = C_{i_1 \dots i_q \dots i_p \dots i_n}$

$$\frac{i}{\hbar}\left[P_k, V(\vec{Q})\right] = C_k + 2C_{ki} Q_i + \dots + n\, C_{k i_2 i_3 \dots i_n} Q_{i_2} \cdots Q_{i_n}$$
$$+ \dots$$

BS K

çünkü

$$C_{i_1\dots i_n}\,[P_k, Q_{i_1\dots i_n}]$$

$$= C_{i_1\dots i_n}\sum_{p=1}^{n}[P_k, Q_{i_p}]\,Q_{i_1}\cdots Q_{i_{p-1}}Q_{i_{p+1}}\cdots Q_{i_n}$$

$$= C_{i_1\dots i_n}\sum_{p=1}^{n}\frac{\hbar}{i}\delta_{k i_p}\,Q_{i_1}\cdots Q_{i_{p-1}}Q_{i_{p+1}}\cdots Q_{i_n}$$

$$= n\frac{\hbar}{i}\,C_{k i_2\dots i_n}\,Q_{i_2}Q_{i_3}\cdots Q_{i_n}$$

2. $[P_k, V(\vec{Q})]$ 'yu konum temsilinde hesapla

$$\langle\vec{x}|[P_k, V(\vec{Q})]|\psi\rangle = \langle\vec{x}|P_k\,(V(\vec{Q}))|\psi\rangle - \langle\vec{x}|V(\vec{Q})P_k|\psi\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\vec{x}|V(\vec{Q})|\psi\rangle - V(\vec{x})\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\vec{x}|\psi\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(V(\vec{x})\langle x|\psi\rangle\Big) - V(\vec{x})\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\vec{x}|\psi\rangle\Big)$$

$$= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial V(\vec{x})}{\partial x_k}\langle\vec{x}|\psi\rangle$$

[redacted]. Konumunda fiziksel bir sist.'in zaman evrimi, bunun gözlenebilirler cebirinde sürekli simetri dönüşümü ile verilir.

Schrödinger temsili

$W(t) = U^{\dagger}(t) W_0 U(t)$ için bunun dif. form'unu yazalım.

$$\frac{dW}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left(W(t)H - HW(t)\right) = \frac{i}{\hbar}[W(t), H]$$

W_0 saf durum olsun:

$$W_0 = \Lambda_{|\psi_0\rangle} = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$$

$$W(t) = U^{\dagger}(t)\Lambda_{|\psi_0\rangle}U(t) = U^{\dagger}(t)|\psi_0\rangle\langle\psi_0|U(t)$$

$$\rightarrow |\psi(t)\rangle = U^{\dagger}(t)|\psi_0\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi_0\rangle$$

$$\Rightarrow W(t) = U^{\dagger}(t)\Lambda_{|\psi_0\rangle}U(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| = \Lambda_{|\psi(t)\rangle}$$

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \frac{dU^{\dagger}(t)}{dt}|\psi_0\rangle = -\frac{i}{\hbar}HU^{\dagger}(t)|\psi_0\rangle = \frac{-iH}{\hbar}|\psi(t)\rangle$$

$|\psi(t)\rangle$ bunun denk.'i için Schrödinger denklemi

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$$

BS K

$$H = \frac{1}{2m} P_i P_i + V(\vec{Q})$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \vec{x} | \psi(t) \rangle = \frac{1}{2m} \underbrace{\langle \vec{x} | P_i P_i | \psi(t) \rangle}_{} + V(\vec{x}) \langle \vec{x} | \psi(t) \rangle$$

$$= \frac{\hbar}{i} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \vec{x} | \psi(t) \rangle$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{d}{dt} \psi(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{x}, t) + V(\vec{x}) \psi(\vec{x}, t)$$

$$\psi(\vec{x}, t) = \langle \vec{x} | \psi(t) \rangle$$

[redacted] : S.P $\quad Q \to$ sbt $\quad |\psi(t)\rangle$
H.P $\quad Q(t) \quad |\psi\rangle \to$ sbt

} $Tr(AW)$ 'nın zaman bağımlılığı aynı

[redacted] de $\quad A(t)|at\rangle = a|at\rangle$

$$U(t)|a0\rangle = |at\rangle = e^{itH/\hbar}|a0\rangle$$ burada $|\psi_0\rangle$ sbt tutulur.

[redacted] 'da $|a0\rangle$ sbt. tutulur, $|\psi_0\rangle$ durum vektörü ters doğrultuda döner,

$$U^{\dagger}(t)|\psi_0\rangle = |\psi(t)\rangle = e^{-itH/\hbar}|\psi_0\rangle$$

Her iki durumda da olasılıkları temsil eden fiziksel olarak ölçülebilir niceliklerin zaman bağımlılığı aynıdır.

$$|\langle at|\psi_0\rangle|^2 = |(U(t)|a0\rangle, |\psi_0\rangle)|^2$$

$$= |\langle a0|U^{\dagger}(t)|\psi_0\rangle|^2 = |\langle a0|\psi(t)\rangle|^2$$

BS K

[redacted]: Zamanla değişmez ise bu duruma kararlı durum denir.

$$W(t) = U^{\dagger}(t)\, W_0\, U(t) = W_0 = W$$

$$\langle A \rangle_t = \mathrm{Tr}\,(A W(t)) = \mathrm{Tr}\,(A U^{\dagger}(t) W U(t)) = \mathrm{Tr}\,(AW)$$

$$= \langle A \rangle_{t=0}$$

Kararlı durumlar daima H enerji op.'nin özdurumlarının karışımları'dır.

Çünkü; $\quad W e^{itH/\hbar} = e^{itH/\hbar} W$

$$\rightarrow \quad WH - HW = 0$$

Saf kararlı durumlar için

$$W = \Lambda_{|\psi_0\rangle} = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$$

$$|\psi_0\rangle\langle\psi_0| H = H |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$$

$$H|\psi_0\rangle = |\psi_0\rangle \frac{\langle\psi_0|H|\psi_0\rangle}{\langle\psi_0|\psi_0\rangle}$$

(saf durumlar enerji op.'nün özvektörleri ile temsil edilirler:)

zaman bağımlılığı:

$$|\psi(t)\rangle = U^{\dagger}(t)\,|\psi_0\rangle = e^{-itE/\hbar}\,|\psi_0\rangle$$

BS K

~~Dirac~~ Temsil:

$$H = H_0 + H_1$$

$$\underbrace{H_0}_{\text{tam}} \quad \underbrace{H_1}_{\text{etkileşme}}$$

H açık zaman bağımlılığı yok ise!... (korunumlu sist.)

$$U(t) = e^{itH/\hbar}$$

o zaman

$$\langle A \rangle_t = Tr\left(U(t)\, A\, U^{+}(t)\, W_0 \right)$$

Tanım:

$$\begin{cases} U_0(t) = e^{itH_0/\hbar} \\ U_1(t) \equiv U(t)\, U_0^{+}(t) = U(t)\, e^{-itH_0/\hbar} \end{cases}$$

$$\langle A \rangle_t = Tr\left(U_1(t)\, U_0(t)\, A\, U_0^{+}(t)\, U_1^{+}(t)\, W_0 \right)$$

$$= Tr\left(U_0(t)\, A\, U_0^{+}(t)\, U_1^{+}(t)\, W_0\, U_1(t) \right)$$

$$= Tr\left(A^D(t)\, W^D(t) \right)$$

burada

$$A^D = U_0(t)\, A\, U_0^{+}(t) \qquad 1.51$$

$$W^D = U_1^{+}(t)\, W_0\, U_1(t) \qquad 1.52.$$

1.22 ve 1.51.'in benzerliğine dikkat!!

BS K

$H_0 = H$ ve $H_1 = 0 \Rightarrow U_0(t) = U(t)$ ve $U_1(t) = I$, öyleki

Dirac Temsili → Heisenberg tem.

Schrödinger tem.'de 1.15, Dirac tem.'de 1.52'ye benzer. $[H_0, H_1] = 0 \Rightarrow$ bu benzerlik daha da olacaktır. Çünkü o zaman

$$U_1(t) = e^{itH/\hbar} e^{-itH_0/\hbar} = e^{itH_1/\hbar} \quad \text{olur.}$$

$H_0 = 0$ ve $H_1 = H$ durumunda $U_0(t) = I$ ve $U_1(t) = U(t)$ olur.

$\longrightarrow$ Schrödinger tem.

W_0 : saf bir durum $(= |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$

<u>tanım</u> : $|\psi(t)\rangle_D \equiv U_1^{\dagger}(t)\,|\psi_0\rangle$

$$W^D(t) = |\psi(t)\rangle_{D\,D}\langle\psi(t)| \qquad W^D(t) = U_1^{\dagger}(t)\, W_0\, U_1(t)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_D = H_1\, |\psi(t)\rangle_D$$

<u>D.P</u>'da fiziksel olarak ölçülebilir nicelik $\langle A\rangle_t$'nin zaman bağımlılığı, gözlenebilir ve durum her ikisinin de zamanla değişimi ile tanımlanır.

A gözlenebilirinin $|at\rangle_D$ özvektörleri

$$A^D(t)\,|at\rangle_D = a(t)\,|at\rangle_D$$

$|a_0\rangle_D$'nin $e^{itH_0/\hbar}$ tarafından döndürülmesi ile verilir

BS K

$$|a\,t\rangle_D = e^{itH_0/\hbar}\,|a\,0\rangle_S$$

$|\psi(t)\rangle_D$ durum vektörleri $|\psi_0\rangle$'ın ters yönde

$U_1^\dagger(t)$ $\left(= e^{-itH_1/\hbar}\right.$ eğer $\left.[H_0, H_1]=0 \text{ ise}\right)$ tarafından

döndürülmesi ile elde edilir.

$$|\psi(t)\rangle_D = U_1^\dagger(t)\,|\psi_0\rangle$$

Olasılıkların zaman bağımlılığı S.P ve H.P ile olduğu gibidir:

$U(t) = U_1 U_0$

$$|\langle a\,t|\psi_0\rangle|^2 = |\langle a\,0|U^\dagger(t)|\psi_0\rangle|^2$$

$$= |\langle a\,0|U_0^\dagger(t)\,U_1^\dagger(t)|\psi_0\rangle|^2$$

$$= |{}_D\langle a\,t|\psi(t)\rangle_D|^2$$

Korunumlu olmayan sistemler

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A(t), H(t)] + \frac{\partial A(t)}{\partial t} \qquad 1\text{-}59$$

açık terimi

$A = A(Q_i(t), P_i(t), t)$ olduğu varsayılır ile

Poisson parantezleri $\rightarrow$ $\left(1/i\hbar \times \text{komütatör}\right)$

değişimi ile elde edilir

BS K

Schrödinger P.

$$W(t) = U^+(t)\, W_0\, U(t)$$

$$U(t) = e^{iHt/\hbar}$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = U^+(t)\, |\psi_0\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\psi_0\rangle$$

Heisenberg P.

$$A(t) = U(t)\, A\, U^+(t)$$

$$U(t) = e^{iHt/\hbar}$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} A(t) = [A(t), H]$$

Dirac P.

$$A^D(t) = U_0(t)\, A\, U_0^+(t)$$

$$W^D(t) = U_1^+(t)\, W_0\, U_1(t)$$

$$U_1(t) = U(t)\, U_0^+(t)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_D = H_1 |\psi(t)\rangle_D$$

$$|\psi(t)\rangle_D = U_1^+(t)\, |\psi_0\rangle$$

$$\Leftrightarrow [H_0, H_1] = 0 \text{ nL.}$$

prb. XII.1. H, a ve $a^{\dagger}$ daha evvel harmonik osilatör için tanımlanmış operatörler olsun. Zaman evrimi aksiyomunu kullanarak da/dt ve $da^{\dagger}/dt$'yi hesaplayınız.

$$H = \hbar\omega\left(a^{\dagger}a + \frac{1}{2}\right)$$

$$i\hbar \frac{da}{dt} = [a, H] = \hbar\omega\,[a, a^{\dagger}a] = \cancel{\hbar}\omega\, a$$

$$\Rightarrow \frac{da}{dt} + i\omega a = 0 \Rightarrow a(t) = a(0)\, e^{-i\omega t}$$

$$a^{\dagger}(t) = a^{\dagger}(0)\, e^{i\omega t}$$

prb. XII.2. $K(t)$ dış kuvvetine maruz kalmış bir harmonik osilatör için H Hamiltoniyeni

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}Q^2 - QK(t) = \underbrace{H_0}_{\text{toplam enerji}} - QK(t)$$

a) H'yi a, $a^{\dagger}$ ve I cinsinden ifade ediniz.

$$Q = (\hbar/2m\omega)^{1/2}(a + a^{\dagger})$$

$$\Rightarrow H = \hbar\omega\left(a^{\dagger}a + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2}(a + a^{\dagger})\,K(t)$$

b) Zaman evrimi üzerine aksiyomu kullanarak, da/dt'yi hesaplayınız.

$$i\hbar \frac{da}{dt} = \hbar\omega a - \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2} [\, a,\ a+a^{\dagger}] K(t)$$

$$i \frac{da}{dt} = \omega a - \frac{1}{(2m\omega\hbar)^{1/2}} K(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{da}{dt} + i\omega a = \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}} K(t)$$

c) Dif. denk.'i çözünüz.

$$\frac{d}{dt}\left(a e^{i\omega t}\right) = e^{i\omega t}\frac{da}{dt} + i\omega e^{i\omega t} a$$

$$= e^{i\omega t}\left(\frac{da}{dt} + i\omega a\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(a e^{i\omega t}\right) = \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}} K(t)\, e^{i\omega t}$$

$$e^{i\omega t} a = \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \int_0^t dt'\, e^{i\omega t'} K(t')$$

$$a = \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \int_0^t dt'\, e^{i\omega(t'-t)} K(t')$$

Genel çözüm

$$a(t) = a(0)\, e^{-i\omega t} + \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \int_0^t dt'\, e^{i\omega(t'-t)} K(t')$$

BS K

Prb. XII.3. Prb. 2 deki $F(t)$ dış kuvveti altındaki harmonik osilatör için $N = a^+ a$ 'nın φ_n ortonormal özvektörleri kuvvetsiz durumda kullanıldığı anlamda kurulasın;

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left[a^+(t) \right]^n \underbrace{\varphi_0(t)}_{\text{taban dur.}}$$

$t=0$ anında harmonik osilatörün enerjisi $\hbar\omega/2$ ölçülmekte ~~dir~~. Bu andaki taban durumunu $\phi_0 = \varphi_0(t=0)$ gösteriniz.

a) Enerji ölçümünden sonra harmonik osilatör için istatistiksel op. nedir?

$$W = \Lambda = |\phi_0\rangle\langle\phi_0|$$

b) Bir t zaman sonra $E = \hbar\omega(n+1/2)$ enerjili öz değeri ölçmenin olasılığının $W_n = |(\varphi_n, \phi_0)|^2$ olduğunu gösteriniz.

$$W' = \sum_n \Lambda_n W \Lambda_n$$

$$\Lambda_n = |nt\rangle\langle nt| \quad , \quad |nt\rangle = |\varphi_n(t)\rangle$$

$$W' = \sum_n |nt\rangle \underbrace{\langle nt|\phi_0\rangle\langle\phi_0|nt\rangle}\langle nt|$$

$$= \sum_n |\langle nt|\phi_0\rangle|^2 \, |nt\rangle\langle nt|$$

$$= \sum_n W_n \, |nt\rangle\langle nt|$$

BS K

c) $$W_n = \frac{|F(t)|^{2n}}{n!} e^{-|F(t)|^2}$$

olduğunu gösteriniz, burada, $F(t) = \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \int_0^t K(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$

$$|nt\rangle = C_1 \frac{1}{\sqrt{n!}} [a^+(t)]^n \phi_0(t)$$

$|\phi_0\rangle$

$$= C_1 \frac{1}{\sqrt{n!}} [a^+(t)]^n e^{-iHt/\hbar} |00\rangle$$

$$= C_2 e^{-i\omega t} \frac{1}{\sqrt{n!}} [a^+(t)]^n |\phi_0\rangle$$

$$\langle\phi_0|nt\rangle = C_2 e^{-i\omega t} \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle\phi_0| a^+(t)^n |\phi_0\rangle$$

$$a^+(t) = a_0^+ e^{i\omega t} + e^{i\omega t} F(t)$$

$$\langle\phi_0|nt\rangle = \frac{c\, e^{-i\omega t}}{\sqrt{n!}} \langle\phi_0| [a^+(0) e^{i\omega t} + e^{i\omega t} F(t)]^n |\phi_0\rangle$$

$$= \frac{c}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega(1-n)} \langle\phi_0| [a^+(0) + F(t)]^n |\phi_0\rangle$$

$$W_n = |\langle\phi_0|nt\rangle|^2 \quad , \sum_n W_n = 1$$

BS K

$$1 = |C|^2 \sum_n \frac{(|F|^2)^n}{n!} = |C|^2 e^{|F|^2}$$

$$|C|^2 = e^{-|F|^2}$$

$$W_n = e^{-|F|^2} \frac{(|F|^2)^n}{n!}$$

d) $t=0$ daki enerji ölçümünden hemen sonra konum op.'ü için beklenen değerin

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{m\omega} \int_0^t K(\tau) \sin(\omega - \tau)\, d\tau$$

$$\omega(t-\tau) \, .$$

olduğunu gösteriniz.

$$Q = (\hbar/2m\omega)^{1/2} (a + a^\dagger) \qquad a \equiv a(t) \quad a^\dagger \equiv a^\dagger(t)$$

$$\langle \phi_0 | Q | \phi_0 \rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2} \left[\langle \phi_0 | (a + a^\dagger) | \phi_0 \rangle \right]$$

$$a(t) = a(0) e^{-i\omega t} + e^{-i\omega t} F(t)$$

$$a^\dagger(t) = a^\dagger(0) e^{i\omega t} + e^{i\omega t} \bar{F}(t)$$

$$\langle Q \rangle = (\hbar/2m\omega)^{1/2} \left[e^{-i\omega t} F(t) + e^{i\omega t} \bar{F}(t) \right]$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2} \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \left\{ \int_0^t K(\tau) e^{i\omega(\tau - t)} d\tau + \int_0^t K(\tau) e^{-i\omega(\tau - t)} d\tau \right\}$$

BS K

XII. 4. $K(t) = \begin{cases} k(t) & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$

şeklindeki bir dış kuvvetin etkisi altındaki harmonik osilatör $t=0$ anında $\hbar\omega/2$ enerjili durumdadır. Enerji'nin bir t anında $\hbar\omega(m+1/2)$ 'ye eşit ya da küçük olması özelliği $\Lambda = \sum_{n=0}^{m} \Lambda_{\varphi_n(t)}$ ile karakterize edilir, burada $\Lambda_{\varphi_n(t)}$, $\varphi_n(t)$ tarafından gerilen 1 boyutlu alt uzaylar üzerinde projeksiyon op.'leridir. (a) Enerjiyi $\hbar\omega(m+1/2)$ ye eşit ya da daha küçük bulmanın olasılığı nedir?

$$\langle nt | nt \rangle = 1 \Rightarrow |C|^2 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} |F(t)|^{2n}}$$

$$Tr(\Lambda) = \langle nt | \Lambda | nt \rangle = 1$$

b) Λ'nın pozitif sonuçlu bir ölçümünden sonra W' istatistiksel op.'ü nedir?

$$W' = \Lambda_{n'} \Lambda \Lambda_{n'} = \sum_{n=0}^{m} \Lambda_{n'} \Lambda_{\varphi_n(t)} \Lambda_{n'}$$

$$= \sum_{n'} \sum_{n=0}^{m} |n't\rangle\langle n't| \Big(|nt\rangle\langle nt| \Big) |n't\rangle\langle n't|$$

$$= \sum_{n'=0}^{m} |n't\rangle\langle n't|$$

BS K

c)

$$W' \psi_{n'} = \begin{cases} 0 & n' > n \\ = \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{m} (1/n!) |F(t)|^{2n}} \sum_{n=0}^{m} |\psi(t)\rangle e^{i(n'-n)wt} \times \dfrac{1}{\sqrt{n!\,n'!}} [F(t)]^{n} [\bar{F}(t)]^{n'} & n' \leq n \end{cases}$$

olduğunu gösteriniz.

$$W' \psi_{n'} = W' |n' t\rangle$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{m} |nt\rangle \langle nt| \right) |n' t\rangle$$

$$|nt\rangle = C \frac{1}{\sqrt{n!}} e^{iwt(n+1/2)} a^{+n} |00\rangle$$

$$|n' t\rangle = C \frac{1}{\sqrt{n'!}} e^{-iwt(n'+1/2)} (a^{+})^{n'} |00\rangle$$

$$\langle nt | n' t\rangle = |C|^2 \frac{1}{\sqrt{n!\,n'!}} e^{iw(n'-n)t} \langle 00| a^{n} (a^{+})^{n'} |00\rangle$$

$$\langle 00| \left(a(0) e^{-iwt} + e^{-iwt} F(t) \right)^{n} \left(a^{+}(0) e^{iwt} + e^{iwt} \bar{F}(t) \right)^{n'} |00\rangle$$

$$= |C|^2 \frac{e^{iw(n'-n)t}}{\sqrt{n!\,n'!}} (F(t))^{n} (\bar{F}(t))^{n'}$$

$$= \Bigg\{$$

BS K