

BÖLÜM 6

DALGA MEKANIĞININ GENEL YAPISI

ÖZ FONKSİYONLAR VE ÖZDEĞERLER

Hamilton Operatörü: Bir fiziksel sistemin durumu sist. hakkındaki tüm bilgisi içeren bir dalga fonk.'u ile tarif edilir. Dalga fonk.'unun zaman bağımlılığı

$$\text{ist } \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} = \hbar \varphi(x,t). \quad (\times)$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

$V(x)$ 'in açık zaman bağımlılığı yok ise, $\textcircled{+}$ 'in çözümleri

$$\psi(x,t) = u_F(x) e^{-iEt/\hbar}$$

$$f(u_E(x)) = F u_E(x)$$

$U_F(x)$: H Hamiltonienin öf. h. 'ları

F : " " örneği

Bu bölümde H' 'nin özformlarının (2) özelliği üzerindeki davranışını inceleyeceğiz.

40) Farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ortogonal'dir.

$$\int dx u_{\vec{E}}^*(x) u_{\vec{E}'}(x) = 0 \quad E \neq E'$$

BS K

2) Özfonksiyonlar bir tam küme oluşturmalar. - yani -

$$\int dx |f(x)|^2 < \infty$$

olacak şekilde karesi integrallenebilir herfi bir $f(x)$ fonk.'un
Hamiltoniyenli özfonksiyonları ciktinden

$$f(x) = \sum_E C_E u_E(x)$$

şeklinde serize açılabilir.

H'nin Spektrumu, sınırsız boşluk ve harmonik osilatör duru-
munu da aldığı gibi kesikli olabilir. $x \rightarrow \infty$ iken $V(x) \rightarrow 0$ 'a gi-
derse sürekli olduğu kadar kesikli özdeğerler de vardır. Bu
bir ya da daha fazla bağlı durum oluşturabilecek kadar yetecek
derin bir çukuru pot. için ortaya çıkar. Bu duruma, tam bir
küme için gerekli olan şey sürekli ve kesikli özfonk.'ları bul
toplam kümesidir. :

$$f(x) = \sum_n C_n u_n(x) + \int dp C(p) u_p(x)$$

$E = p^2/2m$ sürekli ($V(x) \rightarrow 0$)

Ortonormallik şartı:

$$\int dx u_m^*(x) u_n(x) = \delta_{mn}$$

$$\int dx u_q^*(x) u_p(x) = \delta(p-q)$$

$$\int dx u_n^*(x) u_p(x) = 0$$

$\psi(x,t)$ dalga fonk.'u, her bir ölfonk.'unun

$$u_E(x,t) = u_E(x) e^{-iEt/\hbar}$$

şeklindeki basit zaman bağımlılığı dikkate alınarak,

$$\psi(x,t) = \sum_E C_E u_E(x) e^{-iEt/\hbar}$$

şeklinde yazılabilir. Genel olarak,

$$\psi(x,t) = \sum_n C_n u_n(x) e^{-iE_n t/\hbar} + \int dp C(p) u_p(x) e^{-ip^2 t/2mt\hbar}$$

Diğer Göçlenestirler:

E ve p 'ni tartıştık, ileride $\vec{r}$ 'yi de tartışacağız.

Enerjiyi H 'nin özdeğeri olarak bulmuştuk. $\mathcal{P}_{op}$ 'nin özdeğeri de aynı olmalı:

$$\mathcal{P}_{op} u_p(x) \equiv \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} u_p(x) = p u_p(x) \quad -\infty < p < \infty$$

$$\Rightarrow u_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$$

Ölfonk.'lar bir ortonormal küme oluşturmula

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx u_{p_1}^*(x) u_{p_2}(x) = \delta(p_1 - p_2)$$

ve aslında teoremi

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \phi(p) u_p(x)$$

✓ reel ölfonk.'lar kümesi.

BS K

Özdeğerleri reel olan tüm operatörler hermitel operatörler olarak adlandırılırlar. Tüm fiziksel gözlenebilirler bu öelliğe sahip olduğundan, hermitel operatörler ile temsil edilmeliler.

Açılım Postülası ve Vektör Analojisi:

A ile ilgili bir gözlenebilirliği gösterelim. a reel özdeğerleri ne karşılık gelen özfonksiyonlar olacaktır.

$$A u_a(x) = a u_a(x)$$

Özfonk.'lar bir ortogonal küme oluşturmalar ve

$$\int dx u_{a_1}^*(x) u_{a_2}(x) = \delta_{a_1 a_2}$$

olacak şekilde normallendiriler.

$u_a(x)$ özfonksiyonları da tam bir küme oluşturmalar

$$f(x) = \sum_a C_a u_a(x)$$

$$C_a = \int dx u_a^*(x) f(x)$$

Açılım Katsayılarının Yorumu: C_a :

Eğer A gözlenebilirliği, herhangi $f(x)$ dalg. fonk.'nın ile tarif edilen sist.'lerin bir toplamı için ölçülürse ($\int |f|^2 dx = 1$)

0 zaman;

1. herhangi bir ölçüm yalnızca a özdeğerlerinden biri verebilir.

2. a özdeğerinin sahip sist.'in hermi, ya da eşdeğer olarak a

BSK olması olasılığı, $|C_a|^2$

3. Toplam sist. için bir üyeyi verirken bir örneğin a_1 , verirken ölçümünden sonra, toplam sistemin ölçümü U_{a_1} durumuna ita'at edilir. Ancak bu şekilde A gözlenebilirlik orijinal ölçümleri aynı sonucu verdiğinden elverişlidir!! ✓

Bu yolla bir sonuç bir sist. için A gözlenebilirliğinin örneğinden birine sahip olma olasılığı bir dir.

$$\sum_a |C_a|^2 = 1.$$

$$1 = \int dx \psi^*(x) \psi(x) = \sum_{a,b} C_a^* C_b \int dx U_a^*(x) U_b(x) \\ = \sum_a |C_a|^2 \quad \checkmark \quad !!$$

$$\underline{\underline{A|a\rangle = a|a\rangle}}$$

$$\sum_a C_a C_a^* = \sum_a \int dx U_a^*(x) \psi(x) \int dy U_a(y) \psi^*(y) \\ = \int \int dx dy \psi^*(y) \psi(x) \underbrace{\sum_a U_a^*(x) U_a(y)}_{\delta(x-y)} = 1$$

$$\sum_a U_a^*(x) U_a(y) = \delta(x-y) \quad \text{tamamı sağlanır.} \\ \equiv \text{Açılım teoremi}$$

Vektör Uzay Analogisi:

Açılım teoremine bir $\vec{A}$ vektörünün N -boyutlu bir vektör uzayının ortogonal N tane vektörleri üzerinden açılımının bir genelleştirilmesi olarak bakılabilir.

BS K

$$\vec{A} = A_1 \hat{i}_1 + A_2 \hat{i}_2 + \dots + A_N \hat{i}_N.$$

BS K

$$\hat{i}_k \cdot \hat{i}_l = \delta_{kl}$$

$$\hat{i}_k \leftrightarrow u_k(x) ; A_n = \hat{i}_n \cdot \vec{A} \leftrightarrow C_n$$

C_a : $\psi(x)$ 'in $u_a(x)$ baz vektörleri boyunca izlenişini.

$$C_a = \int dx u_a^*(x) \psi(x) \text{ 'a}$$

- u_a 'nın ψ ile skaler çarpımı.. Bu analogi ile her iki durumda da lineer vektör uzayları ile ilgileniriz: vektör uzayına herhangi bir vektör toplama

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C} \rightarrow \text{İki dalg fonk. 'nın toplamı.}$$

Q.M. 'nin vektör uzayı ve benzeri bir N boyutlu vektör uzayı aramada farklı Q.M. denklemleri sonsuz boyutlu olmalıdır. Böylece bir skaler çarpımın da sonlu heriki toplama

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_i A_i B_i \leftrightarrow \int dx \psi^*(x) \psi(x)$$

integrali ile yer değiştirilir. Bu da Q.M. integralinin yakınsaklığı hakkında anlaşılmasını anlamaya gelir. Q.M. vektör uzayı Hilbert Uzayı olarak adlandırılır.

Operatörler ve Gözlenirlikler.

vektör uzayına bir operatör bir vektörü diğere dö-
nüştürür.

$$A(\alpha_1 \psi_1(x) + \alpha_2 \psi_2(x)) = \alpha_1 A\psi_1(x) + \alpha_2 A\psi_2(x)$$

⊛ Hermitisel operatörler için

$$\langle A \rangle = \langle A \rangle^*$$

yani bir ψ durumu için

$$\int dx \psi^*(x) A \psi(x) = \int dx (A \psi(x))^* \psi(x)$$

$$\int dx \phi^* A \psi = \int dx (A \phi)^* \psi$$

○ ispat:

$$\psi(x) = \phi(x) + \lambda \psi(x), \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\int dx \psi^* A \psi = \int dx (\phi^* + \lambda^* \psi^*) A (\phi + \lambda \psi)$$

$$= \int dx \phi^* A \phi + |\lambda|^2 \int dx \psi^* A \psi$$

$$+ \lambda \int dx \phi^* A \psi + \lambda^* \int dx \psi^* A \phi$$

○ aynı C.C. 'i:

$$\int dx (A \psi)^* \psi = \int dx (A \phi)^* \phi + |\lambda|^2 \int dx (A \psi)^* \psi$$

$$+ \lambda^* \int dx (A \psi)^* \phi + \lambda \int dx (A \phi)^* \psi$$

Bir A operatörü Hermitiel değil ise Hermitik eşleniğini

$A^\dagger$ ile gösteririz.

$$\int dx (A \phi)^* \psi = \int dx \phi^* A^\dagger \psi.$$

BS K

DIRAC NOTASYONU:

P. A. M. Dirac, hem sonlu boyutlu vektör uzaylarına ve hem de Hilbert uzaylarına eşit derecede iyi uygulanan çok ekonomik ve güçlü bir notasyon ortaya koydu.

$\psi \rightarrow$ bir $|\psi\rangle$ durum vektörü (Ket)

$\psi^* \rightarrow$ bir $\langle\psi|$ " " " (Bra)

○ ψ ve ψ^* 'in skaler çarpımı;

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int dx \psi^* \psi$$

$$\langle\psi|\psi\rangle^* = \langle\psi|\psi\rangle$$

Bir operatör içeren bir integral için,

$$\int dx \psi^* A \psi = \langle\psi|A|\psi\rangle = \langle\psi|A\psi\rangle$$

○ Hermitik eşlenik op.'ün tanımı,

$$\langle A\psi|\psi\rangle = \langle\psi|A^\dagger|\psi\rangle$$

$$\begin{cases} \langle\psi|a\psi\rangle = a \langle\psi|\psi\rangle \\ \langle a\psi|\psi\rangle = a^* \langle\psi|\psi\rangle \end{cases} \quad a \in \mathbb{C}$$

$A|a\rangle = a|a\rangle$ özdeğer denl. i

2.

Dirac notasyonunda ortogonalite şartı,

$$\langle a_1 | a_2 \rangle = \delta_{a_1 a_2}$$

Açılım teoremi,

$$|\psi\rangle = \sum_a C_a |a\rangle$$

özel bir $|b\rangle$ durumu ile soldan çarpım

$$\langle b | \psi \rangle = \sum_a C_a \langle b | a \rangle = \sum_a C_a \delta_{ab} = C_b$$

$$\langle \phi | \psi \rangle = \sum_a C_a \langle \phi | a \rangle = \sum_a \langle \phi | a \rangle \langle a | \psi \rangle$$

$$\sum_a |a\rangle \langle a| = 1$$

Dirac notasyonunun kullanarak farklı özdeğerlere karşılık gelen Hermitik op.'lerin özfonk.'larının diğliğini göstereceğiz.

$$\langle b | A | a \rangle = a \langle b | a \rangle \quad \text{olmalı.}$$

$$\langle b | A^\dagger | a \rangle = b^* \langle b | a \rangle$$

$$A = A^\dagger \quad (\text{Hermitik op. dir}) \quad a \langle b | a \rangle = b^* \langle b | a \rangle$$

Özdeğerleri de reel olmalı $b^* = b$

$$(a - b) \langle b | a \rangle = 0$$

$$a \neq b \Rightarrow \langle b | a \rangle = 0 \quad \text{olmalı.}$$

DEJENERELİK VE EŞZAMANLI GÖZLEMLİLİKLER

4. Böl.'de tartıştiğimiz hem kuantalaki parçacık ve hem de serbest parçacık problemleri, özfonk.'ların ilkinde parite ilkesi-
sinde de momentum'un π 'nin eşzamanlı özfonk.'ları olmasının
görünü. ve her iki durumda da bu iki operatörler π ile
komüt ediyorlardı. Şimdi bunun hangi genel şartlar altında
meydana geldiğini inceleyelim.

$$A u_a(x) = a u_a(x)$$

$$B u_a(x) = b u_a(x)$$

$$u_a(x) : \begin{cases} \text{hem } A \\ \text{hem } B \end{cases} \text{ 'nin eşzamanlı özfonk.'ları}$$

$$AB u_a(x) = A b u_a(x) = a b u_a(x)$$

$$BA u_a(x) = B a u_a(x) = b a u_a(x)$$

$$\Rightarrow (AB - BA) u_a(x) = 0$$

Bu tek bir $u_a(x)$ için olsaydı ilginç olmayacaktı. Ama

u_a 'nın tam kümesi için geçerli ise $\psi = \sum_a C_a u_a$

$$\begin{aligned} \sum_a C_a (AB - BA) u_a(x) &= (AB - BA) \sum_a C_a u_a(x) \\ &= (AB - BA) \psi(x) = 0 \end{aligned}$$

$$[A, B] = 0$$

A ve B'nin sırayla değişimlerini geçtik.

Karşıt olarak, sıra değiştirilen A ve B Hermitiel işlememizi varsa ve $[A, B] = 0$ geçerli değil,

$$AB u_a(x) = BA u_a(x)$$

$$\Rightarrow A(B u_a) = a(B u_a)$$

$B u_a$ da A 'nın a özdeğeriyle bir özfonksiyonudur. A 'nın a özdeğeri karş. gelen tek bir özfonksiyon varsa, $B u_a$ 'nın u_a ile orantılı olmanın gerektirilmesi.

$$B u_a(x) = b u_a(x)$$

○ zaten u_a A ve B 'nin ortak özfonksiyonudur. A 'nın özfonksiyonlarının katmerli olmadığı bu durumu, önceki bölümde parçacık'ta görmüştük!

Şimdi A 'nın a özdeğeriyle karş. gelen iki ayrı özfonksiyon olduğunu düşünelim.

$$A u_a^{(1)} = a u_a^{(1)}(x)$$

$$A u_a^{(2)} = a u_a^{(2)}(x)$$

$Bu_a^{(1)}$ ve $Bu_a^{(2)}$; $u_a^{(1)}$ ve $u_a^{(2)}$ 'ın bir özdeğer birleşti-
rimleri olmalarıdır.

$$Bu_a^{(1)} = b_{11} u_a^{(1)} + b_{12} u_a^{(2)}$$

$$Bu_a^{(2)} = b_{21} u_a^{(1)} + b_{22} u_a^{(2)}$$

$$B(u_a^{(1)} + \lambda u_a^{(2)}) = (b_{11} + \lambda b_{12})u_a^{(1)} + (b_{21} + \lambda b_{22})u_a^{(2)}$$

$$B = b_{\pm} (u_a^{(1)} + \lambda u_a^{(2)})$$

$$Bv_a^{(1)} = b_{+} v_a^{(1)}$$

$$\lambda = \frac{b_{12} + \lambda b_{21}}{\lambda b_{11} + b_{22}}$$

$$Bv_a^{(2)} = b_{-} v_a^{(2)}$$

BELİRSİZLİK BAĞINTILARI

$$(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \quad \text{dağılıma}$$

$$= \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle$$

$$= \langle A^2 - 2A\langle A \rangle + \langle A \rangle^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle \langle A \rangle$$

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 - \frac{1}{4} \langle i[A, B] \rangle^2 \geq 0$$

$$[x, p] = i\hbar \quad \text{olduğundan}$$

$$(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

ZAMAN BAĞIMLILIĞI ve KLASİK LİMİT

işlemlerin beklenen değerleri zaman içinde
gelişimi? Değişir (Genelde)

$$\langle A \rangle_t = \int \psi^*(x, t) A \psi(x, t) dx$$

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle_t = \int \psi^*(x,t) \frac{\partial A}{\partial t} \psi(x,t) dx$$

$$+ \int \frac{\partial \psi^*(x,t)}{\partial t} A \psi(x,t) dx$$

$$+ \int \psi^*(x,t) A \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} dx$$

$$= \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle_t + \int \left(\frac{1}{i\hbar} \pi \psi(x,t) \right)^* A \psi(x,t)$$

$$+ \int \psi^*(x,t) A \left(\frac{1}{i\hbar} \pi \psi(x,t) \right)$$

$$= \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle_t + \frac{i}{\hbar} \int \psi^* \pi A \psi - \frac{i}{\hbar} \int \psi^* A \pi \psi$$

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle_t = \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle_t + \frac{i}{\hbar} \langle [\pi, A] \rangle_t$$

A a.c.l. zamanla saptanabilir $\left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle_t = 0$

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle_t = \frac{i}{\hbar} \langle [\pi, A] \rangle_t$$

$[\pi, A] = 0 \Rightarrow$ saptanabilir. (Herkesin sapt.)

$A = x$ ve p alırsa,

15.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \langle x \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle [H, x] \rangle \\
 &= \frac{i}{\hbar} \langle \left[\frac{p^2}{2m} + V(x), x \right] \rangle \\
 &= \frac{i}{\hbar} \langle \left[\frac{p^2}{2m}, x \right] \rangle
 \end{aligned}$$

$$[p^2, x] = p[p, x] + [p, x]p = \frac{2\hbar}{i} p$$

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \left\langle \frac{p}{m} \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{*} \quad \frac{d}{dt} \langle p \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle \left[\frac{p^2}{2m} + V(x), p \right] \rangle \\
 &= -\frac{i}{\hbar} \langle [p, V(x)] \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 pV\psi - Vp\psi &= \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} (V\psi) - \frac{\hbar}{i} V \frac{d\psi}{dx} \\
 &= \frac{\hbar}{i} \frac{dV}{dx} \psi + \frac{\hbar}{i} V \frac{d\psi}{dx} - \frac{\hbar}{i} V \frac{d\psi}{dx}
 \end{aligned}$$

$$[p, V] = \frac{\hbar}{i} \frac{dV}{dx}$$

$$\frac{d}{dt} \langle p \rangle = - \left\langle \frac{dV}{dx} \right\rangle$$

BÖLÜM 6

PROBLEMLER

prb. 6.1) A ve B Hermitse

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \int dx \psi^* (AB)^\dagger \psi &= \int dx [AB\psi]^\dagger \psi = \int dx (B\psi)^\dagger A^\dagger \psi \\ &= \int dx \psi^* B^\dagger A^\dagger \psi = \int dx \psi^* BA\psi \end{aligned}$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = BA = AB - [A, B] \Rightarrow [A, B] = 0 \Leftrightarrow AB = (AB)^\dagger$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad [(A+B)^n]^\dagger &= (A^\dagger + B^\dagger)(A^\dagger + B^\dagger) \dots (A^\dagger + B^\dagger) \\ &= (A+B)(A+B) \dots (A+B) = (A+B)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{prb. 6.2) (i)} \quad \int dx \psi^* (A+A^\dagger)^\dagger \psi &= \int dx [(A+A^\dagger)\psi]^\dagger \psi \\ &= \int dx (A\psi)^\dagger \psi + \int dx (A^\dagger \psi)^\dagger \psi \\ &= \int dx \psi^* A^\dagger \psi + \int dx \psi^* A\psi \\ &= \int dx \psi^* (A+A^\dagger) \psi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (A+A^\dagger)^\dagger = A+A^\dagger$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \int dx \psi^* [i(A-A^\dagger)^\dagger] \psi &= \int dx [i(A-A^\dagger)\psi]^\dagger \psi \\ &= -i \int dx (A\psi)^\dagger \psi + i \int dx (A^\dagger \psi)^\dagger \psi \end{aligned}$$

$$= -i \int dx \psi^* A^\dagger \psi + i \int dx \psi^* A\psi = \int dx \psi^* [i(A-A^\dagger)] \psi \Rightarrow [i(A-A^\dagger)]^\dagger = i(A-A^\dagger)$$

$$\text{(iii)} \quad \int dx \psi^* (AA^\dagger)^\dagger \psi = \int dx [AA^\dagger \psi]^\dagger \psi = \int dx [A^\dagger \psi] A^\dagger \psi = \int dx \psi^* AA^\dagger \psi$$

$$(AA^\dagger)^\dagger = AA^\dagger$$

prb. 6.3.) H hermitisch $e^{iH} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n H^n}{n!}$

$$\begin{aligned}
 \int dx \psi^* (e^{iH})^\dagger \psi &= \int dx \left[\sum_n \frac{i^n H^n}{n!} \psi \right]^\dagger \psi \\
 &= \int dx \sum_n \frac{(-i)^n}{n!} [H^n \psi]^\dagger \psi = \int dx \sum_n \frac{(-i)^n}{n!} [H^{n-1} \psi]^\dagger H \psi \\
 &= \int dx \sum_n \frac{(-i)^n}{n!} [H^{n-2} \psi]^\dagger H^2 \psi = \dots \\
 &= \int dx \sum_n \frac{(-i)^n}{n!} \psi^* H^n \psi = \int dx \psi^* e^{-iH} \psi \\
 \Rightarrow (e^{iH})^\dagger &= e^{-iH}
 \end{aligned}$$

prb. 6.4.)

$$\langle \psi | \psi \rangle \langle \phi | \phi \rangle \geq |\langle \psi | \phi \rangle|^2 \quad \text{Schwartz Ungleichung}$$

$$\langle \psi + \lambda \phi | \psi + \lambda \phi \rangle \geq 0$$

λ^* la g re lineare
reine
skalare

$$\langle \psi | \psi \rangle + \lambda \langle \psi | \phi \rangle + \lambda^* \langle \phi | \psi \rangle + |\lambda|^2 \langle \phi | \phi \rangle \geq 0$$

$$\langle \phi | \psi \rangle + \lambda \langle \phi | \phi \rangle = 0 \quad (\because) \quad \lambda = - \frac{\langle \phi | \psi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle}$$

$$\langle \psi | \psi \rangle - 2 \frac{\langle \psi | \phi \rangle \langle \phi | \psi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle} + \frac{\langle \psi | \phi \rangle \langle \phi | \psi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle} \geq 0$$

$$\begin{aligned}
 \langle \psi | \psi \rangle \langle \phi | \phi \rangle &\geq \langle \psi | \phi \rangle \langle \phi | \psi \rangle \\
 & (= |\langle \psi | \phi \rangle|^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \psi &\rightarrow 1 \\
 \phi &\rightarrow 5 \\
 1 &\geq 5 \cdot 5
 \end{aligned}$$

pr. 6.5.)

$$\psi(x) = \sum_a C_a u_a(x) \rightarrow |\psi\rangle = \sum_a C_a |u_a\rangle \quad 6.78.$$

$$C_a = \int dx u_a^*(x) \psi(x) \rightarrow C_a = \langle u_a | \psi \rangle$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sum_a C_a \langle \psi | u_a \rangle = \sum_a \langle \psi | u_a \rangle \langle u_a | \psi \rangle$$

$$\Rightarrow \sum_a |u_a\rangle \langle u_a| = \mathbb{1}$$

pr. 6.7.)^{*} A Hermitisch $\langle A^2 \rangle \geq 0$.

$$\langle A^2 \rangle = \int dx \psi^* A A \psi = \int dx (A\psi)^* (A\psi) = \int dx |A\psi|^2 \geq 0$$

pr. 6.8.) $H^\dagger = \mathbb{1}$

$$H u_n = h u_n, H^2 u_n = h^2 u_n, \dots, H^4 u_n = h^4 u_n = u_n \Rightarrow h^4 = 1$$

$$\bigcirc H^\dagger = H \quad \text{ist} \quad h^2 \geq 0 \quad h^2 = +1 \Rightarrow h = \pm 1$$

$$H^\dagger \neq H \quad \parallel \quad h^2 = \pm 1 \Rightarrow h = \pm i, \pm 1$$

pr. 6.9.) $U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{1}$ unitär $\langle \psi | \psi \rangle = 1; \langle U\psi | U\psi \rangle = 1$.

$$\langle U\psi | U\psi \rangle = \langle \psi | U^\dagger U \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle = 1$$

4.

prb. 6.10.) A hermitisch e^{iA} unitär.

$$A^\dagger = A \quad (e^{iA})^\dagger = e^{-iA} \quad \text{also} \Rightarrow (e^{iA})^\dagger e^{iA} = 1 = e^{iA} (e^{iA})^\dagger$$

prb. 6.11.) $\{u_a\}$ $\langle u_a | u_b \rangle = \delta_{ab}$, U unitär.

$$|v_a\rangle = U |u_a\rangle \quad \text{orthogonal?}$$

$$\langle v_b | v_a \rangle = \langle u_b | U^\dagger U | u_a \rangle = \langle u_b | u_a \rangle = \delta_{ab}.$$

prb. 6.12.)

$$\left. \begin{aligned} (\Delta x)^2 &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \\ (\Delta p)^2 &= \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 \end{aligned} \right\} \quad \langle x \rangle = 0, \langle p \rangle = 0$$

Bsp. 4 in 4. problem

prb. 6.13

$A = A^\dagger$ hermitisch.

$$\int dx (A\psi)^\dagger \psi = \int dx \psi^\dagger A^\dagger \psi \quad \psi = \psi_1 + \lambda \psi_2 \quad \text{nehmen.}$$

$$\begin{aligned} \int dx [A(\psi_1 + \lambda \psi_2)]^\dagger (\psi_1 + \lambda \psi_2) \\ = \int dx (\psi_1 + \lambda \psi_2)^\dagger A^\dagger (\psi_1 + \lambda \psi_2) \end{aligned}$$

$$\int dx \{ (A\psi_1)^\dagger + \lambda^* (A\psi_2)^\dagger \} (\psi_1 + \lambda \psi_2)$$

$$= \int dx \{ \psi_1^* + \lambda^* \psi_2^* \} A^\dagger (\psi_1 + \lambda \psi_2)$$

$$\int dx (A\psi_1)^\dagger \psi_1 + \lambda \int dx (A\psi_1)^\dagger \psi_2 + \lambda^* \int dx (A\psi_2)^\dagger \psi_1 + |\lambda|^2 \int dx (A\psi_2)^\dagger \psi_2$$

$$= \int dx \psi_1^* A^\dagger \psi_1 + \lambda \int dx \psi_1^* A^\dagger \psi_2 + \lambda^* \int dx \psi_2^* A^\dagger \psi_1 + |\lambda|^2 \int dx \psi_2^* A^\dagger \psi_2$$

λ und λ^* beliebig

$$\therefore \int dx [A\psi_1]^\dagger \psi_2 = \int dx \psi_1^* A^\dagger \psi_2$$

prb. 6.14.) a) $\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\pi, x] \rangle$

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \frac{i}{\hbar} \left\langle \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{i} m (\omega_1^2 x^2 + \omega_2 x + \varepsilon), x \right] \right\rangle$$

$$= \frac{i}{\hbar} \frac{1}{2m} \langle [p^2, x] \rangle = \frac{i}{2m\hbar} \frac{2\hbar}{i} \langle p \rangle = \frac{\langle p \rangle}{m}$$

$$\frac{d}{dt} \langle p \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\pi, p] \rangle = \frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{m\omega_1^2}{2} \langle [x^2, p] \rangle + \frac{m\omega_2}{2} \langle [x, p] \rangle \right\}$$

$$= \frac{i}{\hbar} \frac{m\omega_1^2}{2} 2i\hbar \langle x \rangle + \frac{i}{\hbar} \frac{m\omega_2}{2} i\hbar = -m\omega_1^2 \langle x \rangle - \frac{1}{2} m\omega_2$$

6

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle p \rangle = -m\omega_1^2 \frac{d}{dt} \langle x \rangle = -\omega_1^2 \langle p \rangle$$

$$\frac{d^2 \langle p \rangle}{dt^2} + \omega_1^2 \langle p \rangle = 0 \quad \langle p \rangle = A e^{i\omega_1 t} + B e^{-i\omega_1 t}$$

$$\frac{d \langle x \rangle}{dt} = \frac{1}{m} (A e^{i\omega_1 t} + B e^{-i\omega_1 t})$$

$$\Rightarrow \langle x \rangle = \frac{-i}{m\omega_1} (A e^{i\omega_1 t} - B e^{-i\omega_1 t}) + C$$

$$\frac{d}{dt} \langle p \rangle = i\omega_1 (A e^{i\omega_1 t} - B e^{-i\omega_1 t}) = \cancel{m\omega_1^2} \frac{-i}{\cancel{m\omega_1}} (A e^{i\omega_1 t} - B e^{-i\omega_1 t}) - m\omega_1^2 C = \frac{i}{2} m\omega_1^2$$

$$\Rightarrow C = \omega_2 / 2\omega_1^2$$

$$b) H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - \frac{A}{x^2}$$

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \frac{\langle p \rangle}{m}$$

$$\frac{d}{dt} \langle p \rangle = -m\omega^2 \langle x \rangle - 2A \left\langle \frac{1}{x^3} \right\rangle$$

$$\left(= \frac{i}{\hbar} \left\langle \left[\frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - \frac{A}{x}, p \right] \right\rangle = \frac{i m \omega^2}{2\hbar} \langle [x^2, p] \rangle - \frac{iA}{\hbar} \left\langle \left[\frac{1}{x^2}, p \right] \right\rangle \right.$$

$$= \frac{i}{2\hbar} m\omega^2 2i\hbar \langle x \rangle - \frac{iA}{\hbar} 2\frac{\hbar}{i} \left\langle \frac{1}{x^3} \right\rangle$$