

ZAMAN BAĞIMLI PERTÜRBASYON TEORİSİ

problem :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = [H_0 + \lambda V(t)] \psi(t)$$

denk. 'ini sağlayan $\psi(t)$ için

$$H = H_0 + \lambda V(t)$$

verildiğinde (ki burada $V(t)$ zaman bağımlı "küçük" bir pertürbasyon) ;

$t=0$ da bu Hamiltonien ile tasvir edilen sistem H_0 'ın

$$H_0 \phi_n = E_n^0 \phi_n$$

ϕ_n^i durumunda ise, $t > 0$ anda H_0 'ın ϕ_n^f özdeviminde bulunmasının olasılığı nedir ?

$V(t)=0$ olduğunda $e^{-iE_n^0 t/\hbar} \phi_n$ sistemi tanımlar. 0 zaman herhangi bir $\psi(t)$ 'yi bu ortogonal baz cinsinden,

$$\psi(t) = \sum_n C_n(t) e^{-iE_n^0 t/\hbar} \phi_n$$

$$V(t)=0 \Rightarrow C_n(t) \rightarrow \text{slr.}$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \left(\sum_n C_n(t) e^{-iE_n^0 t/\hbar} \phi_n \right) = [H_0 + \lambda V(t)] \sum_n C_n(t) e^{-iE_n^0 t/\hbar} \phi_n$$

$$\text{BS K} \sum_n \left[i\hbar \frac{dC_n(t)}{dt} + E_n^0 C_n(t) \right] e^{-iE_n^0 t/\hbar} \phi_n$$

2

$$\Rightarrow i\hbar \sum_n \dot{C}_n(t) e^{-i\epsilon_n^0 t/\hbar} \phi_n = \lambda \sum_n V(t) C_n(t) e^{-i\epsilon_n^0 t/\hbar} \phi_n$$

↪ $\langle \phi_m |$ ile çarp $\langle \phi_m | \phi_n \rangle = \delta_{mn}$ 'yi kullan

$$i\hbar \dot{C}_m(t) = \lambda \sum_n C_n(t) e^{i(\epsilon_m^0 - \epsilon_n^0)t/\hbar} \langle \phi_m | V(t) | \phi_n \rangle$$

(zaman bağımlı Schrödinger denk. 'i)

Pertürbatif çözüm:

$$H = H_0 + \lambda V(t)$$

$$C_n(t) = C_n^0 + \lambda C_n^{(1)} + \lambda^2 C_n^{(2)} + \dots$$

$$t=0 \text{ da } C_n(t=0) = C_n^0 \quad (\lambda=0)$$

$$\psi(0) = \phi_k \text{ olsun.}$$

0. merteye denk $\dot{C}_n^0 = 0$ ($C_n^0 = \delta_{nk}$ olsun $\psi(0) = \phi_k$ den)

1. " "

$$\dot{C}_n^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \sum_n \overbrace{C_n^{(0)}(t)}^{\delta_{nk}} e^{i\omega_{mn}t} \langle \phi_m | V(t) | \phi_n \rangle$$

2. " "

$$\dot{C}_n^{(2)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \sum_n C_n^{(1)}(t) e^{i\omega_{mn}t} \langle \phi_m | V(t) | \phi_n \rangle$$

$$\Rightarrow \dot{C}_k^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} e^{i\omega_{mk}t} \langle \phi_m | V(t) | \phi_k \rangle$$

$$C_k^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' e^{i\omega_{mk}t'} \langle \phi_m | V(t') | \phi_k \rangle$$

↑
 $|C_k^{(1)}(t)|^2$ bir t zaman sonra, $\psi(t)$ H_0 'in E_k

özdeğerli bir özdenkleme enerjisi ölçme olasılığı.

Örnek : taban durumdaki H atomu $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-t^2/\tau^2}$

elektirik alanına maruz kalıyor. Uzunca bir zaman sonra ($t \gg \tau$) H atomunun $n=2, l=1, m=0$ durumunda bulunma olasılığı nedir?

$$\begin{aligned} \lambda V(t) &= e \vec{E} \cdot \vec{r} = e E_0 r \cos\theta e^{-t^2/\tau^2} \\ &= e E_0 z e^{-t^2/\tau^2} \end{aligned}$$

$$C_{210}(\infty) = \frac{1}{i\hbar} e E_0 \langle \phi_{210} | z | \phi_{100} \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{i(E_{210} - E_{100})t'/\hbar} e^{-t'^2/\tau^2}$$

(42m)

$$E_n = -\frac{1}{2} m c^2 \frac{(Z\alpha)^2}{n^2} \quad \text{hoy tam kare yap.}$$

$$= \frac{e E_0}{i\hbar} \langle \phi_{210} | z | \phi_{100} \rangle \tau \sqrt{\pi} e^{-\omega \tau^2/4}$$

$$\text{BS K} \mathcal{P} = \frac{e^2 E_0^2 \tau^2 \pi}{\hbar^2} |\langle \phi_{210} | z | \phi_{100} \rangle|^2 e^{-\omega \tau^2/2}$$

4

Elektrik alan yavaşca açılır ve değiştirilirdir $P \rightarrow 0$ olur.
atom kendisini elektrik alanı varlığına adapte ettiler
olarak açıklar.

Örnek H. Salmer. aynı elektrik alanı kullanıyor olan.

$$H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

$$C_n'(\omega) = \frac{1}{i\hbar} e E_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \langle n | x | 0 \rangle e^{-t^2/\tau^2} e^{i\omega t} dt$$

$\sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}} (a + a^\dagger)$

$$\langle n | a + a^\dagger | 0 \rangle = \delta_{n0} \quad 0 \rightarrow 1 \text{ geçişini izli}$$

$$\begin{aligned} \text{Örnek } C_1(\omega) &= \frac{e E_0}{i\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/\tau^2 + i\omega t} dt \\ &= \frac{e E_0}{i\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}} e^{-\omega^2 \tau^2 / 4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t'^2/\tau^2} dt' \\ &\quad \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t'^2/\tau^2} dt'}_{\sqrt{\pi} \tau^2} \end{aligned}$$

$$P | 1,0 \rangle \rightarrow | 1,1 \rangle = \frac{e^2 E_0^2 \pi \tau^2}{2\mu\omega\hbar} e^{-\omega^2 \tau^2 / 2}$$

Potansiyeli, harmonik zaman - değişimi

(periyodik pertürbasyon)

$$V(t) = V(0) e^{-i\omega t} + V^{\dagger}(0) e^{i\omega t} \text{ olsun.}$$

$$C_m^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' e^{i\omega_{mk}t'} \left[e^{-i\omega t'} \langle \phi_m | V | \phi_k \rangle + e^{i\omega t'} \langle \phi_m | V^{\dagger} | \phi_k \rangle \right]$$

($t \rightarrow \infty$)

$$\int_0^t dt' e^{i(\omega_{mk} - \omega)t'} = \frac{e^{i(\omega_{mk} - \omega)t} - 1}{i(\omega_{mk} - \omega)}$$

$$= e^{i(\omega_{mk} - \omega)t/2} \frac{\sin(\omega_{mk} - \omega)t/2}{(\omega_{mk} - \omega)/2}$$

2. integral'de $\omega \rightarrow -\omega$. Tertah koneri alunca,

$$e^{i(\omega_{mk} - \omega)t/2} \frac{\sin(\omega_{mk} - \omega)t/2}{(\omega_{mk} - \omega)/2} \langle \phi_m | V | \phi_k \rangle$$

$$+ e^{i(\omega_{mk} + \omega)t/2} \frac{\sin(\omega_{mk} + \omega)t/2}{(\omega_{mk} + \omega)/2} \langle \phi_m | V^{\dagger} | \phi_k \rangle$$

$\omega = \pm \omega_{mk}$ da (rezonans)

$$\left[\frac{\sin((\omega_{mh} - \omega)t/2)}{(\omega_{mh} - \omega)/2} \right]^2 |\langle \phi_m | V | \phi_h \rangle|^2$$

↑
 $t \rightarrow \infty$ ve sığır terimleri.

sığır terimleri : prob. larda gösterilecek

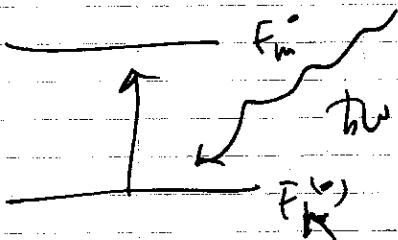
Riemann - Lebesgue lemma' sine göre $t \rightarrow \infty$ iten,

$t^4 \sin \omega t$ ve $t^4 \cos \omega t$ t 'in her kuvvetinde daha
 hızlı sığır gider.

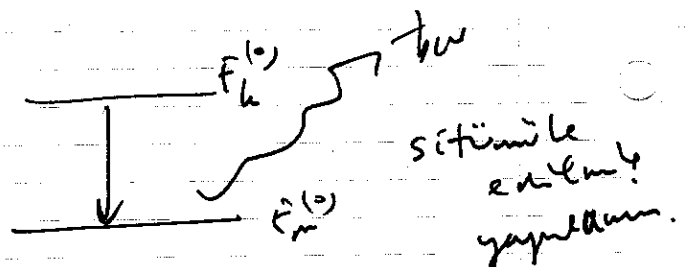
$$\Delta = \frac{E_m^0 - E_h^0 + \hbar \omega}{\hbar}$$

$\omega_{mh} \approx \omega$ 1. terim dominant

$$E_m^0 = E_h^0 + \hbar \omega \quad \text{radyatif soğuma}$$



$$\omega_{mh} \approx \omega \quad E_m^{(1,0)} = E_h^{(1,0)} - \hbar \omega$$



Breitwinkler

$$F(t) = \frac{4}{\Delta^2} \sin^2 \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\Delta) \frac{4}{\Delta^2} \sin^2 \frac{\Delta t}{2} d\Delta \approx f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta \frac{4}{\Delta^2} \sin^2 \frac{\Delta t}{2}$$

$$= 2\pi f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{1}{y^2} \sin^2 y = 2\pi f(0)$$

$$\frac{4}{\Delta^2} \sin^2 \frac{\Delta t}{2} \rightarrow 2\pi \delta(\Delta)$$

$$= 2\pi \frac{1}{\hbar} \delta(E_m - E_n - \hbar\omega)$$

gleiches Ergebnis zumeist erhalten

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T P_{m \rightarrow n}(t) dt$$

gleiches aus: $\omega_{mh} = \frac{P_{m \rightarrow h}}{T}$

$$T = 1/\omega = \text{ganze Summe}$$

$$P_{k \rightarrow m} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \phi_m | V | \phi_k \rangle|^2 \delta(E_m^{(0)} - E_k^{(0)} - \hbar\omega)$$

$$BS \quad K + \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \phi_m | V^\dagger | \phi_k \rangle|^2 \delta(E_m^{(0)} - E_k^{(0)} + \hbar\omega)$$

8

Ani pertürbasyon:

$\pi(t)$ 'nin t ziri küçük bir zaman diliminde çok hızlı değiştiğini varsayalım. $\epsilon \rightarrow 0$ ileen durum vektöründeki değişim nedir?

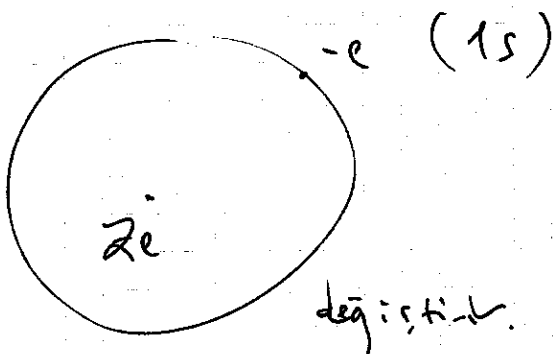
$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi(t) = \pi(t) \psi(t)$$

- $\epsilon/2$ den $+\epsilon/2$ ya integrasyon

$$\psi(\epsilon/2) - \psi(-\epsilon/2) = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\epsilon/2}^{+\epsilon/2} \pi(t) \psi(t) dt$$

$$\psi(t)|_{\text{sonra}} = \psi(t)|_{\text{önce}}$$

Örnek:



1s elektronu $Z=1$ çekim kuvvetine bağlıdır. Çekim kuvvetiyle bir elektron yaklaşarak β bozunumu yapar ve $(Z+1)$ 'e yollar.

Yayınlanan elektronun $n=1$ tabakasına düşme zamanı

$$\tau \approx \frac{a_0}{Zc}$$

$$\langle x|i \rangle = \psi_{si}(x) = N e^{-Zr/a_0}$$

$$\langle x|f \rangle = \psi_{sf}(x) = N' e^{-(Z+1)r/a_0}$$

$$\langle f|i \rangle = 4\pi \int_0^\infty N N' r^2 dr e^{-Zr/a_0} e^{-(Z+1)r/a_0}$$

1s elektron ilet karakteristik zaman

$$T \approx \frac{\text{Mومن بؤیüklüğü}}{e^- \text{ 'nın hızı}} = \frac{a_0}{Z} / Z \alpha c = \frac{a_0}{Z^2 \alpha c}$$

$$\frac{\tau}{T} = Z \alpha = \frac{Z}{137}$$

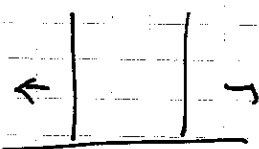
Adyabatik pertürbasyon:

$H(t)$, $H(0)$ 'dan $H(\tau)$ ya çok yavaş bir şekilde değişir. Sistem $t=0$ da $H(0)$ 'ın $|n(0)\rangle$ öz durumu $H(t)$ ile taşınır edilen)

ile bağlar $H(\tau)$ 'ın $|n(\tau)\rangle$ bu durum ile sonlanır. İse $H(t)$ 'ın değişim oranı çok küçük olmak kaydı ile)

Örnek:

$L(0)$ uzunluğunda bir boyutlu kutu. Kutu yavaşca $L(\tau) > L(0)$ uzunluğuna genişler ise, yavaşca



($t=0$ da $|n\rangle$ durumunda olan) yine $|n\rangle$

BS K $|n\rangle \sim +L/2$ durumunda olacaktır. ($n=1$ olsun!)
(Kutu simetrik)

$$\psi_1(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{L(0)}} \cos \frac{\pi x}{L(0)} = \psi_{ilk}$$

$$\psi_1(x, \tau) = \sqrt{\frac{2}{L(\tau)}} \cos \frac{\pi x}{L(\tau)} = \psi_{en}$$

$$\text{Geçiş Genliği} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi_{en}(x) \psi_{ilk}(x)$$

$$\text{paracığın momentumu} = p \approx \frac{h}{L} \quad (\text{De Broglie İleri})$$

tanımlı osilasyon temelinde ilk geçiş zamanı

$$T = \frac{L}{v} = \frac{mL}{p} = \frac{mL}{h/L} \approx \frac{mL^2}{h}$$

$$\frac{|\Delta L| \text{ den dolayı}}{L} \approx \frac{|dL/dt| mL^2/h}{L} = \frac{mL}{h} \left| \frac{dL}{dt} \right| \ll 1$$

Örnek

Hammer solmuş

$$\psi_1(x) = -eE \times e^{-t^2/\tau^2} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

τ büyükl. $\psi(-\infty) = \psi_0$ ve taban deniminden başlasak.

$\psi(\infty) = \psi(-\infty) = \psi_0$ ($t = \infty$ dedi) taban deniminde
yine aynı şekilde yazılıyor

$$|C_1(\infty)|^2 = \frac{e^{-\epsilon}}{2\pi\hbar\omega} e^{-\omega\tau^2/2} \pi\tau^2 \rightarrow 0 \quad (\tau \neq 0)$$

BS K₂ >> 1 $\tau \gg 1/\omega$