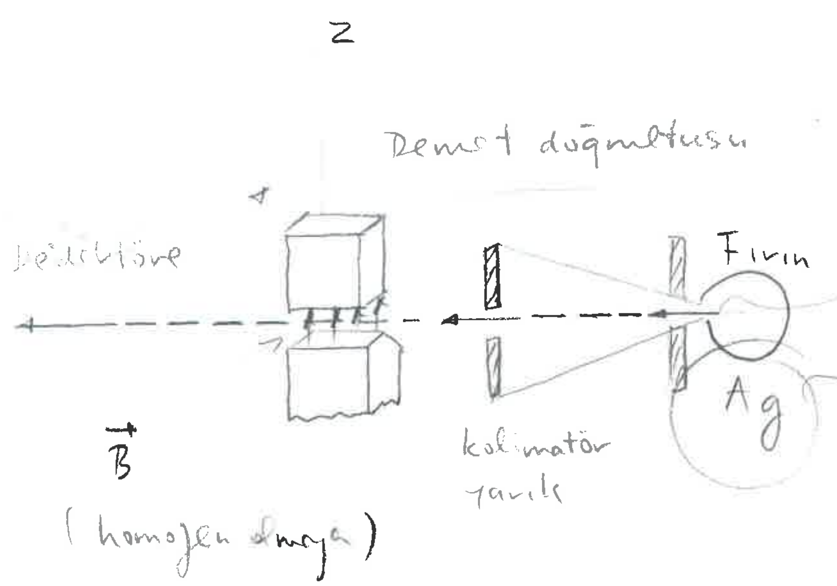
1.1. Stern-Gerlach Deneyi :

Bu kesimde konsantre olacağımız deney, orijinal olarak ilk 1921'de O. Stern tarafından tasarlanmış ve 1922'de Frankfurt'ta W. Gerlach ile işbirliğinin sonucunda gerçekleştirilmiştir. Deney dramatik bir şekilde klasik mekaniksel kavramlardan radikal bir ayrımın gerekliliğini sergiler. İlerleyen kesimlerde, kuantum mekaniğinin temel formalizmi aksiyomatik bir şekilde ama daima aklımızda SG deneyi ile sunulacaktır.

Deneyin tarifi :



Fırın Ag atomlarının kaçabileceği küçük bir deliğe sahiptir.

Ag → çekirdek + 47 elektron

46'sı net açısal momentumsuz küresel simetrik bir elektron bulutu ($\ell = 0$)

— Nükleer spin ihmal edilirse, Ag atomunun sadece, yörünge ile karşılaştırıldığında (47. elektronun 5s açısal mom.) iç (intrinsik) açısal – spin'den dolayı bir açısal momentuma sahip olduğunu düşünelim.

47 elektron, elektrondan $\sim 2.10^5$ kere daha ağır bir çekirdeğe iliştirilmiştir; sonuç olarak, bir bütün olarak ağır atom 47. elektronun spin magnetik momentine eşit bir magnetik mom. taşır. Başka bir deyişle, atomun μ mag. mom.'i $\vec{S}$ elektron spini ile orantılıdır.

$$\vec{\mu} \propto \vec{S},$$

% 0.2 kesinlikle orantılılık çarpanı $e/m_e c$ $(e<0)$'ye eşittir. Mag. mom.'in $\vec{B}$ ile etkileşme enerjisi

$$-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

dir, atom tarafından görülen kuvvetin z-bileşeni

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) \simeq \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

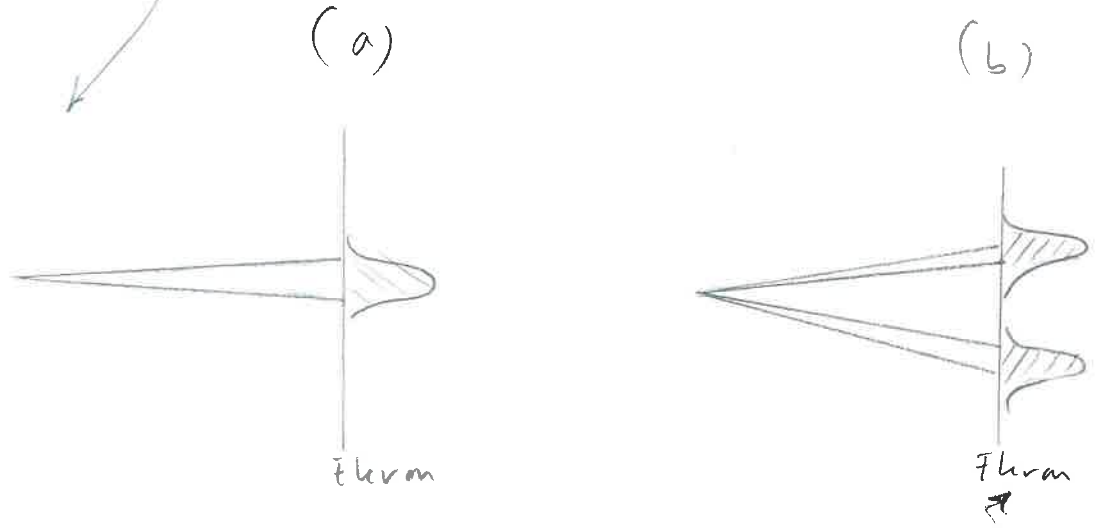
z'nin haricindeki $\vec{B}$'nin diğer bileşenleri ihmal edilmiştir.

- $\mu_z < 0$ $(S_z > 0)$ atom yukarı doğru bir kuvvet görür iken
$\mu_z > 0$ $(S_z < 0)$ " aşağı " " " ".

Demetin μ_z'nin değerlerine göre yarılacağını bekleriz. Diğer bir deyişle, SG aygıtı $\vec{\mu}$'nin z-bileşenini, ya da eşdeğer olarak bir orantılılık çarpanı kadar $\vec{S}$'nin z-bileşenini ölçer.

Fırındaki atomlar rastgele yöneldiğinden, $\vec{\mu}$'nün yönelimi için tercihli bir doğrultu yoktur. Elektron spin yapan klasik bir nesne olsa idi, μ_z'nin tüm değerlerinin $|\mu|$ ile $-|\mu|$ arasında bulunmasını beklerdik.

Bu da bizi şekilde gösterildiği gibi SG aygıtından çıkan demetin sürekli bir lifinini beklememize yol açar idi.



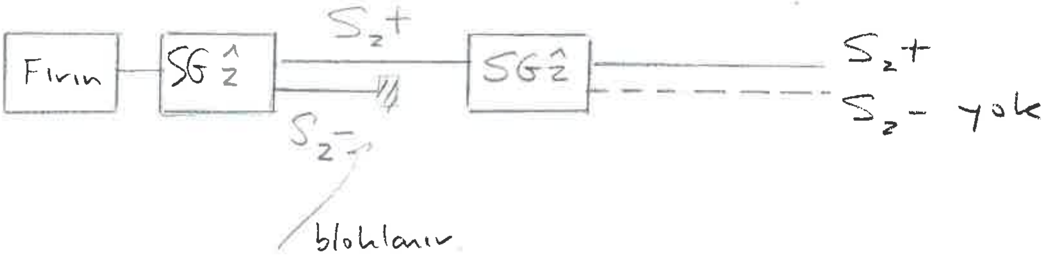
Bunun yerine, deneysel olarak gözlenen ✓. Diğer bir deyişle SG aygıtı, fırından çıkan gümüş demetini iki ayrı bileşene ayırır (uzay kuantizasyonu). $\vec{\mu}$, $\vec{S}$ elektron spini ile bir orantılılık çarpanı kadar belirlenebildiğine göre, $\vec{S}$'nin z-bileşenini sadece mümkün 2 değerini gözlemek mümkün olabilecektir. (S_z yukarı ve S_z aşağı → S_z+ ve S_z- olarak adlandıracağız.) S_z'nin mümkün iki değeri açısal mom.'un katları kadardır, $S_z = \hbar/2$ ve $S_z = -\hbar/2$.

$$\hbar = 1.0546 \times 10^{-27} \text{ erg-s}$$
$$= 6.5822 \times 10^{-16} \text{ eV}\cdot\text{s}$$

Elektron spini açısal mom.'nun kuantizasyonu SG deneyinden çıkardığımız ilk önemli özelliktir.

Yukarı-aşağı ya da z-ekseni hakkında kutsal olan bir şey yoktur. (açıkla!)

Ardıl SG Deneyleri

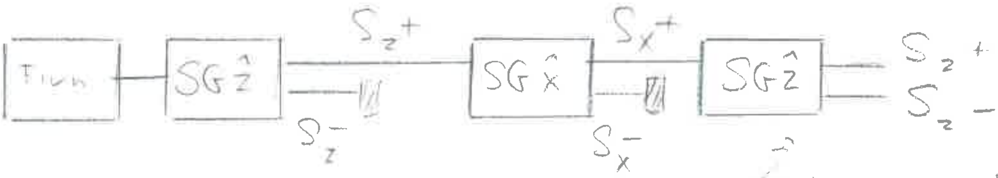


Sürpriz yok.

Ama,

eşit şiddette.

Bunu nasıl açıklarız? İlk aygıttan gelen S_z+ demetindeki atomların yarısı hem S_z+ ve hem de S_x+ ile karakterize edilen atomlardan oluşur iken diğer yarısı da S_z+ ve S_x- ile sahip atomlardan oluşuyor anlamına mı gelir?



Çıkan demet hem S_z+ ve hem de S_z-

S_z- 'nin 1. SG aygıtından sonra tamamen bloklandığını biliyoruz.

3. 'ye S_z+ ve S_x+ şeklinde girdikleri meçhul!

(*) S_z ve S_x 'i eş zamanlı belirleyemeyiz.

2. (SG $\hat{x}$) tarafından S_x+ 'nın seçimi S_z hakkındaki önceki bilgiyi tamamen bozar.

Bu durumun spin hareketi yapan topaç (klasik) ile kıyaslanarak açıklayıcı olabilir, $\vec{L} = I\vec{\omega}$

$\vec{L}$ açısal hız vektörü $\vec{\omega}$ 'nın bileşenleri belirlenerek ölçülebilir. Nesnenin hangi doğrultuda daha hızlı spin yaptığı gözlenerek ω_x, ω_y ve ω_z eş zamanlı olarak belirlenebilir. I, kütle ve geometrik şeklini biliyorsak hesaplanabilir, dolayısı ile, hem L_z ve hem de L_x eşzamanlı belirlemede bir zorluk yoktur.

S_z ve S_x 'i belirlemede karşılaştığımız sınırlamanın deneycilerin yetersizliğinden kaynaklanmadığı açık bir şekilde anlaşılmaktadır. Kısıtlama, mikroskobik olayın tabiatında vardır.

Işığın polarizasyonu ile benzetme.

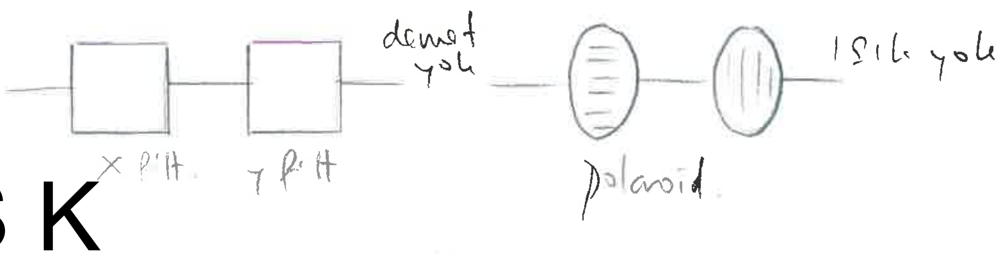
$\hat{z}$ doğrultusunda yayılan monokromatik bir ışık dalgası olsun. Kısaca x-polarize ışık olarak adlandıracağımız, x-doğrultusunda bir polarizasyon vektörü ile lineer olarak (ya da dairesel) kutuplanmış bir ışık

$$\vec{E} = E_0 \hat{x} \cos(kz - \omega t)$$

uzay-zaman bağımlı bir elekt. alanına sahip olacaktır. Aynı şekilde,

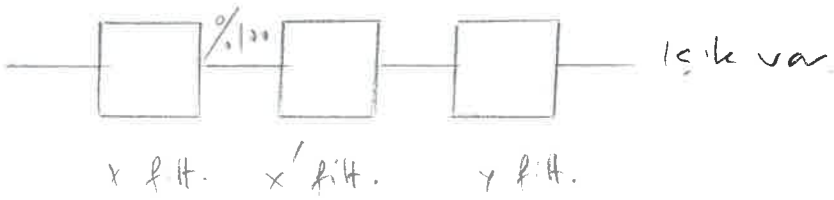
$$\vec{E} = E_0 \hat{y} \cos(kz - \omega t)$$

$\hat{y}$-polarize ışık da düşünebiliriz.



BS K

Durum, xy düzleminde x ekseni ile 45° açı yapan x' doğrultusu boyunca polarize demeti seçen diğer bir polaroidi iki filtrenin arasına koyduğumuzda daha ilginç olur.

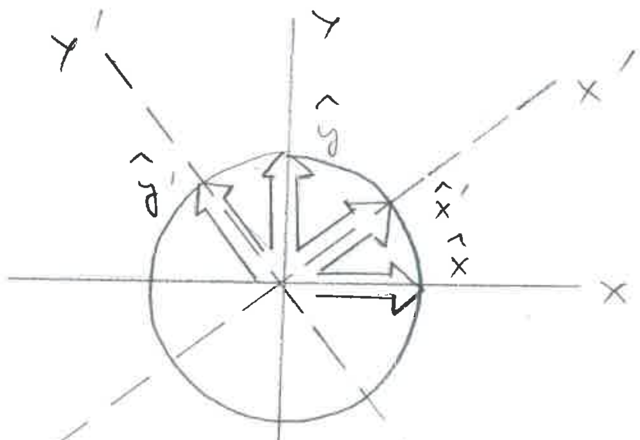


önceki bilgiyi (pol. hakkında) yok eder

SG ile benzer.

$S_z^{\pm}$ atomları $\longleftrightarrow$ x-, y- polarize ışık

$S_x^{\pm}$ " $\longleftrightarrow$ x'-, y'- " "



Açıklama:

$$E_0 \hat{x}' \cos(kz - wt) = E_0 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x} \cos(kz - wt) + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y} \cos(kz - wt) \right]$$

$$E_0 \hat{y}' \cos(kz - wt) = E_0 \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x} \cos(kz - wt) + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y} \cos(kz - wt) \right]$$

ilk polaroid'ten geçen (x filt) demet $\hat{x}'$ ve $\hat{y}'$ polarize demetlerin bir kombinasyonu olarak düşünülebilir.

2. polaroid sırası ile x ve y polarize demetin lineer bir kombinasyonu olan $\hat{x}'$ polarize demeti seçer. Son olarak, 3. polaroid y-polarize demeti seçer.

Anoloji, Ag atomu spin durumunu yeni bir cins vektör-uzayında bir cins vektör ile (2 boyutlu xy uzayı ile karıştırmamalı) temsil etmemiz gerekir. Aynı yukarıdaki gibi $\hat{x}$ ve $\hat{y}$ $\hat{x}'$-polarize ışığın $\hat{x}'$ pol. vektörünü ayırmak için kullanılan baz vektörleridir, $S_x +$'yı bir vektör ile temsil etmek mantıklıdır. (ki biz bunu Dirac notasyonunda ket "kez" olarak adlandıracağız) Bu vektörü $|S_x;+\rangle$ ile göstereceğiz ve $|S_z;+\rangle$ ile $|S_z;-\rangle$ baz vektörlerinin bir lineer komb olarak alınacaktır.

$$|S_x;+\rangle \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}|S_z;+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|S_z;-\rangle$$

$$|S_x;-\rangle \stackrel{?}{=} -\frac{1}{\sqrt{2}}|S_z;+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|S_z;-\rangle$$

(*)

? $S_y^{\pm}$ durumlarını nasıl temsil edeceğiz?

$\hat{x}$ doğrultusunda bir $S_z\pm$ demeti gözle ve bunu SG$\hat{y}$ aygıtına maruz bırakır isek, sonuç y-doğrultusunda bir $S_z\pm$ demeti SG$\hat{x}$ aygıtına maruz kaldığı durum ile özdeş olacaktır. Ama, buradan, $|S_x;\pm\rangle$ yazarak elde edilebilir olasılıkları tükettik.

? Bizim vektör-uzayı formalizmimiz $S_y\pm$ durumlarını $S_x\pm$ durumlarından ayırır.

Matematiksel olarak, dairesel pol. ışığı nasıl temsil ederiz?

Sağ-dairesel pol. ışık, y-polarize bileşen için elektrik alanın osilasyonunun x-pol. bileşenikinden 90° faz geçtiği, x ve y polarize ışığın lineer kombinasyonundan başka bir şey değildir.

$$\vec{E} = E_0 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x} \cos(kz - wt) + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y} \cos(kz - wt) \right]$$

$Re(\vec{\epsilon}) = \vec{E} / E_0$ kompl. not.

sağ dairesel pol. ışık : $\vec{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x} e^{i(kz - wt)} + \frac{i\hat{y}}{\sqrt{2}} e^{i(kz - wt)}$

$i = e^{i\pi/2}$ kullanıldı.

<u>analoji</u>;

S_y+ atomu $\longleftrightarrow$ sağ dairesel pol. demet

S_y- " $\longrightarrow$ sol " " " .

Bu analojiyi buna uygulayarak, önceki temel ket'lerin (katsayıların) kompleks olmasına izin verecek $S_y\pm$ atomların bu vektör uzayı formalizmin de ifade etmede güçlük yoktur.

$$|S_y;\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |S_z;+\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}} |S_z;-\rangle \quad (*) \text{'dan farklı!}$$

BS K

Böylece, Ag atomların spin durumlarını tarif etmek için ihtiyaç duyulan 2-boyutlu vektör uzayı kompleks vektör uzayı olmalı; vektör uzayındaki keyfi bir vektör $|S_z; \pm\rangle$ temel vektörlerin (genelde kompleks katsayılar ile) bir lineer kombinasyonu olarak yazılır.

Çalıştığımız analoji ket'ler "tez"ler (soyut vektör uzayındaki) arasında (ki bunlar klasik EM alanın pol. vektörleri ile ayrı ayrı atomların spin durumları tarif eder) bir analojidir.

1.2. Ket'ler, Bra'lar ve Operatörler (tez'ler, para'lar ve işlemciler)

Bu kitap boyunca notasyon P.A.M. Dirac tarafından geliştirilmiş olan bra ve ket (ya da para ve tez) notasyonudur.

Ket uzayı;

Boyutu fiziksel sistemin doğasına göre belirlenen kompleks bir vektör uzayı gözönüne alalım. QM'sel serbestlik derecesinin sadece atomun spini olduğu SG deneylerinde, boyutluluk SG aygıtına maruz kalındığında atomların izleyeceği alternatif yolların sayısı ile belirlenir; Ag için, bu sayı 2

Daha sonradan da görebileceğimiz gibi, bir parçacığın konum (koordinat) ya da momentumu gibi sürekli spektrumlu durumda _ki buradaki alternatifleri sayısı sonsuz'dur_ vektör uzayı Hilbert uzayı olarak bilinir.

$|\alpha\rangle$ (ket) fiziksel durum hakkında tam bilgi içerir

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\gamma\rangle \quad \text{toplanabilir.}$$

$$c \in \mathbb{C} \Rightarrow c|\alpha\rangle = |\alpha\rangle c = |\gamma\rangle$$

Eğer $c = 0 \Rightarrow \quad 0|\alpha\rangle = |0\rangle$ sıfır ket

$|\alpha\rangle$, $c|\alpha\rangle$ aynı fiziksel durumu temsil eder. Başka bir deyişle, vektör uzayında doğrultu önemlidir. Matematikçiler, vektörler'den ziyade ışınlar ile uğraşıyor olduğumuzu söylemeyi tercih ederler.

Bir gözlenebilir, $\underbrace{\text{(momentum ve spin bileşenleri gibi)}}_{A}$ bir operatör ile temsil edilir

$$A \cdot (|\alpha\rangle) = A|\alpha\rangle$$

Soldan etkir. Sonuç yine bir ket.

Genelde, $A|\alpha\rangle$ bir sabit kere $|\alpha\rangle$ değildir. Ancak; A operatörün özketleri olarak bilinen özel ket'ler,

$$|a'\rangle, |a''\rangle, |a'''\rangle, \ldots$$

BS K

$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle \,, \quad A|a''\rangle = a''|a''\rangle \,, \ldots$$

$\{a', a'', \ldots\} \longrightarrow \{a'\}$ A'nın <u>özdeğerleri</u>'dir.

$$\{a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots\} \longleftarrow \{a', a'', \ldots\}$$

Bir özket'e karşı gelen fiziksel durum bir <u>öz durum</u> olarak adlandırılır. Spin 1/2 sist. durumunda, özdeğer-özket ilişkisi

$$S_z|S_z;+\rangle = \frac{\hbar}{2}|S_z;+\rangle \qquad S_z|S_z;-\rangle = -\frac{\hbar}{2}|S_z;-\rangle$$

S_z'nin <u>özket</u>'leri

<u>Özdeğerleri</u>

Daha önceden, boyutluluğun alternatiflerin sayısı ile belirlendiğine dikkati çekmiştik. Formel olarak, N-boyutlu vektör uzayı A gözlenebilirinin N-özketi ile gerilir. Keyfi bir ket $|\alpha\rangle$

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} c_{a'}|a'\rangle$$

$$a', a'', \ldots, \longrightarrow a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(N)}$$

$$\in \mathbb{C}$$

BS K

Bra Uzayı ve iç çarpım:

ket uzayına dual

Her $|\alpha\rangle$ için $\langle\alpha|$ ile gösterilen bir bra vardır.

bra uzayı $\{\langle a'|\}$ özbra 'lar ile gerilir. Bu iki uzay arasında bire-bir karşı gelme vardır.

$$|\alpha\rangle \overset{DC}{\longleftrightarrow} \langle\alpha|$$

$$|a'\rangle, |a''\rangle, \dots \overset{DC}{\longleftrightarrow} \langle a'|, \langle a''|, \dots$$

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle \overset{DC}{\longleftrightarrow} \langle\alpha| + \langle\beta|$$

dual eşdeğerlik

bra uzayı ket uzayının bir ayna yansıması gibidir.

$c|\alpha\rangle$ ya dual bra $c^*\langle\alpha|$ 'dır ($c\langle\alpha|$ değil)

$$c_\alpha|\alpha\rangle + c_\beta|\beta\rangle \overset{DC}{\longleftrightarrow} c_\alpha^*\langle\alpha| + c_\beta^*\langle\beta|$$

iç çarpım:

1°) $\langle\beta|\alpha\rangle = (\langle\beta|) \cdot (|\alpha\rangle)$

(bra) c (ket) $\in \mathbb{C}$ genelde

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^*$$

komplex konjuge

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ ile analoji

dolayısıyla
$\langle\alpha|\alpha\rangle \in \mathbb{R}$

2°) $\langle\beta| \to \langle\alpha|$

$$\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0$$ (eşitlik 0 ket ise)

(pozitif belirli metrik) probabilistik yorum

3°) $|\alpha\rangle$ ve $|\beta\rangle$ ortogonal'dirler, eğer

$$\langle\alpha|\beta\rangle = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\langle\beta|\alpha\rangle = 0$$ da ima eder

Normalize ket $\quad |\tilde{\alpha}\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle}}\,|\alpha\rangle$

$$\langle\tilde{\alpha}|\tilde{\alpha}\rangle = 1$$

$|\alpha\rangle$'nın normu

$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ ile analoji

Operatörler;

$\{X, Y, \ldots\}$ genel sınıf $\quad \{A, B, \ldots\}$ özel (gözlenebilirler)

$$X\cdot(|\alpha\rangle) = X|\alpha\rangle$$

X ve Y eşit'tirler $\quad X = Y$ ise ve,

$X|\alpha\rangle = Y|\alpha\rangle$ ise

$X|\alpha\rangle = 0 \Rightarrow X$ sıfır (0) op.'ü denir.

toplanabilirlik:

$$X + Y = Y + X$$

$$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$$

zaman-terslenme op.'ü hariç bu kitaptaki op.'ların hepsi lineer'dir,

yani,

$$X\left(c_\alpha|\alpha\rangle + c_\beta|\beta\rangle\right) = c_\alpha X|\alpha\rangle + c_\beta X|\beta\rangle$$

Bir op. bra'ya sağ'dan etkir;

$(\langle\alpha|)\cdot X = \langle\alpha|X$ sonuç bra;

$X|\alpha\rangle$ ve $\langle\alpha|X$ dual değildirler

$$X|\alpha\rangle \overset{DC}{\longleftrightarrow} \langle\alpha|X^\dagger$$ Hermitsel adjoint

$X = X^\dagger \Rightarrow X$ Hermitsel

Çarpma: çarpma işlemi nonkomütatif'tir

$$XY \neq YX$$

asosyatiflik $X(YZ) = (XY)Z = XYZ$

$$X(Y|\alpha\rangle) = (XY)|\alpha\rangle = XY|\alpha\rangle$$

$$(\langle\beta|X)Y = \langle\beta|(XY) = \langle\beta|XY$$

$$(XY)^{\dagger} = Y^{\dagger}X^{\dagger}$$

Çünkü, $\quad XY|\alpha\rangle = X(Y|\alpha\rangle) \xleftrightarrow{DC} (\langle\alpha|Y^{\dagger})X^{\dagger}$

$$= \langle\alpha|Y^{\dagger}X^{\dagger}$$

Şimdiye kadar, $\langle\beta|\alpha\rangle$, $X|\alpha\rangle$, $\langle\alpha|X$ ve XY çarpımlarını gördük. Oluşturabileceğimiz diğer çarpımlar da varmıdır? $|\beta\rangle$ yı $\langle\alpha|$ ile çarpalım

$$(|\beta\rangle).(\langle\alpha|) = |\beta\rangle\langle\alpha|$$

operatör

dış çarpım

(✗) $|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$ ya işaret et.

Assosyatif Aksiyom:

Operatörler arasındaki çarpım işlemi assosyatif'tir. Gerçekte, assos. özellik ket'ler, bra'lar ve op.'lar arasında "legal" çarpımlarla uğraşıyor olduğumuzda geçerlidir. Dirac bu önemli postülayı çarpımın assosyatif aksiyomu olarak adlandırır

BS K

Bu aksiyomun gücünü göstermek için bir ket'e bir dış çarpımın etkisini inceleyelim:

1°)

$$\big(|\beta\rangle\langle\alpha|\big)\cdot|\gamma\rangle$$

assoc. aksiyom : $|\beta\rangle\cdot\big(\underbrace{\langle\alpha|\gamma\rangle}_{\text{sayı}}\big) \longrightarrow$ başka bir <u>ket</u>

diğer bir deyişle, bir op.; noktaları ihmal et

Ama $\big(\langle\alpha|\gamma\rangle\big)\cdot|\beta\rangle$ da aynı şeyi yapamayız.

$|\beta\rangle\langle\alpha|$, $|\gamma\rangle$ yı $|\beta\rangle$'nın doğrultusunda döndürür.

$$X = |\beta\rangle\langle\alpha|$$

$$X^{\dagger} = |\alpha\rangle\langle\beta|$$ bkz prb.

2°)

$$\underbrace{\big(\langle\beta|\big)}_{\text{bra}}\cdot\underbrace{\big(X|\alpha\rangle\big)}_{\text{ket}} = \underbrace{\big(\langle\beta|X\big)}_{\text{bra}}\cdot\underbrace{\big(|\alpha\rangle\big)}_{\text{ket}}$$

$\langle\beta|X|\alpha\rangle$ notasyonu

$\langle\alpha|X^{\dagger}$ bra <u>DC</u> $X|\alpha\rangle$

$$\langle\beta|X|\alpha\rangle = \langle\beta|\cdot\big(X|\alpha\rangle\big) = \big\{\big(\langle\alpha|X^{\dagger}\big)\cdot|\beta\rangle\big\}^{*}$$

$$= \langle\alpha|X^{\dagger}|\beta\rangle^{*}$$

X Hermitsel $\Rightarrow$ $\langle\beta|X|\alpha\rangle = \langle\alpha|X|\beta\rangle$

BS K

1.3. Temel Ket'ler ve Matris Temsilleri

Bir gözlenebilirin özketleri ;

Bir A Hermitsel op.'nün özket ve özdeğerlerini gözönüne alalım

Teorem : Bir A Hermitsel op.'nün özdeğerleri reeldir; farklı özdeğerlere karşı gelen A'nın özketleri ortogonaldirler.

İspat :

$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle$$

A Hermitsel $\Rightarrow$ $\langle a''|A = a''^{*}\langle a''|$

$\langle a''|$ $\qquad$ $|a'\rangle$ ile çarp

$$\langle a''|A|a'\rangle = a''^{*}\langle a''|a'\rangle$$

$$\langle a''|A|a'\rangle = a'\langle a''|a'\rangle$$

$$0 = (a' - a''^{*})\langle a''|a'\rangle$$ eşit ya da farklı olabilir

$a' = a'' \Rightarrow a' = a'^{*}$ teoremin yarısı

$$\Downarrow$$

$$(a' - a''^{*}) = (a' - a'') \neq 0$$

$$\Rightarrow \langle a''|a'\rangle = 0 \quad (a'' \neq a')$$

teoremin diğer yarısı

BS K

$\{|a'\rangle\}$'leri ortonormal bir küme oluşturacak şekilde $|a'\rangle$ yü normalize etmek gerekir.

$$\langle a''|a'\rangle = \delta_{a''a'}$$

Tartışırken şunu sorabiliriz. Özdurumların bu kümesi <u>tam</u> mıdır? Ket uzayının A'nın özketleri tarafından gerildiğini iddia ederek tartışmamıza başladığımızdan, A'nın özketleri ket uzayımızın inşaası ile bir tam küme oluşturmalıdır.

<u>Temel Ket'ler</u> olarak Özketler

A'nın özketleri'nin ortonormal bir küme oluşturduklarını henüz gördük. Ket uzayındaki keyfi bir ket A'nın özket'leri cinsinden açılabilir. Diğer bir deyişle, A'nın özketleri temel ket'ler olarak kullanılacaktır.

$$\underbrace{|\alpha\rangle}_{\text{keyfi}} = \sum_{a'} C_{a'} \underbrace{|a'\rangle}_{A'\text{nın}}$$

/ $\langle a''|$ ile çarp $\qquad C_{a'} = \langle a'|\alpha\rangle$

$$\Rightarrow \quad |\alpha\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle$$

$\mathbb{R}^3$: $\quad \vec{V} = \sum_i \hat{e}_i\,(\hat{e}_i\cdot\vec{V}) \qquad \{\hat{e}_i\}$ ortonormal bir küme

BS K

$|a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle \begin{cases} 1^\circ & \langle a'|\alpha\rangle \text{ sayısı kere } |a'\rangle \\ 2^\circ & |a'\rangle\langle a'| \text{ op.'nın } |\alpha\rangle\text{'ya etkisi} \end{cases}$

$|\alpha\rangle$ keyfi olduğundan $\sum_{a'} |a'\rangle\langle a'| = \mathbb{1}$

özdeşlik op.'ü

tamlık ya da kapanış bağıntısı olarak bilinir. İleri yine gizebilir. Örneğin, $\langle\alpha|\alpha\rangle$'yı ele alalım.

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\alpha| \cdot \left(\sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|\right) \cdot |\alpha\rangle$$

$$= \sum_{a'} |\underbrace{\langle a'|\alpha\rangle}_{c_{a'}}|^2$$

$|\alpha\rangle$ normalize $\Rightarrow$ $\sum_{a'} |c_{a'}|^2 = 1 = \sum_{a'} |\langle a'|\alpha\rangle|^2$

$|a'\rangle\langle a'|$ dış çarpım (bir op.)

$$(|a'\rangle\langle a'|) \cdot |\alpha\rangle = |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle = c_{a'} |a'\rangle$$

$|a'\rangle$'ye paralel $|\alpha\rangle$'nın bir kısmını seçer, böylece $|a'\rangle\langle a'|$, $|a'\rangle$ temel ket'i boyunca projeksiyon op.'ü olarak adlandırılır ve $\Lambda_{a'}$ ile gösterilir.

$$\Lambda_{a'} \equiv |a'\rangle\langle a'|$$

tamlık bağıntısı $\sum_{a'} \Lambda_{a'} = \mathbb{1}$.

BS K

Matris Temsilleri :

sütun

$$X = \sum_{a''}\sum_{a'} |a''\rangle\langle a''|X|a'\rangle\langle a'|$$

satır $\qquad$ N^2 kadar var (N ket uzayının boyutu)

$$X \underset{a}{\doteq} \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|X|a^{(1)}\rangle & \langle a^{(1)}|X|a^{(2)}\rangle & \cdots \\ \langle a^{(2)}|X|a^{(1)}\rangle & \langle a^{(2)}|X|a^{(2)}\rangle & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

$\langle a''|X|a'\rangle$

ile temsil edilir anlamında.

$$(1.2.38) \qquad \langle a''|X|a'\rangle = \langle a'|X^{\dagger}|a''\rangle^{*}$$

B Hermitsel $\Rightarrow$ $\langle a''|B|a'\rangle = \langle a'|B|a''\rangle^{*}$

$\langle a''|X|a'\rangle \rightarrow$ nü karesel bir matrise düzenlediğimiz için matris çarpımının bilinen kuralları ile uyumludur.

$$Z = XY$$

$$\langle a''|Z|a'\rangle = \langle a''|XY|a'\rangle = \sum_{a'''} \langle a''|X|a'''\rangle\langle a'''|Y|a'\rangle$$

özdeşlik op.'ü

BS K

$|\gamma\rangle = X|\alpha\rangle$ ket bağıntısının bizim temel ketlerimizi kullanarak nasıl temsil edilebilir, bunu inceleyelim.

$$\langle a'|\gamma\rangle = \langle a'|X|\alpha\rangle$$

$$= \sum_{a''} \underbrace{\langle a'|X|a''\rangle}_{\text{karesel bir mat.}} \underbrace{\langle a''|\alpha\rangle}$$

karesel bir mat. ile sütun mat.'nin çarpımı.

$$|\alpha\rangle \doteq \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|\alpha\rangle \\ \langle a^{(2)}|\alpha\rangle \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad |\gamma\rangle \doteq \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|\gamma\rangle \\ \langle a^{(2)}|\gamma\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\langle\gamma| = \langle\alpha|X$$

$$\langle\gamma|a'\rangle = \sum_{a''} \langle\alpha|X|a''\rangle\langle a''|a'\rangle$$

$\Rightarrow$ bir bra'da

$$\langle\gamma| = \left(\langle\gamma|a^{(1)}\rangle, \langle\gamma|a^{(2)}\rangle, \ldots \right)$$

$$= \left(\langle a^{(1)}|\gamma\rangle^*, \ldots \right)$$

satır matrisi ile temsil edilir.

$\langle\beta|\alpha\rangle$ iç çarpımı,

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \sum_{a'} \langle\beta|a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle$$

$$= \left(\langle a^{(1)}|\beta\rangle^*, \ldots \right) \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|\alpha\rangle \\ \langle a^{(2)}|\alpha\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Son olarak, dış çarpım,

$$|\beta\rangle\langle\alpha| \doteq \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|\beta\rangle\langle a^{(1)}|\alpha\rangle^* & \langle a^{(1)}|\beta\rangle\langle a^{(2)}|\alpha\rangle^* & \ldots \\ \langle a^{(2)}|\beta\rangle\langle a^{(1)}|\alpha\rangle^* & \langle a^{(2)}|\beta\rangle\langle a^{(2)}|\alpha\rangle & \ldots \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

A'nın özketlerinin kendileri temel ketler olarak kullanılırsa A gözlenebilirinin matris temsili özellikle basittir:

$$A = \sum_{a''}\sum_{a'} |a''\rangle\underbrace{\langle a''|A|a'\rangle}\langle a'|$$

$$= \langle a''|a'\rangle a' = a'\delta_{a'a''}$$

$$\Rightarrow \quad A = \sum_{a'} a'|a'\rangle\langle a'|$$

$$= \sum_{a'} a' \Lambda_{a'}$$

BS K

Spin 1/2 sistemler

temel ket'ler $|S_z ; \pm\rangle \longrightarrow |\pm\rangle$ ile gösterilecek.

$|\pm\rangle$ tarafından gerilen ket uzayındaki en basit op. $\mathbb{1}$ özdeşlik op.'dür.

$$\mathbb{1} = |+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|$$

(1.3.34)'e göre $S_z = (\hbar/2)\left[\, |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -| \,\right]$

özket - özdeğer bağıntısı

$$S_z |\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2} |\pm\rangle$$

$|\pm\rangle$'ların ortonormallik bağıntısından bulunur.

$$S_+ \equiv \hbar\, |+\rangle\langle -| \quad \text{ve} \quad S_- = \hbar\, |-\rangle\langle +|$$

op.lerine de bakmakta fayda vardır. (Hermitsel değiller)

$S_+ \rightarrow |+\rangle \rightarrow 0$

$S_+ \rightarrow |-\rangle$

Daha sonra $S_\pm = S_x \pm i S_y$ şeklinde olduğunu göreceğiz.

Açısal mom. op.'lerin matris temsillerinin inşaasında, kolon (satır)ları

Yani, ilk satır maks. açısal mom bileşenine 2. si ondan sonra en yüksek olmalı v.s.

$$|+\rangle \doteq \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad |-\rangle \doteq \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$S_z \doteq \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \quad S_+ \doteq \hbar\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \quad S_- \doteq \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

1.4. Ölçümler, Gözlenebilirler ve Belirsizlik Bağıntıları:

Ölçümler: P. A. M. Dirac "Bir ölçüm daima sistemi ölçülen dinamik değişkenin bir özdeğerine sıçramasına yol açar" Anlamı nedir? " A gözlenebilirinin bir ölçümü yapılmadan önce, sistemin

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} c_{a'}|a'\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle$$

lineer komb. ile temsil edilen durumda olduğu varsayılır. Ölçüm yapıldığında, sistem özdurumlardan birine "atılır", $|a'\rangle$ olsun.

$$|\alpha\rangle \xrightarrow{A \text{ ölçümü}} |a'\rangle$$

Örneğin, keyfi bir spin yönelimli Ag atomu $|S_z;+\rangle$ ya da $|S_z;-\rangle$ ye gidecektir. (SG$\hat{z}$ ye maruz kaldığında)

Böylece, ölçüm genellikle sistemin durumunu değiştirir.

Tek harici durum, gözlenebilirin özdurumlarından birinde olduğu zaman ki durumdur.

$$|a'\rangle \xrightarrow{A \text{ ölçümü}} |a'\rangle$$

$|\alpha\rangle \longrightarrow |a'\rangle$ değişiminde A'nın a' olarak ölçüldüğü söylenir.

$|\alpha\rangle = \sum_{a'} C_{a'} |a'\rangle$ fiziksel sist.'in durum keti, sist.'in ölçümün sonucu olarak $|a'\rangle$'nin hangi değerlerine atlayacağını bilmiyoruz. Bununla birlikte, $|a'\rangle$ ne atlamanın olasılığını postüle edebiliriz;

$$a' \text{ için olasılık} = |\langle a'|\alpha\rangle|^2$$

normalize olmak koşulu ile

Tek bir fiziksel sist. üzerinde konuşuyoruz, halbuki bir topluluk – tamamı aynı $|\alpha\rangle$ keti ile karakterize edilen, özdeş olarak hazırlanmış fiziksel sist.'in bir topluluğu – üzerinde çok sayıda ölçümü göz önüne almalıyız. Böyle bir topluluk <u>saf topluluk</u> olarak bilinir. S_z – bileşeni durdurulan Ag atomları, buna bir örnek. Çünkü topluluğun her üye atomu $|S_z;+\rangle$ ile karakterize edilir.

temel postülalardan biri, (ispatlanamaz!)

Ölçüm yapılmadan önce bile durum ket'inin $|a'\rangle$ olduğunu düşünelim; Olasılık yorumuna göre a' elde etmenin olasılığı beklenildiği gibi 1. A'yı tekrar ölçerek, tabii ki yine $|a'\rangle$ elde ederiz. <u>tekrarlanmış ölçümler aynı sonuca yol açarlar</u>. Başlangıçta $|a'\rangle$ ile karakterize edilen sistem için diğer bir $|a''\rangle$ özketine geçme olasılığı diklikten dolayı 0.

A'nın <u>beklenen değeri</u>, $|\alpha\rangle$ durumuna göre,

$$\langle A\rangle \equiv \langle\alpha|A|\alpha\rangle \quad ; \quad \langle A\rangle_{\alpha}$$

<u>tanım</u> olmasına rağmen ortalama ölçülmüş değerin sezgisel nosyonumuz ile uyuşur;

$$\langle A\rangle = \sum_{a'}\sum_{a''} \langle\alpha|a'\rangle\langle a'|A|a''\rangle\langle a''|\alpha\rangle$$

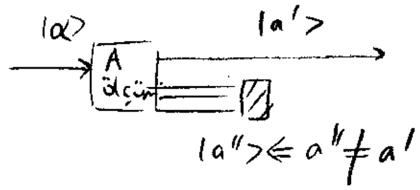
$$= \sum_{a'} \underbrace{a'}_{\text{ölçülen değer}} \; \underbrace{|\langle a'|\alpha\rangle|^2}_{a' \text{ elde etmenin olasılığı.}}$$

beklenen değerleri özdeğerler ile karıştırmamak gerekir. Örneğin, spin 1/2 sist.ler için S_z'nin beklenen değeri $-\hbar/2$ ile $+\hbar/2$ arasında her değer alabilir, $0.273\hbar$ örneğin.

BS K

QM de ölçümü daha da açıklığa kavuşturmak için <u>seçici ölçüm</u> ya da <u>filtreleme</u> nosyonunu ortaya koyalım. Bir aygıt ile, A'nın özketlerinden sadece birini, örn. $|a'\rangle$ 'yü seçen diğerlerini reddeden bir ölçüm süreci yaptığımızı düşünün (seçici ölçüm) Matematiksel olarak, bu gibi bir ölçümün $\Lambda_{a'}$ yü $|\alpha\rangle$ ya uygulamak için tuttuğumuzu söyleyebiliriz:

$$\Lambda_{a'}|\alpha\rangle = |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle$$



J. Schwinger $\Lambda_{a'}$ ye (ya da $|a'\rangle\langle a'|$ 'ye) özdeş başlangıçta bir ölçüm sembolü $M(a')$ ortaya koymuş ve $M(a')$'nın (çeşitli SG tipi deneylerin çıktılarını hecelerek) birçok özelliğini ortaya çıkartmıştır (Gottfried, 1966, 192-9)

<u>Bir daha Spin 1/2 sistemler:</u> Ardıl SG deneylerinin sonuçlarının şimdiye kadar tartışılmış olan QM'in postülaları ile birleştirildiği zaman, sadece $S_{x,y}$ $|S_x;\mp\rangle$ $|S_y;\mp\rangle$ özketlerini belirlemede değil aynı zamanda S_x ve S_y operatörlerini belirlemede yeterli olacağını göstereceğiz.

BS K

SG $\hat{z}$ ye maruz kalmış S_x+ demetini alalım. Demet eşit şiddette iki bileşene ayrılır. Bu S_x+ ışık olasılığın $|S_z;\pm\rangle$ ya ($|\pm\rangle$) atıldığını gösterir. Buradan,

$$|\langle +|S_x;+\rangle| = |\langle -|S_x;+\rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Böylece

$$|S_x;+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\delta_1}|-\rangle \qquad \delta_1 \in \mathbb{R}$$

S_x- keti, S_x+ ya ortogonal olmalı. Bu ortogonallik,

$$|S_x;-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\delta_1}|-\rangle \qquad 1.4.10$$

$= \sum_{a'}\sum_{a''}|a'\rangle\langle a'|A|a''\rangle\langle a''|$

$A = \sum_{a'} a'|a'\rangle\langle a'|$

$= \sum a' \Lambda_{a'}$

Şimdi S_x op.'ünü 1.3.34'ü kullanarak inşaa edebiliriz.

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\left[\left(|S_x;+\rangle\langle S_x;+|\right) - \left(|S_x;-\rangle\langle S_x;-|\right)\right]$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left[e^{-i\delta_1}\left(|+\rangle\langle -|\right) + e^{i\delta_1}\left(|-\rangle\langle +|\right)\right]$$

Hermitsel (olması gerektiği gibi)

Benzer şekilde,

$$|S_y;\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm e^{i\delta_2}|-\rangle \qquad 1.4.12$$

BS K $S_y = \frac{\hbar}{2}\left[e^{i\delta_2}(|+\rangle\langle -|) + e^{i\delta_2}(|-\rangle\langle +|)\right]$

δ_1 ve δ_2 'yi belirlemenin bir yolu var mı'dır?

Kullanmadığımız tek bilgi kaldı. z-doğrultusunda hareket eden spin 1/2 demeti düşünelim. SG$\hat{y}$ tarafından izlenen SG$\hat{x}$ li bir deney düşünelim. Bu gibi bir deneyin sonuçları tamamen evvelki 1.4.8 e benzer'dir.

$$|\langle S_y;\pm|S_x;+\rangle| = |\langle S_y;\pm|S_x;-\rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

fiziksel sist.'in dönmeler altında değişmezliğinden dolayı bu sürpriz değildir. 1.4.10, 1.4.12 yi 1.4.14 de yerine koyarak

$$\frac{1}{2}\left|1 \pm e^{i(\delta_1-\delta_2)}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

buluruz.

$$\Rightarrow \delta_2 - \delta_1 = \pi/2 \quad \text{ya da} \quad -\pi/2$$

S_x ve S_y 'nin matris elemanları tamamen reel olamaz. S_x matris elemanları reel olsa idi S_y 'ninkiler saf imajiner olacaklardı (ya da tam tersi).

S_x matris elemanlarını reel olarak almak ve $\delta_1 = 0$ seçmek uygundur; $\delta_1 = \pi$ seçseydik pozitif x ekseni zıt doğrultuda yönelecekti. O zaman 2. fazacısı $\delta_2 = -\pi/2$ ya da $+\pi/2$ olmalıdır. Koordinat sist.inin sağ-elli ya da sol elli olduğunu seçmememizden dolayı hala bir karışıklık vardır.

BS K

$\delta_2 = \pi/2$ doğru seçimdir.

Özetlemek için,

$$|S_x ; \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

$$|S_y ; \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

ve

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\left[\left(|+\rangle\langle -|\right) + \left(|-\rangle\langle +|\right)\right]$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2}\left[-i\left(|+\rangle\langle -|\right) + i\left(|-\rangle\langle +|\right)\right]$$

Hermitsel olmayan $S_\pm$ op.'leri

$$S_\pm = S_x \pm i S_y$$

kurulabilir.

$$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk} S_k$$

$$\{S_i, S_j\} = \frac{\hbar^2}{2}\delta_{ij}$$

$\vec{S}\cdot\vec{S}$ ya da $\vec{S}^2$'yi de tanımlayabiliriz

$$\vec{S}^2 \equiv S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)\hbar^2 \mathbb{1} \quad (\text{spin } 1/2)$$

$$[\vec{S}^2, S_i] = 0$$

BS K

Compatible Gözlenebilirler:

A ve B operatörleri

$$[A, B] = 0$$

ise compatible olarak adlandırılır.

$$[A, B] \neq 0$$

ise incompatible.

Örneğin $\vec{S}^2$ ve S_z compatible iken, S_x ve S_z değildirler.

İlk önce, A ve B gibi comp. gözlenebilirleri ele alalım. Bilindiği gibi, ket uzayımız A'nın özketleri tarafından gerilir. Şimdi şu soruyu sorabiliriz: A ve B comp. gözlenebilirler olduğu zaman A özketleri B niceliler ile nasıl bir ilişki içerisindedir?

Bunu cevaplamadan önce bypass ettiğimiz önemli bir noktaya parmak basalım – dejenerelik kavramı. A'nın aynı özdeğerlere sahip iki (ya da daha çok) lineer bağımsız özket'i olduğunu varsayınız. İki özketin özdeğerlerinin dejenere olduğu söylenir. Bu gibi bir durumda özketi etiketleyen $|a'\rangle$ tekbaşına tam bir tarif vermez; Dahası, dejenerelik yok iken ispatladığımız farklı özketlerin ortogonalliği üzerine olan teoremimizi yeniden gözden geçirelim.

BS K

tüm ket uzayının $\{|a'\rangle\}$ tarafından gerildiği kavramı ket uzayının boyutu A'nın farklı özdeğerlerinin sayısından büyük olduğu zaman güçlük yaratır.

İyiki, QM deki pratik uygulamalarda, diğer sıra değiştirebilir gözlenebilirlik özdeğerleri, $\underset{\sim}{B}$ olsun, dejenere özketleri etiketliyebilir olması durumun genellikle karşılaşılan durumdur. Şimdi önemli bir teoremi ispatlamaya hazırız.

<u>Teorem:</u> A ve B comp. gözlenebilirlikler olsun ve A'nın özdeğerleri dejenere olmasın. $\langle a''|B|a'\rangle$ matris elemanları köşegen'dir. (Burada, A'nın matris elemanlarının $\{|a'\rangle\}$'ler temel ket'ler olarak kullanıldığında köşegen olduğunu hatırlayalım)

<u>İspat:</u>

$$\langle a''|[A,B]|a'\rangle = \underbrace{(a''-a')}_{\neq 0 \text{ oldukça}} \underbrace{\langle a''|B|a'\rangle}_{\text{sıfır } (0)} = 0$$

B'nin matris elemanlarını şöyle yazarız.

$$\langle a''|B|a'\rangle = \delta_{a'a''}\langle a'|B|a'\rangle$$

<u>Hem A ve hem de B temel ket'lerin aynı kümesi ile köşegen matrisler ile temsil edilebilir!</u>

1.3.17 $$X = \sum_{a'}\sum_{a''} |a''\rangle\langle a''|X|a'\rangle\langle a'|$$

ve bunu kullanarak

$$B = \sum_{a''} |a''\rangle\langle a''|B|a''\rangle\langle a''|$$ yazabiliriz.

BS K

$$B|a'\rangle = \sum_{a''} |a''\rangle\langle a''| B |a''\rangle\langle a''|a'\rangle$$

A'nın özketi

$$= \underbrace{(\langle a'|B|a'\rangle)}_{b \equiv \langle a'|B|a'\rangle} |a'\rangle$$

Böylece, $|a'\rangle$ keti A ve B'nin eşzamanlı özketidir.

Bu eşzamanlı özketi $|a', b'\rangle$ ile karakterize edebiliriz.

Comp. gözlenebilirlerin eşzamanlı özketlere sahip olduğunu gördük.
Verilen ispat, A'nın özketlerinin dejenere olmadığı durum
içindi ve, ifade n-katlı dejenerelik durumunda'da geçerlidir.

$$A|a'^{(i)}\rangle = a'|a'^{(i)}\rangle \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

(aynı a' özdeğerli A'nın ortonormal özketleri.)

Bunu görmek için yapmamız gereken tek şey B yi köşegenleştiren $|a'^{(i)}\rangle$'nün uygun lineer kombinasyonlarını kurmaktır.

$$A|a', b'\rangle = a'|a', b'\rangle$$
$$B|a', b'\rangle = b'|a', b'\rangle$$

→ A ve B'nin eşzamanlı bir özketi

$$[\vec{L}^2, L_z] = 0$$

$$\vec{L}^2 |l m_l\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l m_l\rangle \qquad l = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$L_z |l m_l\rangle = m_l \hbar |l m_l\rangle \qquad m_l = -l, \ldots, +l$$

BS K

$$|K'\rangle = |a', b'\rangle$$

(kollektif indis)

Birden fazla comp. gözlenebilir var ise,

$$[A,B] = [B,C] = [A,C] = \cdots = 0$$

Sıradeğiştirebilir gözlenebilirlerin maksimal bir kümesi olsun: Bu bağıntıyı bozmaksızın, listemize yeni gözlenebilir ekleyemeyiz. $A, B, C, \ldots$ op.'nin özdeğerleri dejenere olabilir, ama eğer, $(a', b', c', \ldots)$ kombinasyonunu belirlersek, O zaman $A, B, C, \ldots$'nin eşzamanlı özketleri eşsiz bir şekilde belirlenmiş olur.

$$(|a', b', c', \ldots\rangle) \longrightarrow |K'\rangle$$

$$\langle K''|K'\rangle = \delta_{K'K''} = \delta_{a'a}\,\delta_{b'b}\,\delta_{c'c}\cdots$$

$$\sum_{K'} |K'\rangle\langle K'| = \sum_{a'}\sum_{b'}\sum_{c'} \cdots |a', b', c', \ldots\rangle\langle a', b', c', \ldots| = 1$$

A ve B comp. gözlenebilirler olduğunda A ve B'nin ölçümlerini inceleyelim.

A ölçülür $\longrightarrow a'$ bulunsun

sonra

B " $\longrightarrow b'$ bulunsun

Sonuç olarak A'yı tekrar ölçeriz. Ölçüm formalizmimizden 3. ölçüm'ün kesinlikle a' vereceğini söyleriz, yani, 2. (B ölçümü) ölçüm 1. (A) ölçümünde elde edilen önceki bilgiyi bozmaz. A'nın özdeğerleri dejenere olmadığı zaman bu daha açıktır:

$$|\alpha\rangle \xrightarrow{\;A\;} |a',b'\rangle \xrightarrow{\;B\;} |a',b'\rangle \xrightarrow{\;A\;} |a',b'\rangle$$

Dejenerelik olduğu zaman, şu şekildedir. A ölçümünden sonra (ki bu a' 'ye yol açar) sistem

$$\sum_i^{n} C_{a'}^{(i)} \underbrace{|a',b^{(i)}\rangle}_{\text{aynı } a' \text{ özdeğerli özhetler}}$$ dejenerelik

ye atlar.

2. B ölçümü bu lineer kombinasyon'dan sadece birini seçecektir, $|a', b^{(i)}\rangle$ olsun, ama buna uygulanan 3. A ölçümü hala a' 'ye yol açacaktır. Dejenerelik olsun olmasın A ve B ölçümleri girişim yapmayacaktır. Compatible terimi gerçekten uygundur.

Incompatible gözlenebilirlikler:

Bunların eşzamanlı özhetlerinin bir tam kümesi olmak zorunluluğu yoktur. Bunun tersinin doğru olduğunu varsayarak gösterelim. O zaman

$$\left.\begin{aligned} A|a',b'\rangle &= a'|a',b'\rangle \\ B|a',b'\rangle &= b'|a',b'\rangle \end{aligned}\right)$$ özellikle eşzamanlı özhetlerin bir kümesi var olacaktır.

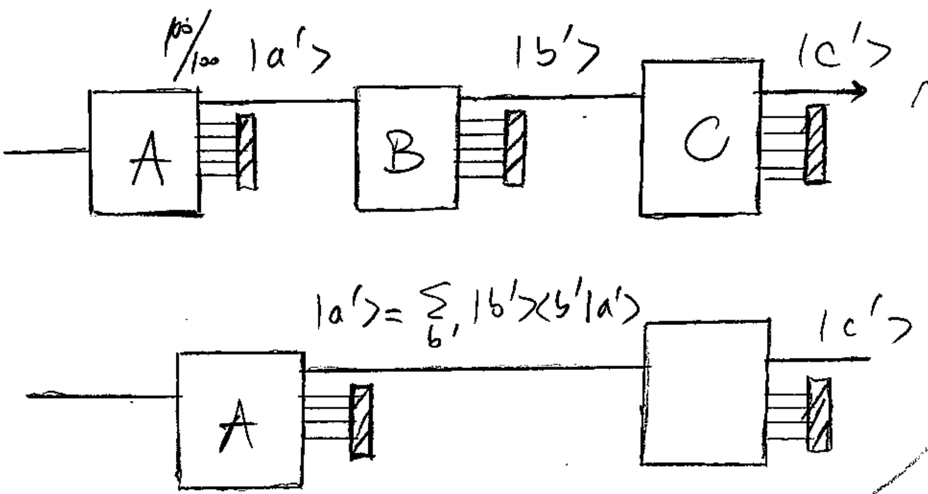
$$\left.\begin{aligned} AB|a',b'\rangle &= a'b'|a',b'\rangle \\ BA|a',b'\rangle &= a'b'|a',b'\rangle \end{aligned}\right) \Rightarrow \quad AB|a',b'\rangle = BA|a',b'\rangle$$

BS K

ve böylece $[A, B] = 0$ varsayıma ters.

Şöyle bir istisnai durum olabilir. 1.4.44'ün A ve B incomp. olsa bile bir alt ket uzayın tüm elemanları için geçerli olduğu ket uzayının bir alt uzayı olabilir. Örneğin, $l=0$ (s-durumu). $[L_x, L_z] \neq 0$ ama bu durum L_x ve L_z'nin eşzamanlı bir özdurumu'dur. Bu durumda altuzay bir boyut'ludur.

Şekilde gösterilen bir dizi selektif ölçüm düşünelim



elde etmenin olasılığı

$$\underbrace{|\langle c'|b'\rangle|^2 \, |\langle b'|a'\rangle|^2}$$

(a)

tüm mümkün b' rotalarında geçen toplam olasılık tüm b' üzerinden toplam

$$\sum_{b'} |\langle c'|b'\rangle|^2 |\langle b'|a'\rangle|^2$$

$$= \sum_{b'} \langle c'|b'\rangle\langle b'|a'\rangle\langle a'|b'\rangle\langle b'|c'\rangle$$

bunu (b) deki ile kıyaslayalım.

$$\text{olasılık} = |\langle c'|a'\rangle|^2 = \Big|\sum_{b'} \langle c'|b'\rangle\langle b'|a'\rangle\Big|^2$$

$$= \sum_{b'} \sum_{b''} \langle c'|b'\rangle\langle b'|a'\rangle\langle a'|b''\rangle\langle b''|c'\rangle$$

Bunlar birbirinden farklı! . Bu, her iki durumda da saf $|a'\rangle$ demeti (ilk A filtresinden gelen) B'nin özketlerinden müteşekkil olduğundan dolayı, dikkate değerdir:

$$|a'\rangle = \sum_{b'} |b'\rangle\langle b'|a'\rangle$$

(tüm mümkün)

C filtresinden çıkan sonucun B'ye bağımlı olup olmadığına dikkat etmek gerekir. İlk durumda hangi B değerlerinin gerçekten realize olduğuna deneysel olarak tahkik etmeliyiz; 2. durumda 1.4.48 anlamında yalnızca çeşitli $|b'\rangle$'lerden oluşmuş $|a'\rangle$ düşünüyoruz. Gerçekten çeşitli b' rotaları üzerinden olasılıkları kaydederek b' üzerinden toplasak da farklılık yaratıyoruz.

Hangi şart altında iki ifade eşit olabilir?

Dejenereliğin yokluğunda $[A,B]=0$ ya da $[B,C]=0$ dikkate almak yeterlidir. İllüstre ettiğimiz özellik, incomp. gözlenebilirlerin karakteristiğidir.

Belirsizlik Bağıntısı:

Bir A op.'ü verilmiş olsun;

$\Delta A \equiv A - \langle A\rangle$ op.'ü tanımlayalım.

$(\Delta A)^2$ A'nın dispersiyonu olarak bilinir

$$(\Delta A)^2 = (A^2 - 2A\langle A\rangle + \langle A\rangle^2)$$

$$\langle(\Delta A)^2\rangle = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2$$ (dispersiyon, varyans, ort. kare sapma)

Eğer durum A nın bir ise $\langle(\Delta A)^2\rangle = 0$

Kabaca, bir gözlenebilirin dispersiyonu bulanıklığı karakterize eder. Örneğin, Spin 1/2 S_z+ durumunda S_x'in dispersiyonu

$$\langle S_x^2\rangle - \langle S_x\rangle^2 = \hbar^2/4$$

$$\langle \Delta S_z\rangle^2_{S_z+} = 0$$

Öyleyse S_z+ durumu için, S_x bulanık iken S_z "keskin" sıfır dispersiyondur.

$$\langle(\Delta A)\rangle^2 \langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4} |\langle[A, B]\rangle|^2$$

<u>Lemma 1.</u>

$$\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle \geq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2$$

(Schwarz lemma)

$$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \geq |\vec{a}\cdot\vec{b}|^2$$ analoji

BS K

<u>İspat</u> :

$$\left(\langle\alpha| + \lambda^* \langle\beta| \right) \cdot \left(|\alpha\rangle + \lambda |\beta\rangle \right) \geq 0$$

$\lambda \in \mathbb{C}$

Bu eşitsizlik $\lambda = -\langle\beta|\alpha\rangle / \langle\beta|\beta\rangle$ seçildiğinde de geçerli olmalıdır.

$$\Rightarrow \quad \langle\alpha|\alpha\rangle \langle\beta|\beta\rangle - |\langle\alpha|\beta\rangle|^2 \geq 0$$

<u>lemma 2</u> : Hermitsel bir op.'ün beklenen değeri saf olarak reel olmalıdır.

<u>İspat</u> : 1.3.21

<u>lemma 3</u>. Anti-Hermitsel bir op.'ün beklenen değeri ($C = -C^{\dagger}$ ile tanımlanan) saf olarak sanal olmalıdır.

<u>İspat</u> : ✓

Bu üç lemma ile donandıktan sonra,

lemma 1. $\quad |\alpha\rangle = \Delta A |\ \rangle$

$\quad |\beta\rangle = \Delta B |\ \rangle$ — herhangi bir ket

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geq |\langle \Delta A \Delta B \rangle|^2 \text{ elde ederiz.}$$

ΔA, ΔB'nin Hermitselliği kullanıldı.

BS K

1.5. Baz Değişimi

Dönüşüm Op.'ü:

A ve B iki incomp. op. olsun. Ket uzayının $\{|a'\rangle\}$ ya da $\{|b'\rangle\}$ kümesi tarafından gerildiğini düşünebiliriz. Örn, spin 1/2 sist.'ler için $|S_z \pm\rangle$ ya da alternatif olarak $|S_x \pm\rangle$ baz ketleri olarak kullanılabilir. Tabii iki baz ketlerinin iki farklı kümesi aynı ket uzayını gererler. Biz bu iki tarifin nasıl ilişkili olduğunu anlamak istiyoruz. Baz ketlerinin kümesini değiştirmek bir baz değişimi ya da temsilin değişimi olarak adlandırılır.

$\{|a'\rangle\}$ ile verilen baz ketleri A temsili ya da bazen A köşegen temsili olarak adlandırılır, çünkü A'ya karşılık gelen matris bu bazda köşegendir.

Temel görevimiz $\{|a'\rangle\}$ ortonormal kümesini $\{|b'\rangle\}$ ortonormal kümesine bağlayan bir dönüşüm op.'ü bulmaktır.

Teorem: Hem ortonormallik ve hem de tamlık'ı sağlayan baz ketlerinin iki kümesi verilmiş olsun.

$$|b^{(1)}\rangle = U|a^{(1)}\rangle, \quad |b^{(2)}\rangle = U|a^{(2)}\rangle, \ldots, |b^{(N)}\rangle = U|a^{(N)}\rangle$$

şeklinde bir U op.'ü vardır.

üniter

$$U^\dagger U = 1 = U U^\dagger$$

<u>İspat</u>:

$$U = \sum_k |b^{(k)}\rangle\langle a^{(k)}|$$

$$U|a^{(l)}\rangle = \sum_k |b^{(k)}\rangle\langle a^{(k)}|a^{(l)}\rangle$$

$$= |b^{(l)}\rangle$$

$$U^{\dagger}U = \sum_k\sum_l |a^{(l)}\rangle\langle b^{(l)}|b^{(k)}\rangle\langle a^{(k)}| = 1$$

Dönüşüm Matrisi:

Eski $\{|a'\rangle\}$ bazında U'nun matris temsili

$$\langle a^{(k)}|U|a^{(l)}\rangle = \underbrace{\langle a^{(k)}|b^{(l)}\rangle}$$

Matris elemanları eski (bra)'lar ile yeni (ket)'lerin iç çarpımından kurulmuş.

$$R\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\\ \hat{z}\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}\hat{x}'\\ \hat{y}'\\ \hat{z}'\end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix}\hat{x}\cdot\hat{x}' & \hat{x}\cdot\hat{y}' & \hat{x}\cdot\hat{z}'\\ \hat{y}\cdot\hat{x}' & \hat{y}\cdot\hat{y}' & \hat{y}\cdot\hat{z}'\\ \hat{z}\cdot\hat{x}' & \hat{z}\cdot\hat{y}' & \hat{z}\cdot\hat{z}'\end{pmatrix}$$

Karesel matris $\{|a'\rangle\} \rightarrow \{|b'\rangle\}$ ye dönüştüren <u>dönüşüm matrisi</u> olarak bilinir.

BS K

Açılım katsayıları, eski bazda, $\langle a'|\alpha\rangle$ olan

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle$$

keyfi ket'i verilmiş olsun. Yeni bazda $\langle b'|\alpha\rangle$ açılım katsayılarını nasıl elde ederiz?

$$\underbrace{\langle b^{(k)}|\alpha\rangle} = \sum_{l} \underbrace{\langle b^{(k)}|a^{(l)}\rangle}\langle a^{(l)}|\alpha\rangle$$

$$= \sum_{l} \langle a^{(k)}|U^{\dagger}|a^{(l)}\rangle\underbrace{\langle a^{(l)}|\alpha\rangle}$$

$$(\text{Yeni}) = (U^{\dagger})\,(\text{Eski})$$

Eski ve yeni matris elemanları arasındaki ilişki

$$\langle b^{(k)}|X|b^{(l)}\rangle = \sum_{m}\sum_{n} \langle b^{(k)}|a^{(m)}\rangle\langle a^{(m)}|X|a^{(n)}\rangle\langle a^{(n)}|b^{(l)}\rangle$$

$$= \sum_{m}\sum_{n} \langle a^{(k)}|U^{\dagger}|a^{(m)}\rangle\langle a^{(m)}|X|a^{(n)}\rangle\langle a^{(n)}|U|a^{(l)}\rangle$$

$$X' = U^{\dagger} X U$$ <u>benzerlik dönüşümü</u>

BS K

Bir X op.'ünün izi

$$\underbrace{tr(X)}_{\text{temsil'den bağımsız.}} = \sum_{a'} \langle a'|X|a'\rangle$$

$$\sum_{a'} \langle a'|X|a'\rangle = \sum_{a'}\sum_{b'}\sum_{b''} \langle a'|b'\rangle\langle b'|X|b''\rangle\langle b''|a'\rangle$$

$$= \sum_{b'}\sum_{b''} \langle b''|b'\rangle\langle b'|X|b''\rangle$$

$$= \sum_{b'} \langle b'|X|b'\rangle$$

* $tr(XY) = tr(YX)$
* $tr(U^{\dagger}XU) = tr(X)$
* $tr(|a'\rangle\langle a''|) = \delta_{a'a''}$
* $tr(|b'\rangle\langle a'|) = \langle a'|b'\rangle$

Köşegenleştirme.

Eski $\{|a'\rangle\}$ bazında matris elemanlarının bilindiği düşünülen bir B op.'ünün özdeğer ve özvektörlerinin nasıl bulunduğunu şimdiye kadar tartışmadık. Bu problem B'yi köşegenleştiren üniter matrisi bulma problemiyle eşdeğerdir.

$$B|b'\rangle = b'|b'\rangle$$

$$\sum_{a'} \langle a''|B|a'\rangle\langle a'|b'\rangle = b'\langle a''|b'\rangle$$

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \cdots \\ B_{21} & B_{22} & & \\ B_{31} & \vdots & \ddots & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1^{(l)} \\ C_2^{(l)} \\ \vdots \end{pmatrix} = b^{(l)} \begin{pmatrix} C_1^{(l)} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$B_{ij} = \langle a^{(i)} | B | a^{(j)} \rangle$$

$i, j, k := 1, \dots, N$

$$C_k^{(l)} = \langle a^{(k)} | b^{(l)} \rangle$$

○ $\det(B - \lambda \mathbb{1}) = 0$ <u>karakteristik denk.</u>'in sağlanır ile

$\underset{\sim}{C}$'ler için çözüm mümkün'dür.

B'nin hermitselliği önemli. örn, S_+'yı alalım $S_+^\dagger = S_-$

S_z bazında

$$S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

○ bir üniter matris ile köşegenleştirilemez.

<u>Üniter Eşdeğer Gözlenebilirler</u>:

<u>Teorem</u>: U op.'ü ile ilişkilendirilen $\{|a'\rangle\}$ ve $\{|b'\rangle\}$ ortonormal bazlarını alalım. U'yu bilerek, UAU^{-1}, A'nın bir üniter dönüşümünü kurabiliriz; o zaman, A ve UAU^{-1} üniter eşdeğer gözlenebilirler'dir denir. A için özdeğer denk.'i:

$$A|a^{(l)}\rangle = a^{(l)} |a^{(l)}\rangle$$

$$UAU^{-1}U|a^{(l)}\rangle = a^{(l)} U|a^{(l)}\rangle$$

$$(UAU^{-1})|b^{(l)}\rangle = a^{(l)}|b^{(l)}\rangle$$

$|b'\rangle$'ler UAU^{-1} in A'nınkiler ile aynı özdeğerlere sahip özket'leridir. Diğer bir deyişle üniter eşdeğer gözlenebilirler özdeğer spektrumlara sahiptirler.

$$B|b^{(l)}\rangle = b^{(l)}|b^{(l)}\rangle$$

Yani, B ve UAU^{-1} eşzamanlı köşegenleştirilebilirler.

1.6. Konum, Momentum ve Öteleme:

Sürekli Spektrum.

QM'de spektrumu kesikli olan gözlenebilirlerin yanı sıra sürekli olanlarda vardır, örn. p_x $(-\infty, +\infty)$ (sonsuz boyutlu).

$$\xi|\xi'\rangle = \xi'|\xi'\rangle$$

toplam $\rightarrow$ integral

Kronecker δ $\rightarrow$ Dirac δ

$\{a'\}$ özdeğerleri $\rightarrow$ $\{\xi'\}$

(*) $\langle a'|a''\rangle = \delta_{a'a''} \longleftrightarrow \langle\xi'|\xi''\rangle = \delta(\xi'-\xi'')$

$$\sum_{a'} |a'\rangle\langle a'| = 1 \longrightarrow \int d\xi' |\xi'\rangle\langle\xi'| = 1$$

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle \rightarrow \int d\xi' |\xi'\rangle\langle\xi'|\alpha\rangle$$

$$\sum_{a'} |\langle a'|\alpha\rangle|^2 = 1 \rightarrow \int d\xi' |\langle\xi'|\alpha\rangle|^2 = 1$$

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \sum_{a'} \langle\beta|a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle$$

$$\longrightarrow \int d\xi' \langle\beta|\xi'\rangle\langle\xi'|\alpha\rangle$$

$$\langle a''|A|a'\rangle = a'\delta_{a'a''} \longrightarrow \langle\xi''|\xi|\xi'\rangle = \xi'\delta(\xi''-\xi')$$

Konum özketleri ve konum ölçümleri:

Daha evvelden QM' de bir ölçüm işleminin esas olarak bir filtreleme proses'i olduğunu vurgulamıştık. Bu fikri sürekli spekt. sergileyen gözlenebilirlerin ölçümlerine genellemek için özel bir örnek ile çalışmak iyi bir yol'dur. Konum (ya da koordinat) op.'ünü 1D'ta ele alalım.

$$x|x'\rangle = \underbrace{x'}_{\text{uzunluk boyutunda bir sayı}}|x'\rangle$$

Keyfi bir $|\alpha\rangle$

$$|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' |x'\rangle\langle x'|\alpha\rangle$$

Konum gözlenebilirinin idealleştirilmiş selektif bir ölçümünü yaptığımızı düşünelim. Parçacığı kesinlikle x' 'nde olduğu zaman algılayacak (diğer durumlarda algılamayacak) bir dedektör koyduğumuzu düşünelim. Dedektör klik'ledikten sonra durumunun $|x'\rangle$ olduğunu söyleyebiliriz.

Dedek. (klik)

$$|\alpha\rangle \xrightarrow{\text{atlar}} |x'\rangle$$

Pratikte, en iyi dedektör x' civarında dar bir aralığı gösterir. Realistik bir dedektör parçacık $(x'-\Delta/2, x'+\Delta/2)$ dar bölgesine lokalleştiğinde klikler.

$$|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx''\,|x''\rangle\langle x''|\alpha\rangle \xrightarrow{\text{ölçme}} \int_{x'-\Delta/2}^{x'+\Delta/2} dx''\,|x''\rangle\langle x''|\alpha\rangle$$

$\langle x''|\alpha\rangle$ 'nın dar aralıkta dikkate değer değişmediğini varsayarak klik için olasılık,

$$|\langle x'|\alpha\rangle|^2\,dx'$$

$|\langle a'|\alpha\rangle|^2$ ile analoji.

Parçacığı $-\infty$ ile $+\infty$ arasında bir yerde kaydetme olasılığı

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx'\,|\langle x'|\alpha\rangle|^2$$

ile verilir, ki bu $|\alpha\rangle$ normalize ise 1'e normalizedir.

BS K

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \underbrace{\langle\alpha|x'\rangle}_{\psi_\alpha^*(x')}\underbrace{\langle x'|\alpha\rangle}_{\psi_\alpha(x')} = 1$$

dalga fonk.lu.

3D'a genelleme yapabiliriz. $|\vec{x}'\rangle$ tam. Spin gibi iç serbestlik dereceleri ihmal edildiğinde bir parçacık için durum ket'i $\{|\vec{x}'\rangle\}$ cinsinden açılabilir;

$$|\alpha\rangle = \int d^3x' \, |\underbrace{\vec{x}'}_{(x,y,z)}\rangle\langle\vec{x}'|$$

Diğer bir deyişle $|\vec{x}'\rangle$, x, y, z gözlenebilirlerinin eşzamanlı özketi.

$$|\vec{x}'\rangle \equiv |x', y', z'\rangle$$

$$x|\vec{x}'\rangle = x'|\vec{x}'\rangle \qquad y|\vec{x}'\rangle = y'|\vec{x}'\rangle \qquad z|\vec{x}'\rangle = z'|\vec{x}'\rangle$$

Konum vektörünün 3 bileşeninin de eşzamanlı ölçülebildiğini varsayıyoruz.

$$[x_i, x_j] = 0$$

Öteleme :

Öteleme ya da uzaysal yerdeğiştirme. $\vec{x}'$ civarında lokalize bir durum ile başladığımızı düşünelim. Bu durumun bir başka duruma (iyi lokalize) değiştiren bir operasyon düşünelim. Bu gibi bir operasyon sonsuz küçük bir öteleme ($d\vec{x}'$ kadar) olarak adlandırılır.

$$\mathcal{T}(d\vec{x}\,')|\vec{x}\,'\rangle = |\vec{x}\,' + d\vec{x}\,'\rangle$$

(keyfi bir faz çarpanı birim alınmıştır.) Açıkça olarak, $|\vec{x}\,'\rangle$ sonsuz küçük öteleme op.'nün özketi değildir.

$$|\alpha\rangle \to \mathcal{T}(d\vec{x}\,')|\alpha\rangle = \mathcal{T}(d\vec{x}\,')\int d^3\vec{x}\,'\,|\vec{x}\,'\rangle\langle\vec{x}\,'|\alpha\rangle$$

$$= \int d^3x'\,|\vec{x}\,' + d\vec{x}\,'\rangle\langle\vec{x}\,'|\alpha\rangle$$

$$\left(= \int d^3x'\,|\vec{x}\,'\rangle\langle\vec{x}\,' - d\vec{x}\,'|\alpha\rangle \quad \text{da yazılabilir} \right)$$

$\mathcal{T}(d\vec{x}\,')|\alpha\rangle$: $\vec{x}\,'$ 'yü $\vec{x}\,' - d\vec{x}\,'$ ile $\langle\vec{x}\,'|\alpha\rangle$ da yerdeğiştirerek elde edilir.

<u>Sonsuz küçük öt. op.'nün özellikleri</u>:

* Üniterlik (olasılık korunumu ile empoze edil.)

$|\alpha\rangle$ 1'e normalize $\Rightarrow$ $\mathcal{T}(d\vec{x}\,')|\alpha\rangle$ da 1'e normalize.

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\alpha|\underbrace{\mathcal{T}^\dagger(d\vec{x}\,')\,\mathcal{T}(d\vec{x}\,')}_{\text{üniterliği garantiler.}}|\alpha\rangle$$

$$\mathcal{T}^\dagger(d\vec{x}\,')\,\mathcal{T}(d\vec{x}\,') = \mathbb{1}.$$

Genel olarak, bir ket'in normu üniter dönüşümler altında korunur

BS K

*2 $d\vec{x}'$ ve $d\vec{x}''$ (ayrı doğrultuda olma zorunluluğu yok) gibi ardıl ötelemeleri alalım. Net sonuç tek bir öt. operasyonu olmalı.

$$\mathcal{T}(d\vec{x}'')\,\mathcal{T}(d\vec{x}') = \mathcal{T}(d\vec{x}' + d\vec{x}'')$$

*3 zıt-doğrultuda bir öt. düşünelim. Orjinal dönüşümün tersinin olmasını bekleriz.

$$\mathcal{T}(-d\vec{x}') = \mathcal{T}^{-1}(d\vec{x}')$$

*4 $d\vec{x}' \to \vec{0}$ öteleme $\mathbb{1}$.

$$\lim_{d\vec{x}' \to 0} \mathcal{T}(d\vec{x}') = \mathbb{1}.$$

Sonsuz küçük öt. op.'ünü

$$\mathcal{T}(d\vec{x}') = 1 - i\vec{K}\cdot d\vec{x}'$$

olarak alır isek ($\vec{K}$, K_x, K_y, K_z hermitsel op.'un bileşenleri) yukarıdaki tüm özellikler sağlanır. İlk özellik,

1°) $$\mathcal{T}^{\dagger}(d\vec{x}')\,\mathcal{T}(d\vec{x}') = (1 + i\vec{K}\cdot d\vec{x}')(1 - i\vec{K}\cdot d\vec{x}')$$
$$= 1 - i(K - K^{\dagger}) + O[(d\vec{x}')^2]$$
$$\simeq 1$$

2°) $$\mathcal{T}(d\vec{x}'')\,\mathcal{T}(d\vec{x}') \simeq 1 - i\vec{K}\cdot(d\vec{x}' + d\vec{x}'')$$
$$= \mathcal{T}(d\vec{x}' + d\vec{x}'')$$

3°) 4°) özellikler zaten sağlanır.

Yukarıdaki formu T için doğru varsayarak, $\vec{K}$ ile $\vec{x}$ arasında temel bir bağıntı türetme durumundayız.

$$\vec{x}\, T(d\vec{x}')\,|\vec{x}'\rangle = \vec{x}\,|\vec{x}'+d\vec{x}'\rangle = (\vec{x}'+d\vec{x}')\,|\vec{x}'+d\vec{x}'\rangle$$

$$T\,\vec{x}\,|\vec{x}'\rangle = \vec{x}'\,T(d\vec{x}')\,|\vec{x}'\rangle = \vec{x}'\,|\vec{x}'+d\vec{x}'\rangle$$

$$[\vec{x}, T(d\vec{x}')]\,|\vec{x}'\rangle = d\vec{x}'\,|\vec{x}'+d\vec{x}'\rangle \simeq d\vec{x}'\,|\vec{x}'\rangle$$

$$\therefore \quad [\vec{x}, T(d\vec{x}')] = d\vec{x}'$$

$$-i\vec{x}(\vec{K}\cdot d\vec{x}') + i(\vec{K}\cdot d\vec{x}')\,\vec{x} = d\vec{x}'$$

$$[x_i, K_j] = i\,\delta_{ij}$$

Öteleme Jeneratörü olarak Momentum :

Klasik Mek. te sonsuz küçük bir öteleme kanonik dönüşüm olarak

$$X_{yeni} \equiv X = x + dx \qquad P_{yeni} \equiv P = p$$

üretici fonk.'dan türetilebilir. (Goldstein)

$$F(\vec{x}, \vec{P}) = \vec{x}\cdot\vec{P} + \vec{p}\cdot d\vec{x} \qquad \begin{pmatrix} X = x \\ P = p \end{pmatrix}$$

özdeşlik dön.'ünü jenere eden fonk. $\Rightarrow$ K'da P gibidir.

BS K

K op.'ü mom. op.'ü ile özdeşleştirilebilir mi? Boyutu yanlış-tır. $\vec{K}\cdot d\vec{x}'$ boyutsuz ~~olduğundan~~ $[\vec{K}]$ $1/$uzunluk'tur.

$$\vec{K} = [\text{Eylem boyutlu evrensel bir sabit}]^{-1} \times \vec{p}$$

Elektrostatik'ten analoji bu noktada bize yararlı olabilir;

$\underbrace{e^2/r}_{\text{etk. enerjisi}}$ —— 1 (katsayı Gaussian birimlerde)

$1/4\pi\epsilon_0$ (MKS)

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{\hbar}$$ olmalı.

$$\mathcal{T}(d\vec{x}') = 1 - i\vec{p}\cdot d\vec{x}'/\hbar$$

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

W. Heisenberg'in konum_mom. belirsizlik bağıntısı

$$\langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p_x)^2\rangle \geq \hbar^2/4$$

Şimdiye kadar, sonsuz küçük ötelemeler ile ilgilendik. Sonlu büyüklüktekiler de bunları ardıl olarak uygulayarak elde edilebilir.

x_boyunca $\Delta x'$ kadar sonlu bir öteleme,

BS K $$\mathcal{T}(\Delta x'\hat{x})|\vec{x}'\rangle = |\vec{x}' + \Delta x'\hat{x}\rangle$$

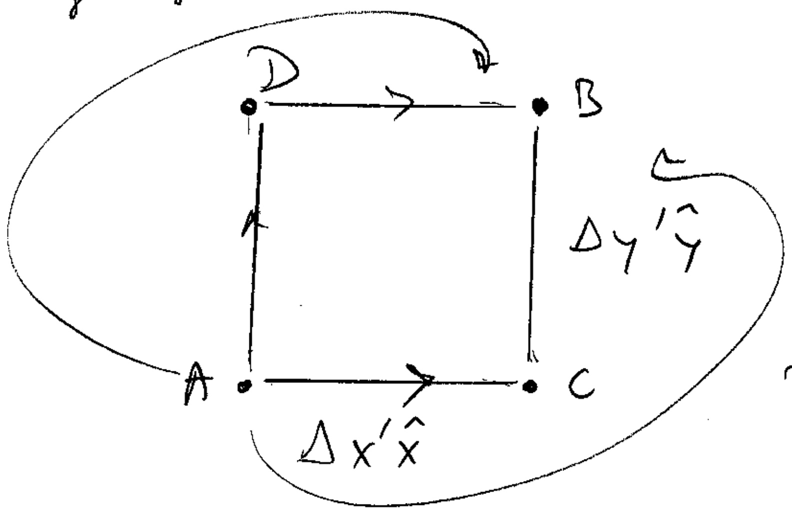
Herbiri $\Delta x'/N$ ($N \to \infty$ olmak üzere) ile karakterize edilen N sonsuz küçük ötelemeyi birleştirirsek,

$$T(\Delta x'\hat{x}) = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{i p_x \Delta x'}{N\hbar}\right)^N$$

$$= e^{-i p_x \Delta x'/\hbar}$$

$$e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \dots$$

x ve y doğrultusundaki gibi farklı doğrultulardaki ardıl dönüşümler yerdeğiştirme özelliğine sahiptir.



farketmez.

$$T(\Delta y'\hat{y})\,T(\Delta x'\hat{x}) = T(\Delta x'\hat{x} + \Delta y'\hat{y})$$

$$T(\Delta x'\hat{x})\,T(\Delta y'\hat{y}) = T(\Delta x'\hat{x} + \Delta y'\hat{y})$$

Bu nokta göründüğü gibi basit değildir!

$\Delta x'$ ve $\Delta y'$ yi 2. mertebeye kadar alalım ve

BS K

$$[T(\Delta y'\hat{y}), T(\Delta x'\hat{x})] = \left[\left(1 - \frac{i p_y \Delta y'}{\hbar} - \frac{p_y^2(\Delta y')^2}{\hbar^2} + \dots\right), \left(1 - \frac{i p_x \Delta x'}{\hbar} - \frac{p_x^2(\Delta x')^2}{\hbar^2} + \dots\right)\right]$$

$$\cong -\frac{(\Delta x')(\Delta y')[p_y, p_x]}{\hbar^2}$$

(1.6.38)

$$[T(\Delta y'\hat{y}), T(\Delta x'\hat{x})] = 0$$

$$[p_x, p_y] = 0$$

$$[p_i, p_j] = 0$$

(farklı doğrultulardaki ötelemelerin sıradeğiştirmesinin bir sonucu'dur) Ne zaman dönüşüm jenaratörleri sıradeğiştirirse karşı gelen grup Abelyen'dir deriz. 3-boyuttaki öteleme grubu Abelyan'dır.

p_x, p_y, p_z comp. gözlenebilirler olduğunu ima eder.

$$|\vec{p}\rangle \equiv |p_x', p_y', p_z'\rangle$$

$$T(d\vec{x}')|\vec{p}'\rangle = \left(1 - \frac{i\vec{p}\cdot d\vec{x}'}{\hbar}\right)|\vec{p}'\rangle = \left(1 - \frac{i\vec{p}'\cdot d\vec{x}'}{\hbar}\right)|\vec{p}'\rangle$$

$|\vec{x}'\rangle$'nün tersine $|\vec{p}'\rangle$ $T(d\vec{x}')$'nin bir özketi'dir

BS K $[\vec{p}, T(d\vec{x}')] = 0$ özdeğeri kompleks (Hermitsel değil!)

Kanonik komütasyon Bağıntıları: (KKB

$$[x_i, x_j] = 0 \qquad [p_i, p_j] = 0 \qquad [x_i, p_j] = i\hbar\,\delta_{ij}$$

P.A.M. Dirac: "temel kuantum şartları" ya da (KKB) ya da temel komütasyon bağıntıları.

$$[\ ,\ ]_{Kl.} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar}[\ ,\ ]_{QM}$$

Poisson parant.

$$[A(q,p), B(q,p)]_{Kl} \equiv \sum_s \left(\frac{\partial A}{\partial q_s}\frac{\partial B}{\partial p_s} - \frac{\partial A}{\partial p_s}\frac{\partial B}{\partial q_s} \right)$$

Örn; $[x_i, p_j]_{Kl} = \delta_{ij}$

Dirac'ın kuralı mantıklı idi çünkü her ikisi de benzer cebirsel özellikleri sağlar

$$[A, A] = 0$$

$$[A, B] = -[B, A]$$

$$[A, c] = 0 \quad (c: \text{sayı})$$

$$[A+B, C] = [A, C] + [B, C]$$

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$$

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$$ (Jacobi özdeşliği)

1.7. Konum ve Mom. Uzayında Dalga Fonk.'ları

Konum uzayı Dalg. fonk.'u.

$$X\,|x'\rangle = x'\,|x'\rangle \quad \text{(basitlik için 1D)}$$

$$\langle x''|x'\rangle = \delta(x''-x')$$

Herhangi fiziksel bir ket $|x'\rangle$

$$|\alpha\rangle = \int dx'\, |x'\rangle\langle x'|\alpha\rangle$$

cinsinden yazılabilir. $|\langle x'|\alpha\rangle|^2$ $x' - x'+dx'$ aralığında bulunma olasılığı. $\langle x'|\alpha\rangle \equiv \psi_\alpha(x')$ $|\alpha\rangle$ durumu için dalga fonk.'u olarak bilinir. Elemanter dalga mekaniğinde $c_{a'}\,(=\langle a'|\alpha\rangle)$ ve $\psi_\alpha(x')\;(=\langle x'|\alpha\rangle)$ ayrı postülalar olarak sunulur. Bizim notasyonumuz (PAMD) bunları birleştirir.

$\langle\beta|\alpha\rangle$ iç çarpımını alalım.

$$= \int dx'\, \langle\beta|x'\rangle\langle x'|\alpha\rangle$$

$$= \int dx'\, \psi_\beta^*(x')\psi_\alpha(x')$$

iki dalga fonk.'unun üst üste gelmesini temsil eder.

$|\alpha\rangle$ durumunun $|\beta\rangle$ durumunda bulunmasının olasılık genliği.

BS K

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle$$

$$\langle x'|\alpha\rangle = \sum_{a'} \langle x'|a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle$$

$$\psi_\alpha(x') = \sum_{a'} c_{a'}\, u_{a'}(x')$$

$$u_{a'}(x) = \langle x'|a'\rangle$$

$$\langle\beta|A|\alpha\rangle = \int dx' \int dx'' \langle\beta|x'\rangle\langle x'|A|x''\rangle\langle x''|\alpha\rangle$$

$$= \int dx' \int dx'' \,\psi_\beta^*(x')\langle x'|A|x''\rangle\psi_\alpha(x'')$$

$A = x^2$

$$\langle x'|x^2|x''\rangle = \left(\langle x'|\right)\cdot\left(x''^2|x''\rangle\right) = x'^2\,\delta(x'-x'')$$

$$\langle\beta|x^2|\alpha\rangle = \int dx'\,\psi_\beta^*(x')\,x'^2\,\psi_\alpha(x')$$

Genelde,

$$\langle\beta|f(x)|\alpha\rangle = \int dx'\,\psi_\beta^*(x')\,f(x')\,\psi_\alpha(x')$$

op.

~~değil.~~

BS K

Konum Bazında Mom. Op.'ü

$$\left(1-\frac{ip\Delta x'}{\hbar}\right)|\alpha\rangle=\int dx'\,\mathcal{T}(\Delta x')|x'\rangle\langle x'|\alpha\rangle$$

$$=\int dx'\,|x'+\Delta x'\rangle\langle x'|\alpha\rangle$$

$$=\int dx'\,|x'\rangle\langle x'-\Delta x'|\alpha\rangle$$

$$=\int dx'\,|x'\rangle\left(\langle x'|\alpha\rangle-\Delta x'\frac{\partial}{\partial x'}\langle x'|\alpha\rangle\right)$$

$$p|\alpha\rangle=\int dx'\,|x'\rangle\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x'}\langle x'|\alpha\rangle\right)$$

$$\langle x'|p|\alpha\rangle=-i\hbar\,\partial_{x'}\langle x'|\alpha\rangle$$

$$\langle x'|p|x''\rangle=-i\hbar\,\partial_{x'}\delta(x'-x'')$$

Önemli bir özellik: $\langle\beta|p|\alpha\rangle=\int dx'\,\langle\beta|x'\rangle\left(-i\hbar\partial_{x'}\langle x'|\alpha\rangle\right)$

$$=\int dx'\,\psi_\beta^*(x')\left(-i\hbar\,\partial_{x'}\right)\psi_\alpha(x')$$

$$\langle x'|p^n|\alpha\rangle=(-i\hbar)^n\frac{\partial^n}{\partial x'^n}\langle x'|\alpha\rangle$$

$$\langle\beta|p^n|\alpha\rangle=\int dx'\,\psi_\beta^*(x')\,(-i\hbar)^n\frac{\partial^n}{\partial x'^n}\psi_\alpha(x')$$

BS K

Mom. uzayı Dalga fonk.'u:

p- bazında,

$$p|p'\rangle = p'|p'\rangle$$

$$\langle p'|p''\rangle = \delta(p'-p'')$$

keyfi $|\alpha\rangle$

$$|\alpha\rangle = \int dp' \, |p'\rangle\langle p'|\alpha\rangle$$

aç. lım katsayılarının olasılık yorumu

bir p ölçümü (dp' aralığında p' özdeğerli) için olasılık

$$|\langle p'|\alpha\rangle|^2 \, dp'$$

mom. uzayı dalg. fonk.'u. $\phi_\alpha(p') = \langle p'|\alpha\rangle$

$|\alpha\rangle$ normalize ise,

$$\int dp' \, \langle\alpha|p'\rangle\langle p'|\alpha\rangle = \int dp' \, |\phi_\alpha(p')|^2 = 1$$

x_temsili ile p_temsili arasındaki ilişkiyi kuralım.

kesikli durumda $\{|a'\rangle\} \longrightarrow \{|b'\rangle\}$ arasındaki baz değişimi üniter matris ile veriliyor idi.

$\langle x'|p'\rangle$ dönüşüm matrisi

$$\langle x'|p|p'\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x'}\langle x'|p'\rangle$$

$$p'\langle x'|p'\rangle = -i\hbar \, \partial_{x'} \langle x'|p'\rangle$$

$$\langle x' | p' \rangle = N e^{ip'x'/\hbar}$$

$$\langle x' | x'' \rangle = \int dp' \langle x' | p' \rangle \langle p' | x'' \rangle$$

$$\delta(x' - x'') = |N|^2 \int dp' \, e^{ip'(x'-x'')/\hbar}$$

$$= 2\pi\hbar \, |N|^2 \delta(x' - x'')$$

$$\dashv \quad \langle x' | p' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ip'x'/\hbar}$$

Şimdi, konum-uzayı dalg. fonk.'u mom.-uzayı dalg. fonk.'u ile nasıl bir ilişki içerisinde onu gösterebiliriz.

$$\langle x' | \alpha \rangle = \int dp' \langle x' | p' \rangle \langle p' | \alpha \rangle$$

$$\langle p' | \alpha \rangle = \int dx' \langle p' | x' \rangle \langle x' | \alpha \rangle$$

$$\psi_\alpha(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp' \, e^{ip'x'/\hbar} \phi_\alpha(p')$$

$$\phi_\alpha(p') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx' \, e^{-ip'x'/\hbar} \psi_\alpha(x')$$

BS K

Fatin 12-13
Dilga 14-15
Melek 16-17
Hasan 18-19
Mehmet 20-21
Saleh 22-23
Alper 24-25
Ümit 26-27
Ata 28-29
Ülkü 30-31

29 Fatma Gül Uluduman
30 Hanyet Tem
31 Doğan Yalın
32-33 Gül Aydın

2 Öznur Mete
3 Tolga İnan
6 Şimşek Tekvel
7 Dilek Özcan
9 Asuman Kahraman
10 Tuba Özden
11 Ceyda Demir
12 Erdem Aydın
13 Cengiz Altun
14 Özlem Koçak
15 Fergül Çakır
16 Özge Hasırcı
17 Süreyya Ören
18 Derya
19 Emre
20 Erdem Özcan
21 Alper Yüksel
22 Özlem Par
23 Yeliz
24 Refik Uyar
25 Serdar
26 Sezgin Yıldız
27 Nevzat Noyan
28 Gülay Kuzgun

BS K

Gaussian Dalga Paketleri

temel formalizmimizi göstermek için fiziksel bir örnek bakmak öğretici olacaktır.

$$\langle x'|\alpha\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{d}}\, e^{ikx' - \frac{x'^2}{2d^2}}$$

merkezde odaklanmış Gaussian profilli k-dalga sayılı bir düzlem dalga. Parçacığın gözlenmesi olasılığı, $|x'| > d$ için hızlıca sıfıra düşer.; $|\langle x'|\alpha\rangle|^2$ olasılık yoğ. uda Gaussian şekle sahiptir.

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \langle\alpha|x'\rangle\, x' \langle x'|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' |\langle x'|\alpha\rangle|^2 = 0$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{d^2}{2}$$

$$\langle(\Delta x)^2\rangle = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \frac{d^2}{2}$$

$$\langle p\rangle = \hbar k$$

$$\langle p^2\rangle = \frac{\hbar^2}{2d^2} + \hbar^2 k^2$$

$$\langle(\Delta p)^2\rangle = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 = \frac{\hbar^2}{2d^2}$$

$$\langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p)^2\rangle = \hbar^2/4 \quad (\text{d'den bağımsız.})$$

MUS

BS K

$$\langle p'|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{d}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, e^{-ip'x'/\hbar + ikx' - \frac{x'^2}{2d^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{d}{\hbar\sqrt{\pi}}}\ \exp\left(-\frac{(p'-\hbar k)^2 d^2}{2\hbar^2}\right)$$

$\langle p\rangle$, $\langle p^2\rangle$ buradan da bulunabilir.

- $d\to\infty \Rightarrow$ düzlem dalg. parçacığı bulmanın olasılığı sbt. x''den bağımsız. Mom. uzayı dalga fonk.'u δ-fonk.'u. $\hbar k$'da pik'lenmiş.

3D'a Genelleme :

$$\vec{X}|\vec{x}'\rangle = \vec{x}'|\vec{x}'\rangle$$

- $$\vec{P}|\vec{p}'\rangle = \vec{p}'|\vec{p}'\rangle$$

$$\langle\vec{x}'|\vec{x}''\rangle = \delta^3(\vec{x}'-\vec{x}'')$$

$$\langle\vec{p}'|\vec{p}''\rangle = \delta^3(\vec{p}'-\vec{p}'')$$

$$\delta^3(\vec{x}'-\vec{x}'') = \delta(x'-x'')\,\delta(y'-y'')\,\delta(z'-z'')$$

$$\int d^3x'\,|\vec{x}'\rangle\langle\vec{x}'| = 1$$

$$\int d^3\vec{p}'\,|\vec{p}'\rangle\langle\vec{p}'| = 1$$

$$|\alpha\rangle = \int d^3x'\,|\vec{x}'\rangle\langle\vec{x}'|\alpha\rangle$$

$$= \int d^3p'\,|\vec{p}'\rangle\langle\vec{p}'|\alpha\rangle$$

BS K

$$\langle \beta | \vec{p} | \alpha \rangle = \int d^3x' \, \psi_\beta^*(\vec{x}') \, (-i\hbar \vec{\nabla}) \, \psi_\alpha(\vec{x}')$$

$$\langle \vec{x}' | \vec{p}' \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \, e^{i\vec{p}' \cdot \vec{x}'/\hbar}$$

$\int$

dön. fonk.'u.

$$\psi_\alpha(\vec{x}') = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3\vec{p}' \, e^{i\vec{p}' \cdot \vec{x}'/\hbar} \, \phi_\alpha(\vec{p}')$$

$$\phi_\alpha(\vec{p}') = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3x' \, e^{-i\vec{p}' \cdot \vec{x}'/\hbar} \, \psi_\alpha(\vec{x}')$$

$$\left[|\langle x' | \alpha \rangle|^2 \right]_B \quad \frac{1}{\text{uzunluk}}$$

$$\left[\phi_\alpha(\vec{x}') \right]_B \quad \frac{1}{\sqrt{\text{uzunluk}}}$$

BS K

1.1. $[AB, CD] = ABCD - CDAB$

$$= ABCD + ACBD - ACBD - ACDB + ACDB$$

$$+ CADB - CADB - CDAB$$

$$= A\{C,B\}D - AC\{D,B\} + \{C,A\}DB - C\{D,A\}B$$

1.2. a) $X = a_0 + \sum_i a_i \sigma_i$

$$\mathrm{tr}(\sigma_l) = 0 \Rightarrow \mathrm{tr}(X) = 2a_0$$

$$\mathrm{tr}(\sigma_k X) = \mathrm{tr}\left(\sum_i a_i \sigma_k \sigma_i\right) = \sum_i a_i 2\delta_{ik} = 2a_k$$

çünkü $\mathrm{tr}(\sigma_i \sigma_j) = \mathrm{tr}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i)\right) = 2\delta_{ij}$

$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(X)$ ve $a_i = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\sigma_i X)$

b) $a_0 = \frac{1}{2}(X_{11} + X_{22})$ $\quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$a_1 = \frac{1}{2}(X_{12} + X_{21})$ $\quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$a_2 = \frac{i}{2}(-X_{21} + X_{12})$ $\quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$a_3 = \frac{1}{2}(X_{11} - X_{22})$ $\quad \sigma_i^2 = 1$

$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\,\epsilon_{ijk}\sigma_k$

BS K

(1.3.) $\vec{\sigma}\cdot\vec{a} = \sigma_x a_x + \sigma_y a_y + \sigma_z a_z = \begin{pmatrix} a_z & a_x - i a_y \\ a_x + i a_y & -a_z \end{pmatrix}$

$\det(\vec{\sigma}\cdot\vec{a}) = -|\vec{a}|^2$

$\hat{n} \uparrow\uparrow \hat{z}$ seçilirse $e^{\pm i \vec{\sigma}\cdot\hat{n}\phi/2} = \mathbb{1}\cos(\phi/2) \pm i\sigma_z \sin(\phi/2)$

$B \equiv \cos\phi/2 + i \sin\phi/2$ olarak tanımlanırsa

$$\underbrace{e^{i\sigma_z\phi/2}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{a}\,e^{-i\sigma_z\phi/2}} = \begin{pmatrix} a_z B^* B & (a_x - i a_y) B^2 \\ (a_x + i a_y) B^{*2} & -a_z B^* B \end{pmatrix}$$

$B^* B = 1$

$\det(\quad) = -(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) = -|\vec{a}|^2$ invaryant.

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{a}' = \begin{pmatrix} a_z' & a_x' - i a_y' \\ a_x' + i a_y' & -a_z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_z & (a_x - i a_y)(\cos\phi + i\sin\phi) \\ (a_x + i a_y)(\cos\phi - i \sin\phi) & -a_z \end{pmatrix}$$

$a_z' = a_z$ $\quad a_x' = a_x \cos\phi + a_y \sin\phi$

$\quad a_y' = a_y \cos\phi - a_x \sin\phi$

$\circlearrowleft$ saat ibrelerinin zıttı yönde z-ekseni etrafında dönme.

1.4 a) $\mathrm{tr}(XY) = \sum_{a'} \langle a'|XY|a'\rangle = \sum_{a'}\sum_{a''} \langle a'|X|a''\rangle\langle a''|Y|a'\rangle$

$$= \sum_{a''}\sum_{a'} \langle a''|Y|a'\rangle\langle a'|X|a''\rangle$$

$$= \sum_{a''} \langle a''|YX|a''\rangle = \mathrm{tr}(YX)$$

b) $\langle (XY)^\dagger a'|a''\rangle = \langle a'|[(XY)^\dagger]^\dagger|a''\rangle = \langle a'|XY|a''\rangle$

$$= \langle X^\dagger a'|Y a''\rangle = \langle Y^\dagger X^\dagger a'|a''\rangle$$

$$\Rightarrow (XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$$

c) $e^{if(A)}|\alpha\rangle = \left(1 + if(A) - \frac{[f(A)]^2}{2!} + \dots\right)|\alpha\rangle$

$$= e^{if(\alpha)}|\alpha\rangle$$

$A|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$

$$\Rightarrow e^{if(A)} = \sum_\alpha e^{if(\alpha)}|\alpha\rangle\langle\alpha|$$

d) $\sum_{a'} \psi^*_{a'}(\vec{x}')\psi_{a'}(\vec{x}'') = \sum_{a'} \langle \vec{x}'|a'\rangle^* \langle \vec{x}''|a'\rangle$

$$= \sum_{a'} \langle a'|\vec{x}'\rangle\langle \vec{x}''|a'\rangle$$

$$= \sum_{a'} \langle \vec{x}''|a'\rangle\langle a'|\vec{x}'\rangle = \langle \vec{x}''|\vec{x}'\rangle$$

$$= \delta(\vec{x}'' - \vec{x}')$$

BS K

1.5 a) $$|\alpha\rangle\langle\beta| = \sum_{a'}\sum_{a''} |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle\langle\beta|a''\rangle\langle a''|$$

$$= \sum_{a'}\sum_{a''} |a'\rangle\langle a''| \left(\langle a'|\alpha\rangle \langle a''|\beta\rangle^* \right)$$

$$|\alpha\rangle\langle\beta| \doteq \left[\langle a^{(i)}|\alpha\rangle\langle a^{(j)}|\beta\rangle^* \right]$$

b) $|\alpha\rangle = |S_z = \hbar/2\rangle = |+\rangle$

$$|\beta\rangle = |S_x = \hbar/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle + |-\rangle \right]$$

$$|\alpha\rangle\langle\beta| = \begin{pmatrix} \langle+|\alpha\rangle\langle+|\beta\rangle^* & \langle+|\alpha\rangle\langle-|\beta\rangle^* \\ \langle-|\alpha\rangle\langle+|\beta\rangle^* & \langle-|\alpha\rangle\langle-|\beta\rangle^* \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.6. $A|i\rangle = a_i|i\rangle \qquad A|j\rangle = a_j|j\rangle$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|i\rangle + |j\rangle \right) \Rightarrow A|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_i|i\rangle + a_j|j\rangle \right)$$

A hermitesch $\Rightarrow$ a_i, a_j reell $\quad a_i \neq a_j$

$|i\rangle$ $|j\rangle$ degeneriert $\Rightarrow$ $(a_i = a_j = a)$

$$A|\psi\rangle = a\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|i\rangle + |j\rangle \right] = a|\psi\rangle$$

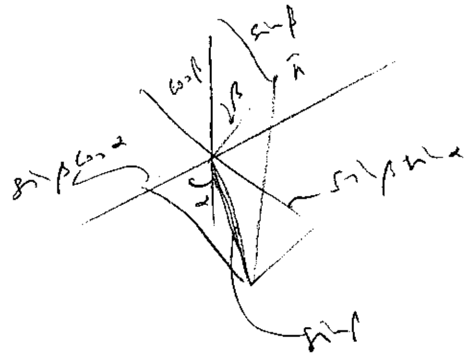
BS K

(1.8.) ortonormallik $\langle+|+\rangle = 1 = \langle-|-\rangle$

$\langle+|-\rangle = \langle-|+\rangle = 0$

$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk} S_k \hbar$

$\{S_i, S_j\} = (\hbar^2/2)\delta_{ij}$



(1.9.) $\hat{n} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j} + n_z \hat{k}$ olsun

$\Rightarrow n_x = \sin\beta\cos\alpha \quad n_y = \sin\beta\sin\alpha \quad n_z = \cos\beta$

$\vec{S}\cdot\hat{n} = \sin\beta\cos\alpha\, S_x + \sin\beta\sin\alpha\, S_y + \cos\beta\, S_z$

$|\vec{S}\cdot\hat{n};+\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$ $\quad |a|^2 + |b|^2 = 1$ norma'

tanım

$\Rightarrow \vec{S}\cdot\hat{n}\,|\vec{S}\cdot\hat{n};+\rangle = \frac{\hbar}{2}|\vec{S}\cdot\hat{n};+\rangle$

$S_x = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right)$

$S_y = \frac{i\hbar}{2}\left(-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right)$

$S_z = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right)$

$\Rightarrow (\sin\beta\cos\alpha - i\sin\beta\sin\alpha)b + \cos\beta\, a = a$

$(\sin\beta\cos\alpha + i\sin\beta\sin\alpha)a - \cos\beta\, b = b$

$a = \cos\frac{\beta}{2} e^{i\theta_a}$ $\quad a = \frac{\sin\beta\, e^{-i\theta_a}\, b}{(1-\cos\beta)}$ ise $e^{i(\theta_b - \theta_a)} = e^{i\alpha}$

$b = \sin\frac{\beta}{2} e^{i\theta_b}$ $\quad \theta_a = 0$ seç $\quad \theta_b = \alpha$

$|\vec{S}\cdot\hat{n};+\rangle = \cos\frac{\beta}{2}|+\rangle + \sin\frac{\beta}{2} e^{i\alpha}|-\rangle$

6

1.10 $H = a\left(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| \right)$

$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ olsun.

$\langle 1| = (1 \ 0)$ $\langle 2| = (0 \ 1)$

$\Rightarrow H = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\langle 1|H|1\rangle = a = \langle 1|H|2\rangle$

$= \langle 2|H|1\rangle$

$= -\langle 2|H|2\rangle$

$(H - \lambda I)X = 0$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\det(H - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}\,a$ $x_2 = (\pm\sqrt{2} - 1)\, x_1$

$X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}$ normalizasyon $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2(2 \mp \sqrt{2})}}$

$|\psi_1\rangle = \frac{|1\rangle + (\sqrt{2} - 1)|2\rangle}{\sqrt{2(2 - \sqrt{2})}}$ $\lambda = \sqrt{2}\,a$

$|\psi_2\rangle = \frac{|1\rangle - (\sqrt{2} + 1)|2\rangle}{\sqrt{2(2 + \sqrt{2})}}$ $\lambda = -\sqrt{2}\,a$

BS K

(1.11.)

$$H = \frac{1}{2}(H_{11}+H_{22})\left(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|\right) + \frac{1}{2}(H_{11}-H_{22})\left(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|\right) + H_{12}\left(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right)$$

sağ taraftaki 3 op. I, S_z ve S_x gibi davranır.

$\frac{H_{11}+H_{22}}{2}$ iki düzeyin çekim merkezi:

bunu şu an için unutalım ve spin 1/2 problemi ile karşılaştıralım (9. prob)

$$\vec{S}\cdot\hat{n} = \frac{\hbar}{2}n_x\left(|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\right) + \frac{\hbar}{2}n_y\left(-i|+\rangle\langle -| + i|-\rangle\langle +|\right) + \frac{\hbar}{2}n_z\left(|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|\right)$$

Analoji

$$\frac{\hbar}{2}n_x \to H_{12}$$
$$\frac{\hbar}{2}n_y \to 0$$
$$\frac{\hbar}{2}n_z \to \frac{1}{2}(H_{11}-H_{22})$$

enerji özketlerinden biri $\cos\frac{\beta}{2}|1\rangle + \sin\frac{\beta}{2}|2\rangle$

$$\beta = \tan^{-1}(n_x/n_z) \qquad \beta = \tan^{-1}\frac{2H_{12}}{H_{11}-H_{22}}$$

Diğer enerji özketi ortogonallikten, ya da $\beta \to \beta+\pi$

$$-\sin(\beta/2)|1\rangle + \cos(\beta/2)|2\rangle$$

BS K

8

Enerji özdeğerleri

$$\begin{pmatrix} 1/2(H_{11}-H_{22}) & H_{12} \\ H_{12} & -1/2(H_{11}-H_{22}) \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\hbar}{2}n_x\right)^2 + \left(\frac{\hbar}{2}n_y\right)^2 = \hbar^2/4 \quad \text{özdeğer } \hbar/2$$

analoji ile $\left(1/2\,(H_{11}-H_{22})^2 + H_{12}^2\right)^{1/2}$

$$1/2\,(H_{11}+H_{22}) \pm \left[\,1/2\,(H_{11}-H_{22})^2 + H_{12}^2\,\right]^{1/2}$$

$H_{12}=0 \Rightarrow \beta = 0$ yada π

$$1/2\,(H_{11}+H_{22}) \pm 1/2\,(H_{11}-H_{22}) = \begin{cases} H_{11} \\ H_{22} \end{cases}$$

BS K

1.14. a) $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = 0 \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

dejenerelik yok.

b) Bunlar $J_x = \hbar A$ spin 1 parçacığın özdeğer ve özvektörleridir.

BS K

1.33. (i) $\langle p'|x|\alpha\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\langle p'|\alpha\rangle$

$$\langle p'|x|p''\rangle = \int \langle p'|x|x'\rangle\langle x'|p''\rangle dx'$$

$$= \int x' dx' \langle p'|x'\rangle\langle x'|p''\rangle$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\int dx' x' e^{-ix'(p'-p'')/\hbar}$$

$$\delta(p'-p'') = \frac{1}{2\pi\hbar}\int dx' e^{-ix'(p'-p'')/\hbar}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial p'}\delta(p'-p'') = \frac{1}{2\pi\hbar}\int \frac{dx' x'}{\hbar i} e^{-ix'(p'-p'')/\hbar}$$

$$\Rightarrow \langle p'|x|p''\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\delta(p'-p'')$$

$$\langle p'|x|\alpha\rangle = \int dp'' \langle p'|x|p''\rangle\langle p''|\alpha\rangle$$

$$= \int dp'' i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\delta(p'-p'')\langle p''|\alpha\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\langle p'|\alpha\rangle$$

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$$

BS K

(ii) $\langle \beta | x | \alpha \rangle = \int dp' \, \phi_\beta^*(p') \, i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \phi_\alpha(p')$

$$= \int dp' \langle \beta | p' \rangle \langle p' | x | \alpha \rangle = \int dp' \langle \beta | p' \rangle \, i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \langle p' | \alpha \rangle$$

$$= \int dp' \, \phi_\beta^\dagger(p') \, i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \phi_\alpha(p')$$

b) $p \, | p' \rangle = p' | p' \rangle$

$$| p', \Xi \rangle = e^{i x \Xi / \hbar} | p' \rangle$$

mom. öteler mi? öyleyse değişir mi?

$$p \, | p', \Xi \rangle = p \, e^{i x \Xi / \hbar} | p' \rangle$$

$$= \{ \exp(\ ) \, p + \{ p, \exp(\ ) \} \} | p' \rangle$$