

BÖLÜM 15

AÇISAL MOMENTUMLARIN TOPLANMASI

Spinleri $\vec{S}_1$ ve $\vec{S}_2$ olan iki elektron olsun. Her biri standart açisal mom. sıradışı bağıntılarını sağlar.

$$[S_{1x}, S_{1y}] = i\hbar S_{1z}$$

$$[S_{2x}, S_{2y}] = i\hbar S_{2z}$$

fakat parçacıklar serbestli dereceleri bağırır olduğunda,

$$[\vec{S}_1, \vec{S}_2] = 0$$

toplam spin tanımlayalım: $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$

buın bileşenlerinin sıradışı bağıntıları

$$[S_x, S_y] = [S_{1x} + S_{2x}, S_{1y} + S_{2y}]$$

$$= [S_{1x}, S_{1y}] + [S_{2x}, S_{2y}]$$

$$= i\hbar (S_{1z} + S_{2z}) = i\hbar S_z \quad \text{v.s.}$$

Simai $\vec{S}^2$ ve S_z 'nin özdeğer ve özfon. larını bulalım.

iki spin sist. 'i 4 durum sahiptir. İlkini spinorların

$\chi_{\pm}^{(1)}$: 1. elektronun spinorları.

ile gösterelim. Yani,

$$\begin{cases} \vec{S}_1^2 \chi_{\pm}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \hbar^2 \chi_{\pm}^{(1)} \\ S_{1z} \chi_{\pm}^{(1)} = \pm \frac{1}{2} \hbar \chi_{\pm}^{(1)} \end{cases}$$

aynısı 2. si için de geçerli.

Böylelikle 4 durum

$$\chi_+^{(1)} \chi_+^{(2)}, \chi_+^{(1)} \chi_-^{(2)}, \chi_-^{(1)} \chi_+^{(2)}, \chi_-^{(1)} \chi_-^{(2)}$$

Bu durumda S_z 'nin özdeğerleri

$$S_z \chi_{\pm}^{(1)} \chi_{\pm}^{(2)} = (S_{1z} + S_{2z}) \chi_{\pm}^{(1)} \chi_{\pm}^{(2)}$$

$$= \cancel{S_{1z} \chi_{\pm}^{(1)}} + \cancel{S_{2z} \chi_{\pm}^{(2)}}$$

$$= \left(\underbrace{S_{1z} \chi_{\pm}^{(1)}}_{\pm \frac{1}{2} \chi_{\pm}^{(1)}} \right) \chi_{\pm}^{(2)} + \chi_{\pm}^{(1)} \left(\underbrace{S_{2z} \chi_{\pm}^{(2)}}_{\pm \frac{1}{2} \chi_{\pm}^{(2)}} \right)$$

$$= \left(\pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \chi_{\pm}^{(1)} \chi_{\pm}^{(2)}$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{2} \chi_-^{(1)} \chi_-^{(2)} \\ 0 \cdot \chi_-^{(1)} \chi_+^{(2)} = 0 \cdot \chi_+^{(1)} \chi_-^{(2)} \\ +\frac{1}{2} \chi_+^{(1)} \chi_+^{(2)} \end{cases}$$

m değeri 0 olduğu 2 durum var. S_z beklenebilir: $\otimes$ bunlar bir lineer kombinasyona $S=1$ verilir $m=1$ $m=-1$ di
~~de~~ bir triplet oluşturulabilir.

$\otimes$ ortogonal birleştirilmi $S=0$ singlet i oluşturulabilir.

Bunu kontrol etmek için azaltan op, $\bar{u}$ kullanılır.

$$S_- = S_{1-} + S_{2-}$$

bu m=1'e uygulayalım.

$$\begin{cases} S_-^{(1)} \chi_+^{(1)} = \frac{1}{2} \chi_-^{(1)} \\ S_-^{(1)} \chi_-^{(1)} = 0 \end{cases} \quad \text{idi}$$

bu her iki şıradan başlayalım.

$$\begin{aligned} S_-^{(1)} \chi_+^{(1)} &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

0 zaman

$$\begin{aligned} S_- \chi_+^{(1)} \chi_+^{(2)} &= (S_{1-} + S_{2-}) \chi_+^{(1)} \chi_+^{(2)} \\ &= (S_{1-} \chi_+^{(1)}) \chi_+^{(2)} + \chi_+^{(1)} (S_{2-} \chi_+^{(2)}) \\ &= \frac{1}{2} (\chi_-^{(1)} \chi_+^{(2)} + \chi_+^{(1)} \chi_-^{(2)}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\chi_-^{(1)} \chi_+^{(2)} + \chi_+^{(1)} \chi_-^{(2)}}{\sqrt{2}} \chi_+ \end{aligned}$$

Şimdi bu S_- 'yi uygulayalım!

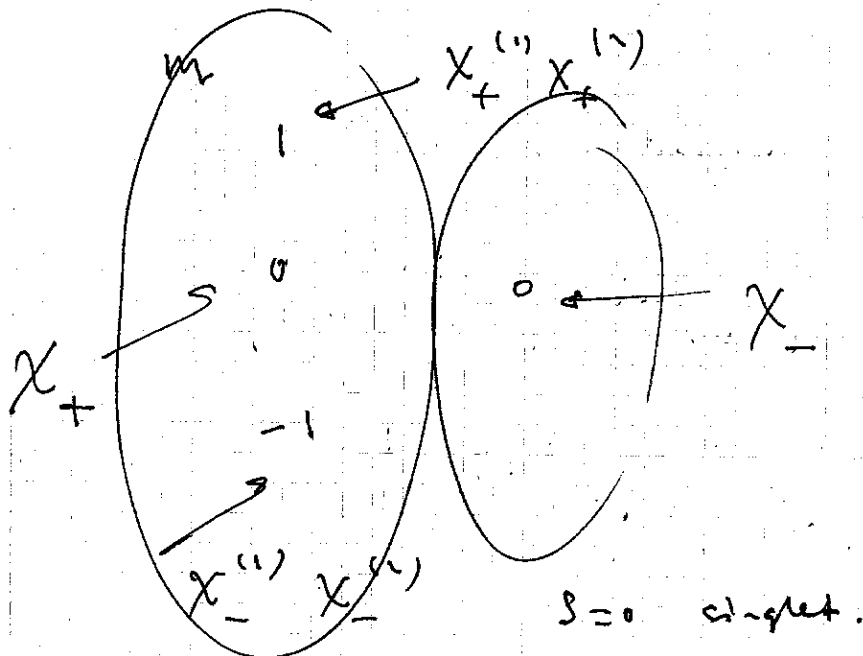
$$\begin{aligned} S_- \frac{\chi_-^{(1)} \chi_+^{(2)} + \chi_+^{(1)} \chi_-^{(2)}}{\sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_-^{(1)} \chi_-^{(2)} + \chi_-^{(1)} \chi_-^{(2)}) \\ &= \sqrt{2} \chi_-^{(1)} \chi_-^{(2)} \end{aligned}$$

bu ortogonal haller durum da,

4

$$\chi_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_+^{(1)} \chi_-^{(2)} - \chi_-^{(1)} \chi_+^{(2)})$$

ditambah selanjutnya.



$S=1$ triplet

Simak $\vec{S}^2$ selanjutnya

$$\begin{aligned} \vec{S}^2 &= (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 = \vec{S}_1^2 + \vec{S}_2^2 + 2 \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \\ &= \vec{S}_1^2 + \vec{S}_2^2 + 2 (\underbrace{S_{1x} S_{2x} + S_{1y} S_{2y} + S_{1z} S_{2z}}_{\frac{S_{1+} S_{2-} + S_{1-} S_{2+}}{2}}) \end{aligned}$$

$$= \vec{S}_1^2 + \vec{S}_2^2 + 2 S_{1z} S_{2z} + \frac{S_{1+} S_{2-} + S_{1-} S_{2+}}{2}$$

→ kemudian selanjutnya

Herşeyden önce şunları biliyoruz.

$$\begin{aligned} \rightarrow \vec{S}_1^2 X_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(X_{-}^{(2)} \underbrace{S_1^2 X_{+}^{(1)}}_{\frac{3}{4} \hbar^2 X_{+}^{(1)}} \pm X_{+}^{(2)} \underbrace{S_1^2 X_{-}^{(1)}}_{\frac{3}{4} \hbar^2 X_{-}^{(1)}} \right) \\ &= \frac{3}{4} \hbar^2 X_{\pm} \end{aligned}$$

Aynı şekilde

$$\rightarrow \vec{S}_2^2 X_{\pm} = \frac{3}{4} \hbar^2 X_{\pm}$$

Ve daha

$$\begin{aligned} \rightarrow 2 S_{12} S_{2+} X_{\pm} &= 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\underbrace{\left(S_{12} X_{+}^{(1)} \right)}_{\frac{1}{2} \hbar X_{+}^{(1)}} \underbrace{\left(S_{22} X_{-}^{(2)} \right)}_{-\frac{1}{2} \hbar X_{-}^{(2)}} \right. \\ &\quad \left. \pm \left(S_{12} X_{-}^{(1)} \right) \left(S_{22} X_{+}^{(2)} \right) \right] \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \hbar^2 X_{\pm} = -\frac{1}{2} \hbar^2 X_{\pm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (S_{1+} S_{2-} + S_{1-} S_{2+}) X_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(S_{1+} X_{+}^{(1)} \right) \left(S_{2-} X_{-}^{(2)} \right) \right. \\ &\quad \left. \pm \left(S_{1+} X_{-}^{(1)} \right) \left(S_{2-} X_{+}^{(2)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(S_{1-} X_{+}^{(1)} \right) \left(S_{2+} X_{-}^{(2)} \right) \right. \\ &\quad \left. \pm \left(S_{1-} X_{-}^{(1)} \right) \left(S_{2+} X_{+}^{(2)} \right) \right] \\ &= \pm \hbar^2 X_{\pm} \end{aligned}$$

Polayın ru $\vec{S}^2 X_{\pm} = \hbar^2 \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \pm 1 \right) X_{\pm}$

$$= \hbar^2 (1 \pm 1) X_{\pm}$$

$$= \hbar^2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} X_{\pm}$$

$$= \hbar^2 S(S+1) X_{\pm}$$

$$S = 1, 0$$

$$S_1^2, S_{1z}$$

$$S_2^2, S_{2z}$$

CSO

$$\vec{S}^2, S_z, \vec{S}_1^2, \vec{S}_2^2$$

iki elektron arasında

$$V(r) = V_1(r) + \frac{1}{\hbar^2} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 V_2(r)$$

spine bağırlı bir potansiyel var ise

S_{1z} ve S_{2z} komuta sındır
olmaz

İki de otokommutatör olmalı
ayrılır.

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2} (\vec{S}^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2)$$

$$\neq V(r) = V_1(r) + \frac{1}{2} V_2(r) \left[S(S+1) - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right] \hbar^2$$

$$= V_1(r) + \frac{1}{2} V_2(r) \left[S(S+1) - \frac{3}{2} \right] \hbar^2$$

$$= V_1(r) + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} V_2(r) \quad \begin{cases} S=1 \\ S=0 \end{cases}$$

başlı
duru
döğüs-

başlı. durum

nötron-proton

Törünge ağısal mom. ve spin 1/2 'nin toplamı

$$[\vec{L}, \vec{S}] = 0$$

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad \text{top. ağısal mom.}$$

$$\rightarrow J_z = L_z + S_z$$

$$\text{ve} \quad \vec{J}^2 = \vec{L}^2 + \vec{S}^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S}$$

$$= \vec{L}^2 + \vec{S}^2 + 2L_z S_z + L_+ S_- + L_- S_+$$

op. lerin özdeğerlerini bulunca J_{top} ve $X_{\pm}$ lar

bu şekilde yazılır.

$$\begin{aligned}
 \hat{J}^2 \phi_{j, m+1/2} &= \alpha \hbar^2 \left\{ \ell(\ell+1) \gamma_{\ell m} X_+ + \frac{3}{4} \gamma_{\ell m} X_+ \right. \\
 &+ 2m \frac{1}{2} \gamma_{\ell m} X_+ + \left[(\ell-m)(\ell+m+1) \right]^{1/2} \gamma_{\ell, m+1} X_- \left. \right\} \\
 &+ \beta \hbar^2 \left\{ \ell(\ell+1) \gamma_{\ell, m+1} X_- + \frac{3}{4} \gamma_{\ell, m+1} X_- \right. \\
 &+ 2m \left(-\frac{1}{2} \right) \gamma_{\ell, m+1} X_- + \left[(\ell-m)(\ell+m+1) \right]^{1/2} \gamma_{\ell m} X_+ \left. \right\}
 \end{aligned}$$

$$= \hbar^2 j(j+1) \phi_{j, m+1/2}$$

$$= \hbar^2 j(j+1) (\alpha \gamma_{\ell m} X_+ + \beta X_- \gamma_{\ell, m+1})$$

$$\Rightarrow \alpha \left[\ell(\ell+1) + \frac{3}{4} + m \right] + \beta \left[(\ell-m)(\ell+m+1) \right]^{1/2} = j(j+1) \alpha$$

$$\beta \left[\ell(\ell+1) + \frac{3}{4} - m - 1 \right] + \alpha \left[(\ell-m)(\ell+m+1) \right]^{1/2} = j(j+1) \beta$$

$$\beta \left[(\ell-m)(\ell+m+1) \right]^{1/2} = \alpha \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} - m \right]$$

$$\alpha \left[(\ell-m)(\ell+m+1) \right]^{1/2} = \beta \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} + m + 1 \right]$$

$$= \cancel{[(\ell-m)(\ell+m+1)]^{1/2}}$$

(10)

$$(l-m)(l+m+1) = \overbrace{\left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} - m \right]}^a$$

$$\times \underbrace{\left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} + m + 1 \right]}_a$$

$$a = j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} = \begin{cases} -l-1 \\ l \end{cases}$$

$$j = \begin{cases} l-1/2 \\ l+1/2 \end{cases}$$

$$j = 1/2 + l \quad \text{if } l$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}} \quad \beta = \sqrt{\frac{l-m}{2l+1}}$$

$$\psi_{l+1/2, m+1/2} = \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}} \gamma_{lm} X_+ + \sqrt{\frac{l-m}{2l+1}} \gamma_{lm+1} X_-$$

$$\psi_{l-1/2, m+1/2} = \sqrt{\frac{l-m}{2l+1}} \gamma_{lm} X_+ + \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}} \gamma_{lm+1} X_-$$

ACISAL MOMENTUMLARIN TOPLANMASI İÇİN GENEL KURALLAR

$$\begin{aligned} \vec{L}_1, L_{1z} &\longrightarrow Y_{l_1 m_1}^{(1)} \\ \vec{L}_2, L_{2z} &\longrightarrow Y_{l_2 m_2}^{(2)} \end{aligned}$$

Özdeğerlerini biliyoruz o halde $(2l_1+1)(2l_2+1)$ tane karşılıklı
dalga fonk.'u bulunabiliriz.

$$Y_{l_1 m_1}, Y_{l_2 m_2} \quad \left\{ \begin{array}{l} -l_1 \leq m_1 \leq l_1 \\ -l_2 \leq m_2 \leq l_2 \end{array} \right.$$

$$\vec{J} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

Op. leri özdeğerleriyle sınıflandırılabilir. Bu sınıflara
 $m_1 + m_2$ 'dır.

$$-l_1 - l_2 \leq m_1 + m_2 \leq +l_1 + l_2$$

En yüksek m değeri

Diyelim

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 Y_{l_1 l_1}^{(1)} Y_{l_2 l_2}^{(2)} &= (\vec{L}_1^2 + \vec{L}_2^2 + 2\vec{L}_1 \cdot \vec{L}_2 + L_{1z} L_{2z} + L_{1z} L_{2z} + L_{1z} L_{2z}) Y_{l_1 l_1}^{(1)} Y_{l_2 l_2}^{(2)} \\ &= \hbar^2 [(l_1+1)l_1 + l_2(l_2+1) + 2l_1 l_2] Y_{l_1 l_1}^{(1)} Y_{l_2 l_2}^{(2)} \\ &= \hbar^2 (l_1 + l_2)(l_1 + l_2 + 1) Y_{l_1 l_1}^{(1)} Y_{l_2 l_2}^{(2)} \end{aligned}$$

(a) j 'nın olasılığı değeri

$$j = l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 1, l_1 + l_2 - 2, \dots, |l_1 - l_2|$$

$$(b) \quad \psi_{jm} = \sum_{m_1, m_2} C(jm; l_1 m_1, l_2 m_2) T_{l_1 m_1}^{(1)} T_{l_2 m_2}^{(1)}$$

