2.1. Zaman Evrimi ve Schrödinger Denklemi

Aklımızda tutmamız gereken en önemli nokta, kuantum mekaniğinde zamanın bir operatör değil bir parametre olduğudur.

Zaman Evrim Operatörü

Temel problemimiz bir durum ketinin zamanla nasıl değiştiğidir? t_0 da $|\alpha\rangle$ ile temsil edilen durumumuz olsun. Daha sonraki bir anda aynı $|\alpha\rangle$ durumunda olmasını beklemeyiz.

$$|\alpha, t_0; t\rangle \qquad (t > t_0)$$

olsun. Zaman sürekli bir parametre olduğundan,

$$\lim_{t \to t_0} |\alpha, t_0; t\rangle = |\alpha\rangle$$

$$|\alpha, t_0; t_0\rangle = |\alpha, t_0\rangle$$

Temel görevimiz

$$|\alpha, t_0\rangle = |\alpha\rangle \xrightarrow{\text{zaman evrimi}} |\alpha, t_0; t\rangle$$

durum ketinin zaman evrimini incelemektir. Başka bir deyişle, $t_0 \to t$ zaman yerdeğiştirmesi altında durum keti nasıl değişir.

BS K

Öteleme durumunda olduğu gibi, iki ket

$$|\alpha, t_0; t\rangle = \mathcal{U}(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle$$

zaman-evrim operatörü olarak adlandıracağımız bir operatörle ilişkilidir.

<u>Üniterlik</u>:

$$|\alpha, t_0\rangle = \sum_{a'} C_{a'}(t_0)|a'\rangle$$

$t > t_0$

$$\Rightarrow |\alpha, t_0; t\rangle = \sum_{a'} C_{a'}(t)|a'\rangle$$

$$|C_{a'}(t)| \neq |C_{a'}(t_0)|$$

aynı kalmasını bekleyemeyiz.

$$\sum_{a'} |C_{a'}(t_0)|^2 = \sum_{a'} |C_{a'}(t)|^2$$

Başka bir deyişle durum keti başlangıçta normalize ise, daha sonrada normalize kalmaya devam etmeli.

$$\langle\alpha, t_0|\alpha, t_0\rangle = 1 \Rightarrow \langle\alpha, t_0; t|\alpha, t_0; t\rangle = 1$$

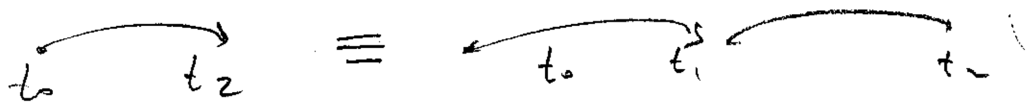
Ötelemede olduğu gibi, bu özellik üniterlikle garantilenir

$$\mathcal{U}^\dagger(t, t_0)\,\mathcal{U}(t, t_0) = 1$$

BS K

Kompozisyon özelliği :

$$U(t_2,t_0)=U(t_2,t_1)\,U(t_1,t_0) \qquad (t_2>t_1>t_0)$$



Sonsuz küçük zaman evrim op.'ü, $U(t_0+dt,\, t_0)$

$$|\alpha, t_0 ; t_0+dt\rangle = U(t_0+dt, t_0)\,|\alpha, t_0\rangle$$

(süreklilik $\lim_{t\to t_0} |\alpha, t_0 ; t\rangle = |\alpha\rangle$ den dolayı)

$$\lim_{dt\to 0} U(t_0+dt, t_0) = 1$$

ve $U(t_0+dt, t_0)$ ve 1 arasındaki farkın dt basamağında olmasını bekleriz.

$$U(t_0+dt,\, t_0) = 1 - i\Omega\, dt$$

$$\Omega^\dagger = \Omega \quad \text{Hermitsel}$$

Kompozisyon

$$U(t_0+dt_1+dt_2,\, t_0) = U(t_0+dt_1+dt_2,\, t_0+dt_1)\,U(t_0+dt_1,\, t_0)$$

özdeşlik op.'den dt mertebesinde farkeder.

$$U^\dagger(t_0+dt, t_0)\,U(t_0+dt, t_0) \cong (1+i\Omega^\dagger dt)(1-i\Omega dt) \simeq 1$$

BS K

$[\Omega] \sim [\text{frekans}]$ ya da $[\text{zaman}]^{-1}$

$E = \hbar\omega$ Planck–Einstein bağıntısı.

Klasik mek.'den Hamiltonien'in zaman eviminin jeneratörü olduğunu anımsayalım.

$$\Omega = \frac{H}{\hbar}$$

$$U(t_0 + dt, t_0) = 1 - \frac{iH\,dt}{\hbar} \qquad H^{\dagger} = H$$

Schrödinger Denklemi:

$$t_1 \to t, \quad t_2 \to t + dt$$

$$U(t+dt, t_0) = U(t+dt, t)\, U(t, t_0) = \left(1 - \frac{iH\,dt}{\hbar}\right) U(t, t_0)$$

$t - t_0$ sonsuz küçük olmak zorunda değil.

$$U(t+dt, t_0) - U(t, t_0) = -i\left(\frac{H}{\hbar}\right) dt\, U(t, t_0)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H\, U(t, t_0)$$

zaman evrim op.'ü için Schrödinger denk.'i.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t,t_0)|\alpha,t_0\rangle = H\, U(t,t_0)|\alpha,t_0\rangle$$

$$\neq i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\alpha,t_0,t\rangle = H|\alpha,t_0;t\rangle$$

$U(t,t_0)$ verilmiş ise ve ek olarak bunun $|\alpha,t_0\rangle$ a nasıl etkidiğini biliyor isek, yukarıdaki denk.'i düşünmemize gerek yok!. Yapmamız gereken tek şey $U(t,t_0)$'ı $|\alpha,t_0\rangle$ a uygulamaktır. Bu anlamda t deki durumu elde ederiz. O zaman ilk işimiz, Schrödinger denk.'inin zaman evrim op.'ü için formel çözümlerini türetmektir. Ayrı olarak türetilebilecek 3 durum vardır.

Durum 1: Hamiltonien op. zaman'dan bağımsızdır. t parametresi değişse bile H op.'ü değişmez. 2.1.5.'e çözüm

$$U(t,t_0) = e^{-iH(t-t_0)/\hbar}$$

$$e^{-iH(t-t_0)/\hbar} = 1 - \frac{iH(t-t_0)}{\hbar} + \left(\frac{(-i)^2}{2}\right)\left[\frac{H(t-t_0)}{\hbar}\right]^2 + \cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\quad \right) = \frac{-iH}{\hbar} + \frac{(-i)^2}{2}\, 2\left(\frac{H}{\hbar}\right)^2 (t-t_0) + \cdots$$

→ Schr. denk.'ini sağlar. $t \to t_0$ iken sınır şartı da sağlanır, dolayısıyla bu $\mathbb{1}$ ' op.'e indirgenir. 2.1.28.'i elde etmenin alternatif bir yolu

$$\lim_{N\to\infty}\left[1 - \frac{(iH/\hbar)(t-t_0)}{N}\right]^N = e^{-iH(t-t_0)/\hbar}$$

Durum 2: H zaman bağımlı ama farklı zamanlardaki H'ler sıra değiştirir. 2.1.25'e formal çözüm,

$$\mathcal{U}(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' H(t')}$$

2.1.29'da $H(t-t_0) \longrightarrow \int_{t_0}^{t} dt' H(t')$

Durum 3: Farklı zamanlardaki H'ler sıra değiştirmez. Formal çözüm

$$\mathcal{U}(t,t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{\hbar} \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H(t_1) \ldots H(t_n)$$

Dyson serisi. (5. böl.'de işlenecek)

Elementer uygulamalarda Durum 1 pratik olarak ilgi çekicidir. Bu böl.'ün geri kalanında H'nin zamandan bağımsız olduğunu varsayacağız.

Enerji Özketleri:

Zaman evrim op.'nün $|\alpha\rangle$ ketine etkisini incelemek için, önce bunun temel ketlere etkisini incelememiz gerekir. Bu özellikle

$$[A, H] = 0$$

olduğunda, yani temel ketler A'nın özketleri olarak kullanıldığında, basittir.

A'nın özketleri H'nin de özketleridir ve enerji

$$H|a'\rangle = E_{a'}|a'\rangle$$

$E_{a'}$ (özdeğerler)

özketleri olarak adlandırılırlar. Zaman evrim op.'nü $|a'\rangle\langle a'|$ cinsinden açabiliriz:

$$e^{-iHt/\hbar} = \sum_{a'}\sum_{a''} |a''\rangle\langle a''| \, e^{-iHt/\hbar} \, |a'\rangle\langle a'|$$

$$= \sum_{a'} |a'\rangle \, e^{-iE_{a'}t/\hbar} \langle a'|$$

Bu formda yazılmış zaman evrim op.'ü başlangıç ketinin $\{|a'\rangle\}$ cinsinden açılımı bir kere biliniyorsa her başlangıç-değer problemini çözmemize yarar. Örneğin,

$$|\alpha, t_0=0\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle = \sum_{a'} C_{a'}|a'\rangle$$

$$|\alpha, t_0; t\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\alpha, t_0=0\rangle$$

$$= \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle \, e^{-iE_{a'}t/\hbar}$$

$$C_{a'}(t=0) \longrightarrow C_{a'}(t) = C_{a'}(t=0)\, e^{-iE_{a'}t/\hbar}$$

BS K

modülü değişmedi.

Özel ilgi çekici bir durum $\{|a'\rangle\}$'nin başlangıç durumu olduğunda ortaya çıkar:

$$|\alpha, t_0=0\rangle = |a'\rangle$$

$$\Rightarrow \quad |\alpha, t_0=0; t\rangle = |a'\rangle e^{-iE_{a'}t/\hbar}$$

eğer sist. A ve H'nin başlangıçta eşzamanlı bir özdurumunda ise tüm zamanlarda öyle kalır.

A gibi birden fazla H ile sıradeğiştirilen gözlenebilir olabilir;

$$[A,B]=[B,C]=[A,C]=\dots=0$$

$$[A,H]=[B,H]=[C,H]=\dots=0$$

$$e^{-iHt/\hbar}=\sum_{K'}|K'\rangle e^{-iE_{K'}t/\hbar}\langle K'|$$

kollektif indis

$E_{K'}$; $a', b', c', \dots$ belirlendiğinde belirlenir.

BS K

Beklenen Değerlerin Zaman Bağımlılığı.

Başlangıç durumunun H ile sıradeğiştiren bir A gözlenebilirinin özdurumlarından birinde olduğunu varsayalım. A ya da H ile sıradeğiştirme zorunluluğu olmayan bir B gözlenebilirinin beklenen değerine bakalım:

$$|a', t_0=0; t\rangle = U(t,0)\,|a'\rangle$$

$$\langle B\rangle = \left(\langle a'|\,U^{\dagger}(t,0)\cdot B\cdot U(t,0)\,|a'\rangle\right)$$

$$= \langle a'|\,e^{iE_{a'}t/\hbar}\, B\, e^{-iE_{a'}t/\hbar}\,|a'\rangle$$

$$= \langle a'|B|a'\rangle$$

zamanla değişmez. Bu yüzden bir enerji özdurumu bir durağan durum olarak adlandırılır.

Beklenen değer enerji özdurumların süperpozisyonuna göre ya da durağan olmayan duruma göre durum ile

$$|\alpha, t_0=0\rangle = \sum_{a'} c_{a'}\,|a'\rangle$$

$$\langle B\rangle = \left[\sum_{a'} c^{*}_{a'}\,\langle a'|\,e^{iE_{a'}t/\hbar}\right]\cdot B\cdot\left[\sum_{a''} c_{a''}\,e^{-iE_{a''}t/\hbar}\,|a''\rangle\right]$$

$$= \sum_{a'}\sum_{a''} c^{*}_{a'}\,c_{a''}\,\langle a'|B|a''\rangle\, e^{-i(E_{a''}-E_{a'})t/\hbar}$$

osilasyon yapan terimlerden oluşur. frekans (N. Bohr frekans şartı)

$$\omega_{a''a'} = (E_{a''}-E_{a'})/\hbar$$

Spin presesyonu :

$$H = -\frac{e}{m_e c}\,\vec{S}\cdot\vec{B}$$

statik, üniform $(\hat{z})$

$$H = -\frac{eB}{m_e c}\,S_z$$

$[S_z, H]=0$ S_z özdurumları enerji özdurumlarıdır ve

$$E_{\pm} = \mp\frac{e\hbar B}{2m_e c}\,,\quad S_z\pm \text{ için.}$$

$$\omega = \frac{|e|B}{m_e c} \Rightarrow H = \omega S_z$$

Zaman evrimi hakkında tüm bilgi evrim-op.'undadır

$$U(t,0) = \exp\left(-i\omega S_z t/\hbar\right)$$

Bunun ilk durum uygulaması. İlk keti açmada kullanmamız gereken temel ket'ler, S_z'nin $|+\rangle$ ve $|-\rangle$ özket'leridir. $t=0$'da sistem

$$|\alpha\rangle = C_+|+\rangle + C_-|-\rangle$$

ile karakterize edilsin.

$$|\alpha, t_0, t\rangle = C_+ e^{-i\omega t/\hbar}|+\rangle + C_- e^{+i\omega t/\hbar}|-\rangle$$

$$H|\pm\rangle = \frac{\pm\hbar\omega}{2}|\pm\rangle \text{ kullanıldı.}$$

BS K

$C_+ = 1$ $\quad C_- = 0$ olsun $\quad \uparrow$ başlangıçta

$\sum$ uygulandığında $\quad |\alpha, t_0 = 0; t\rangle = C_+ e^{-i\omega t/\hbar} |+\rangle$

hala $\uparrow$ çünkü <u>durağan durum</u>.

<u>2. durum</u> $\quad C_+ = C_- = 1/\sqrt{2}$ $\quad$ sistem $S_x +$ da olsun.

$$|\langle S_x \pm | \alpha, t_0 = 0; t\rangle|^2 = \left| \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \langle + | \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \langle - | \right) \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t/2} |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega t/2} |-\rangle \right] \right|^2$$

$$= \left| \frac{1}{2} e^{-i\omega t/2} \pm \frac{1}{2} e^{i\omega t/2} \right|^2$$

$$= \begin{cases} \cos^2 \frac{\omega t}{2} & S_x + \\ \sin^2 \frac{\omega t}{2} & S_x - \end{cases}$$

$$\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2} \cos \omega t$$

$$\langle S_y \rangle = \frac{\hbar}{2} \sin \omega t$$

$$\langle S_z \rangle = 0$$

BS K

Korelasyon Genliği ve Enerji-Zaman Belirsizlik Bağıntısı:

Farklı zamanlardaki durum ketleri birbirleri ile nasıl korelasyon halindedir.

$$|\alpha\rangle \longrightarrow |\alpha, t_0=0; t\rangle$$

$(t=0)$ Korelasyon! $t=t$

$$C(t) \equiv \langle \alpha | \alpha, t_0=0; t\rangle$$

$$= \langle \alpha | \mathcal{U}(t,0) | \alpha \rangle$$

(kor. genliği) Modülü farklı zamanlardaki durum ketleri arasında "benzeyişin" nitel bir ölçüsüdür.

Örnek: $|\alpha\rangle$ başlangıç keti H'nin bir özketi olsun.

$$C(t) = \langle a' | a', t_0=0; t\rangle = e^{-iE_{a'}t/\hbar}$$

modülü birim. durağan durumlar arasında korelasyon yok!

Süperpozisyon ile temsil edildiğinde,

$$C(t) = \left(\sum_{a'} c_{a'}^{*} \langle a'|\right)\left[\sum_{a''} c_{a''} e^{-iE_{a''}t/\hbar} |a''\rangle\right]$$

$$= \sum_{a'} |c_{a'}|^2 e^{-iE_{a'}t/\hbar}$$

t'nin büyük değerleri için kuvvetli korelasyon var.

BS K

Durum ketinin yarı-sürekli spektrum sergileyen özdeş enerjili birçok özketin bir süperpozisyonu olarak ele aldığımızı varsayalım.

$$\underbrace{\sum_{a'} \to \int dE\, \rho(E)}_{\text{en. özdu. yoğ.}} \qquad C_{a'} \to g(E)\Big|_{E \simeq E_{a'}}$$

$$C(t) = \int dE\, |g(E)|^2 \rho(E)\, e^{-iEt/\hbar}$$

$$\int dE\, \underbrace{|g(E)|^2 \rho(E)}_{} = 1 \quad \text{normalizasyon.}$$

realistik fizik. bir durumda $E = E_0$ civarında pik yapar. (ΔE genişlikli)

$$C(t) = e^{-iE_0 t/\hbar} \int dE\, |g(E)|^2 \rho(E)\, e^{-i(E-E_0)t/\hbar}$$

t büyüdükçe integrand osilasyon yapar (hızlıca) ($|E-E_0|$ enerji aralığı $\hbar/t$'ye kıyasla küçük olmadıkça).

$|E-E_0| \cong \hbar/t$ geçerli olduğu aralık ΔE'den daha dar ise $C(t)$ ye katkı gelmez. Korelasyon genliğinin modülünün 1'den dikkate değer bir şekilde farklı olmaya başladığı karakteristik zaman

$$t \simeq \hbar / \Delta E$$

$$\boxed{\Delta t\, \Delta E \simeq \hbar}$$

BS K

2.2. Heisenberg Resmine karşı Schrödinger Resmi

Evvelki kesimde, durum ketlerini etkileyen zaman-evrim operatörünü gözönüne alarak zaman gelişimi kavramını orta_ya koyduk. Q. dinamiğine bu yaklaşım Schrödinger resmi olarak bilinir. Durum ketlerinden ziyade, gözlenebilir_lerin zamanla değiştiği Q. D. 'nin diğer bir formülasyonu da Heisenberg resmi olarak bilinir.

Şimdiye kadar, öteleme op. ve zaman evrim op. 'ü olmak üzere 2 üniter op. ile ilgilendik.

$$|\alpha\rangle \rightarrow \underbrace{U}_{\mathcal{T}(dx')\ \text{ya da}\ U(t,t_0)}|\alpha\rangle$$

$$\langle\beta|\alpha\rangle \rightarrow \langle\beta|U^{\dagger}U|\alpha\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle \quad \text{değişmez.}$$

$$\langle\beta|X|\alpha\rangle \rightarrow \left(\langle\beta|U^{\dagger}\right)\cdot X\cdot\left(U|\alpha\rangle\right) = \langle\beta|U^{\dagger}XU|\alpha\rangle$$

çarpmanın assosyatif oluşundan,

$$\left(\langle\beta|U^{\dagger}\right)\cdot X\cdot\left(U|\alpha\rangle\right) = \langle\beta|\cdot U^{\dagger}XU\cdot|\alpha\rangle$$

1.) $|\alpha\rangle \rightarrow U|\alpha\rangle$ operatörler değişmez

2.) $X \rightarrow U^{\dagger}XU$ durum ketleri değişmez küçük bir örnek burada faydalı olabilir. $T(d\vec{x}')$ sonsuz küçük öteleme op.'ünü ele aldım. Bu durum ketlerini etkiler, konum op.'ünü etkilemez.

$$|\alpha\rangle \longrightarrow \left(1 - \frac{i\vec{p}\cdot d\vec{x}'}{\hbar}\right)|\alpha\rangle$$

$$x \to x$$

2.) yi alırsak,

$$|\alpha\rangle \longrightarrow |\alpha\rangle$$

$$x \longrightarrow \left(1 + \frac{i\vec{p}\cdot d\vec{x}'}{\hbar}\right) x \left(1 - \frac{i\vec{p}\cdot d\vec{x}'}{\hbar}\right)$$

$$= x + \frac{i}{\hbar}[\vec{p}\cdot d\vec{x}', \vec{x}] = x + d\vec{x}'$$

x'in beklenen değeri aynı kalır (ödev)

Schrödinger ve Heisenberg Resimlerinde Durum Ketleri ve Gözlenebilirler.

$U(t,t_0)$ daki t_0'ı $t_0 = 0$ almak daha uygundur

$$U(t, t_0=0) = U(t) = e^{-iHt/\hbar}$$

2.) yaklaşımı ile

$$A^{(H)}(t) \equiv U^{\dagger}(t)\, A^{(S)}\, U(t)$$

$t=0$'da $\quad A^{(H)}(0) = A^{(S)}$

$t=0$ 'da durum ketleri de çakışır.

$$|\alpha, t_0=0; t\rangle_H = |\alpha, t_0=0\rangle$$

zamandan bağımsız. Bu Schrödinger resmi ket'iyle dramatik zıtlık içerisindedir.

$$|\alpha, t_0=0; t\rangle_S = U(t)\,|\alpha, t_0=0\rangle$$

$${}_S\langle \alpha, t_0=0; t|\, A^{(S)}\, |\alpha, t_0=0; t\rangle_S = \langle \alpha, t_0=0|\, U^\dagger A^{(S)} U\, |\alpha, t_0=0\rangle$$

$$= {}_H\langle \alpha, t_0=0; t|\, A^{(H)}\, |\alpha, t_0=0, t\rangle_H$$

Heisenberg Hareket Denk.'i

$A^{(S)}$ zamana açık bağımlı değil: olduğunu varsayarak

$$\frac{dA^{(H)}}{dt} = \frac{\partial U^\dagger}{\partial t} A^{(S)} U + U^\dagger A^{(S)} \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$= -\frac{1}{i\hbar} U^\dagger H U U^\dagger A^{(S)} U + \frac{1}{i\hbar} U^\dagger A^{(S)} U U^\dagger H U$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\left[A^{(H)}, U^\dagger H U\right] \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} H U$$

$$H^{(H)} = U^\dagger H U$$

genellikle $[U, H]=0 \Rightarrow U^\dagger H U = H$

$$\frac{dA^{(H)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[A^{(H)}, H\right]$$

BS K

$$\frac{dA}{dt} = [A, H]_{cl}$$ Goldstein 1980, 405–406

Dirac kuantizasyon kuralının geçerlilikte olduğunu gibi ler daha göreceğiz.
(spin'in özdeğerinin yolluğu ... konu!)

$$\frac{[\ ,\ ]}{i\hbar} \longrightarrow [\ ,\ ]_{cl}$$

Serbest Parçacıklar ; Ehrenfest teoremi

Klasik x_i ve p_i $\longrightarrow$ Q.M. cal op. ler ile değiştirilir.

sıradeğiştirmeyen op.'lerden dolayı ne zaman bir güçlükle karşılaşsak H'nin hermitsel olmasını isteyerek bunu aşarız. Örneğin klasik $H = xp$ çarpımı $H = \frac{1}{2}(xp + px)$ ile yazarız. Fiziksel ast.'ın klasik analoğu olmadığı zaman, Hamilton op.'nin yapısını tahmin ederiz. Ampirik gözlemlerimiz ile uyuşan sonuçlara yol açan Hamilton op.'nü elde edene kadar çeşitli formlar deneriz.

Pratik uygulamalarda x_i (ya da p_i'nin) x_j ve p_j'nin fonk.ları ile komütatörünü hesaplamaya ihtiyaç duyarız.

$$[x_i, F(\vec{p})] = i\hbar \frac{\partial F}{\partial p_i}$$

$$[p_i, G(\vec{x})] = -i\hbar \frac{\partial G}{\partial x_i}$$

BS K

m kütleli serbest parçacık Hamiltonieni,

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} = \frac{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}{2m}$$

H üst indisini ommit etmiş olsak bile, x_i, p_i'yi Heisenberg resminde konum ve mom op.'leri olarak görürüz.

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[p_i, H] = 0$$

p_i hareket sbt.'i. $p_i(t) = p_i(0)$

$A^{(H)}$ H'yle ne zaman sıradeğişirse o zaman o hareket sbt.'i

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[x_i, H] = \frac{1}{i\hbar}\frac{1}{2m}\, i\hbar \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\sum_{j=1}^{3} p_j^2\right)$$

$$= \frac{p_i}{m} = \frac{p_i(0)}{m}$$

$$\Rightarrow \quad x_i(t) = x_i(0) + \frac{p_i(0)}{m}t$$

$$[x_i(0), x_j(0)] = 0 \quad \text{eşit zamanlarda}$$

$$[x_i(t), x_i(0)] = \left[\frac{p_i(0)t}{m}, x_i(0)\right] = \frac{-i\hbar t}{m}$$

$$\langle(\Delta x_i)^2\rangle_t \langle(\Delta x_i)^2\rangle_{t=0} \geq \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2}$$

BS K

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V(\vec{x})$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[p_i, V(\vec{x})\right] = -\frac{\partial}{\partial x_i} V(\vec{x})$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{p_i}{m}$$

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{1}{i\hbar}\left[\frac{dx_i}{dt}, H\right] = \frac{1}{i\hbar}\left[\frac{p_i}{m}, H\right] = \frac{1}{m}\frac{dp_i}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} V(\vec{x}) \qquad \text{II. yasa.}$$

$$m\frac{d^2\langle x\rangle}{dt^2} = -\langle \vec{\nabla} V(\vec{x})\rangle \qquad \text{Ehrenfest teoremi}$$

$\hbar$ yok. Dalga paketinin merkezi $V(\hat{x})$'e maruz kalmış klasik parçacık gibi hareket eder.

Temel Ketler ve Geçiş Genlikleri :

Şimdiye kadar temel ketlerin zamanla nasıl evrim geçirdiğini sormaktan kaçındık.

$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle$$

zamanla ne olur?

SP'de A değişmez, öyle ise temel ketler, örneğin $t=0$ da bu özdeğer denk.-ine göre olarak elde edilmiş, değişmez kalmalı.

HP'de;

$$A^{(H)}(t) = U^{\dagger} A(0)\, U$$

$$U^{\dagger} A(0)\, U\, U^{\dagger} |a'\rangle = a' U^{\dagger} |a'\rangle$$

$$A^{(H)} \left(U^{\dagger} |a'\rangle \right) = a' \left(U^{\dagger} |a'\rangle \right)$$

$\{ U^{\dagger} |a'\rangle \}$ H.P.da temel ketler olarak kullanılmalı.

$$|a', t\rangle_H = U^{\dagger} |a'\rangle$$

$U^{\dagger}$ görülmesinin sebebi (U'dan farklı olarak) S.P. daki durum ketleri ile
zıt olarak döndüğünü gösterir.
kıyaslandığında, HP temel ketlerinin

$|a', t\rangle_H$ yanlış işaretli Sch. Denk.'ini sağlar,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |a', t\rangle_H = -H\, |a', t\rangle_H$$

Özdeğerler değişmez.

$$A^{(H)}(t) = \sum_{a'} |a', t\rangle_H\, a'\, {}_H\langle a', t|$$

$$= \sum_{a'} U^{\dagger} |a'\rangle\, a' \langle a'| U$$

$$= U^{\dagger} A^{(S)} U \quad \checkmark$$

BS K

$$C_{a'}(t) = \underbrace{\langle a'|}_{\text{temel bra}} \cdot \big(\underbrace{U|\alpha, t_0=0\rangle}_{\text{durum ket}}\big) \quad SP$$

aynı

$$C_{a'}(t) = \big(\underbrace{\langle a'|U}_{\text{temel bra}}\big) \underbrace{|\alpha, t_0=0\rangle}_{\text{durum keti}} \quad HP$$

A gözlenebilirinin ~~bir özdurumunda~~ a' özdeğerli bir özdurumda $t=0$ da fiziksel sist.'in hazırlanmış olduğunu varsayın. $t > t=0$ da, B gözlenebilirinin b' özdeğerli bir özdurumda bulunabilmesi için sistemin geçiş genliği olarak bilinen olasılık genliği nedir?

A ve B aynı ya da farklı olabilir.

SP'da $|a'\rangle$ ve $|b'\rangle$ temel ketleri zamanla değişmezken t anında durum keti $U|a'\rangle$ ile verilir.

$$\underbrace{\langle b'|}_{\text{temel ket}} \cdot \big(\underbrace{U|a'\rangle}_{\text{durum keti}}\big) \quad \text{geçiş genliği için.}$$

Bununla zıt olarak HP da tüm zamanlarda $|a'\rangle$ olarak kalan durum keti durağandır. Yani geçiş genliği,

$$\big(\underbrace{\langle b'|U}_{\text{temel ket}}\big) \cdot \underbrace{|a'\rangle}_{\text{durum keti}}$$

aynı

$$\langle b'|U(t,0)|a'\rangle$$

	SP	HP
Durum keti	Hareket ediyor	Durağan
Gözlenebilir	Durağan	Hareket eder
Temel ket	"	" " zıt olarak

BS K

2.3. Basit Harmonik Salınıcı :

Enerji özketleri ve Enerji özdeğerleri

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \qquad \omega = \sqrt{k/m} \qquad x \text{ ve } p \text{ hermitsel}$$

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right) \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right)$$

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad , N = a^\dagger a \text{ sayı op.'ü}$$

$$a^\dagger a = \frac{H}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}$$

$$H = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)$$

$$N|n\rangle = n\,|n\rangle$$

enerji özketi özdeğeri

$$H|n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\,|n\rangle$$

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

$$[N, a] = -a$$
$$[N, a^\dagger] = a^\dagger$$

$$N a^\dagger |n\rangle = \big(\overbrace{[N, a^\dagger] + a^\dagger N}^{N a^\dagger}\big)|n\rangle$$
$$= (n+1)a^\dagger|n\rangle$$

$$N a|n\rangle = \Big(\underbrace{[N, a]}_{-a} + \overbrace{aN}^{Na} \Big)|n\rangle$$

$$= (n-1)\, a|n\rangle$$

Bunlar şunu gösterir: $a^{\dagger}|n\rangle$ $(a|n\rangle)$ N'nin bir artırılmış (azaltılmış) özdeğerli özketidir.

$$a|n\rangle = c|n-1\rangle$$

Hem $|n\rangle$ ve hem de $|n-1\rangle$'in normalize olmaları şartından c tanımlanır.

$$\langle n|a^{\dagger}a|n\rangle = |c|^2 \quad n$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

$$a^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

$$a^2|n\rangle = \sqrt{n(n-1)}\,|n-2\rangle$$

$$a^3|n\rangle = \sqrt{n(n-1)(n-2)}\,|n-3\rangle$$

$\vdots$ sonlanmalı.

$$n = \langle n|N|n\rangle = \left(\langle n|a^{\dagger}\right)\cdot\left(a|n\rangle\right) \geq 0$$

hiçbir zaman negatif olamaz.

BS K n'nin en küçük değeri $0 \rightarrow E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$

$$|1\rangle = a^\dagger |0\rangle$$

$$|2\rangle = \left(\frac{a^\dagger}{\sqrt{2}}\right)|1\rangle = \frac{a^{\dagger 2}}{\sqrt{2}}|0\rangle$$

$$|3\rangle = \left(\frac{a^\dagger}{\sqrt{3}}\right)|2\rangle = \frac{a^{\dagger 3}}{\sqrt{3!}}|0\rangle$$

$$\vdots$$

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$$

$$E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad (n=0,1,2,\dots)$$

$$\langle n'|a|n\rangle = \sqrt{n}\,\delta_{n',n-1}$$

$$\langle n'|a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,\delta_{n',n+1}$$

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a+a^\dagger) \qquad p = +i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\,(a^\dagger - a)$$

$$\langle n'|x|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n}\,\delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1}\,\delta_{n',n+1}\right)$$

$$\langle n'|p|n\rangle = i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(-\sqrt{n}\,\delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1}\,\delta_{n',n+1}\right)$$

N – temsilinde ne x ne de p diagonal. Çünkü bunlar a ve $a^\dagger$ ile ve N ile sıradeğiştirmiyorlar.

BS K

$$a|0\rangle = 0$$

$$\langle x'|a|0\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \langle x'| \left(x + \frac{ip}{m\omega}\right)|0\rangle = 0$$

$$\left(x' + x_0^2 \frac{d}{dx'}\right)\langle x'|0\rangle = 0 \qquad x_0 \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$\langle x'|0\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{x_0}} e^{-x'^2/2x_0^2}$$

$$\langle x'|1\rangle = \langle x'|a^\dagger|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\,x_0}\left(x' - x_0^2 \frac{d}{dx'}\right)\langle x'|0\rangle$$

$$\vdots$$

$$\langle x'|n\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{1}{x_0^{n+1/2}}\right)\left(x' - x_0^2 \frac{d}{dx'}\right)^n e^{-x'^2/2x_0^2}$$

$$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(a^2 + a^{\dagger 2} + a^\dagger a + a a^\dagger\right)$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} = \frac{x_0^2}{2}$$

$$\langle p^2\rangle = \frac{\hbar m\omega}{2}$$

$$\langle x\rangle = \langle p\rangle = 0$$

$$\langle(\Delta x)^2\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \qquad \langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p)^2\rangle = \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\langle(\Delta p)^2\rangle = \frac{\hbar m\omega}{2}$$

$$\langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p)^2\rangle = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\hbar^2$$

BS K

Osilatörün zaman gelişimi

$$\frac{dp}{dt} = -m\omega^2 x \qquad \begin{cases} \dfrac{da}{dt} = \sqrt{\dfrac{m\omega}{2\hbar}}\left(\dfrac{p}{m} - i\omega x\right) = -i\omega a \\[2ex] \dfrac{da^\dagger}{dt} = i\omega a^\dagger \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}$$

$$a(t) = a(0)\, e^{-i\omega t}$$

$$a^\dagger(t) = a^\dagger(0)\, e^{i\omega t}$$

N ve H Heisenberg resminde bile zamandan bağımsız op.'ler.

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{-ip(0)}{m\omega} + x(0)\, e^{-i\omega t} + \dfrac{i\,p(0)}{m\omega}\, e^{-i\omega t} \\[2ex] x(t) = \dfrac{ip(0)}{m\omega} + x(0)\, e^{i\omega t} - \dfrac{i\,p(0)}{m\omega}\, e^{i\omega t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = x(0)\cos\omega t + \dfrac{p(0)}{m\omega}\sin\omega t \\[2ex] p(t) = -m\omega x(0)\sin\omega t + p(0)\cos\omega t \end{cases}$$

alternatif çıkarım:

$$x(t) = e^{iHt/\hbar}\, x(0)\, e^{-iHt/\hbar}$$

$$e^{iG\lambda} A e^{-iG\lambda} = A + i\lambda[G, A] + \frac{i^2\lambda^2}{2!}[G,[G,A]] +$$

$$\cdots + \frac{i^n\lambda^n}{n!}[G,[G,[G,\ldots[G,A]]]] + \ldots$$

$$e^{iHt/\hbar}\, x(0)\, e^{-iHt/\hbar} = x(0) + \frac{it}{\hbar}[H, x(0)] + \dots$$

$$[H, x(0)] = \frac{-i\hbar p(0)}{m}$$

$$[H, p(0)] = i\hbar m\omega^2 x(0)$$

$$= x(0) + \left(\frac{p(0)}{m}\right)t - \left(\frac{1}{2!}\right)t^2\omega^2 x(0) - \frac{1}{3!}\frac{t^3\omega^2 p(0)}{m} + \dots$$

$$= x(0)\cos\omega t + \frac{p(0)}{m\omega}\sin\omega t$$

$$|\alpha\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$$

$x(t)$ 'nin beklenen değeri de, ω ile osilasyon yapmaz.

Mantıken şunu sorabiliriz. Klasik osilatörü en yakın taklit eden enerji özdurumlarının bir süperpozisyonu nasıl kurulur?

$$a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

koherent state.

1° $|\lambda\rangle = \sum f(n)|n\rangle$ $\quad |f(n)|^2 = \frac{(n)^n}{n!}e^{-n}$ Poisson.

2° osil. taban durumunun sonlu bir nokta kayması ile sürülmüş halidir

3° HUS saplanır.

2.4 Schrödinger Dalga Denklemi

Zaman-bağımlı dalga denk.'i

Amacımız $\psi(\vec{x}',t) = \langle \vec{x}' | \alpha, t_0; t\rangle$ SP reli durumları

dalga fonk.'unun zaman fonk.'u olarak davranışını incelemek.

zamandan bağımsız konum-bra ($\vec{x}'$ özdeğeri)

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V(\vec{x})$$

$$\langle \vec{x}'' | V(\vec{x}) | \vec{x}' \rangle = \underbrace{V(\vec{x}')}_{\text{reel}} \delta^3(\vec{x}' - \vec{x}'')$$

$$\langle x | \vec{p} | \alpha \rangle = \int \langle x | p | p \rangle \langle p | \alpha \rangle dp$$
$$= \int dp\, p \langle x | p \rangle \langle p | \alpha \rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\, p\, e^{ixp/\hbar} \langle p | \alpha \rangle$$
$$= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\, e^{ixp} \langle p | \alpha \rangle$$
$$= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \langle x | \alpha \rangle$$

x-temsilde Sch. denk.'i:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\langle \vec{x}' | \alpha, t_0; t \rangle}_{\text{zamanla değişiyor.}} = \langle \vec{x}' | H | \alpha, t_0; t \rangle$$

$$\langle \vec{x}' | \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} | \alpha, t_0; t \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}'^2 \langle \vec{x}' | \alpha, t_0; t \rangle + V(\vec{x}') \langle \vec{x}' | \alpha, t_0; t \rangle$$

$$\langle \vec{x}' | \underbrace{V(\vec{x})}_{\text{op.}} = \langle \vec{x}' | \underbrace{V(\vec{x}')}_{\text{op. değil}}$$

bunun üzerine dayalı QM dalga mekaniği olarak bilinir.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}',t) = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right) \vec{\nabla}'^2 \psi(\vec{x}',t) + V(\vec{x}') \psi(\vec{x}',t)$$

Zamandan-bağımsız dalga denk.'i

Durağan bir durumun zaman bağımlılığı $e^{-iE_{a'}t/\hbar}$.

$$\Rightarrow \quad \langle \vec{x}'|a',t_0;t\rangle = \langle \vec{x}'|a'\rangle e^{-iE_{a'}t/\hbar}$$

buradan şu anlaşılmalı: sist. başlangıçta A ve H'nin a' ve $E_{a'}$ özdeğerli eşzamanlı özdurumunda hazırlanmıştır

$$\Rightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}'^2\langle \vec{x}'|a'\rangle + V(\vec{x}')\langle \vec{x}'|a'\rangle = E_{a'}\langle \vec{x}'|a'\rangle$$

a' yü atabiliriz

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}'^2 u_E(\vec{x}') + V(\vec{x}')u_E(\vec{x}') = E\,u_E(\vec{x}')$$

Zamandan bağımsız dalga denk.'i.

$$E < \lim_{|\vec{x}'|\to\infty} V(\vec{x}')$$

şeklinde çözümler arıyoruz. Bu durumda kullanılacak en uygun sınır şartı

$$u_E(\vec{x}') \to 0 \qquad |\vec{x}| \to \infty \text{ iken}$$

Fiziksel olarak bu parçacığın uzayın sonlu bir bölgesine bağlı ya da hapsedilmiş olduğu anlamına gelir.

BSK

Dalga Fonk.'unun Yorumları

$\langle \vec{x}'|\alpha, t_0; t\rangle$, $\{|\vec{x}'\rangle\}$ konum özkettleri cinsinden $|\alpha, t_0; t\rangle$ nin bir açılım katsayısı olarak görülmesi gerçeğinden $|\psi|^2$ olasılık yorumu izlenir.

$$\underbrace{\rho(\vec{x}', t)}_{\text{olasılık yoğunluğu}} = |\psi(\vec{x}', t)|^2 = |\langle \vec{x}'|\alpha, t_0; t\rangle|^2$$

Parçacığın $d^3\vec{x}'$ ($\vec{x}'$ civarında) hacminde parçacığın varlığını belirleyen bir dedektör kullandığımız zaman, t anında pozitif bir sonuç kaydetmenin olasılığı $\rho(\vec{x}', t)\, d^3\vec{x}'$ ile verilir. Bundan sonra $\vec{x}' \to \vec{x}$ kullanacağız.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \underbrace{\vec{j}}_{\text{olasılık akımı}} = 0$$

Sch. denk.'inden

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi \vec{\nabla}\psi^*\right)$$

$$= \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im}\left(\psi^* \vec{\nabla}\psi\right)$$

$V = V^*$

Kompleks pot.'lar parçacığın yok olduğu pot.

BS K

$$\int d^3\vec{x}\, \vec{j}(\vec{x},t) = \frac{\langle \vec{p}\,\rangle_t}{m}$$

Dalga fonk.'nun fiziksel önemini anlamak için

$$\psi(\vec{x},t) = \sqrt{\rho(\vec{x},t)}\; e^{iS(\vec{x},t)/\hbar}$$

yazalım. $\vec{x}$ ve t'nin fonk.u her kompleks fonk. için her zaman yapılabilir.

S'nin fiziksel yorumu nedir?

$$\left\{ \begin{aligned} \vec\nabla\psi &= (\vec\nabla\sqrt{\rho})\,e^{iS/\hbar} + \frac{i}{\hbar}(\vec\nabla S)\sqrt{\rho}\,e^{iS/\hbar} \\ \psi^*\vec\nabla\psi &= \sqrt{\rho}\,\vec\nabla\sqrt{\rho} + \frac{i}{\hbar}\rho\vec\nabla S \\ \vec{j} &= \frac{\rho\vec\nabla S}{\hbar} \end{aligned} \right.$$

$$\psi^*\vec\nabla\psi = \sqrt{\rho}\;\vec\nabla\sqrt{\rho} + \frac{i}{\hbar}\rho\,\vec\nabla S$$

$$\vec{j} = \frac{\rho\vec\nabla S}{m}$$

Dalga fonk.'nun fazının uzaysal değişimi olasılık akımını karakterize eder. Herhangi bir $\vec{x}$ noktasında $\vec{j}$'nin doğrultusu noktadan geçen bir sbt faz yüzeyine normal'dir.

Düzlem dalga (mom. özfonk.'u)

$$\psi(\vec{x},t) \propto e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar - iEt/\hbar} \qquad S = \vec{p}\cdot\vec{x} - Et$$

$$\vec\nabla S = \vec{p}$$

$$``\vec{v}" = \frac{\vec\nabla S}{m}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec\nabla\cdot\left(\rho\,``\vec{v}"\right) = 0$$

Klasik limit

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\vec{\nabla}^2\sqrt{\rho}+\frac{2i}{\hbar}(\vec{\nabla}\sqrt{\rho})\cdot(\vec{\nabla}S)-\frac{1}{\hbar^2}\sqrt{\rho}\,|\vec{\nabla}S|^2+\frac{i}{\hbar}\sqrt{\rho}\,\vec{\nabla}^2S\right]+\sqrt{\rho}\,V$$

$$=i\hbar\left[\frac{\partial\sqrt{\rho}}{\partial t}+\frac{i}{\hbar}\sqrt{\rho}\,\frac{\partial S}{\partial t}\right]$$

$\hbar\,|\vec{\nabla}^2 S| \ll |\vec{\nabla}S|^2$ olduğunu varsayalım.

$$\frac{1}{2m}|\vec{\nabla}S(\vec{x},t)|^2+V(\vec{x})+\frac{\partial S(\vec{x},t)}{\partial t}=0$$ (Hamilton-Jacobi Denk.'i)

$S(\vec{x},t)$ Hamilton asal fonk.'u

$S(x,t)=W(x)-Et$

Hamilton karakteristik fonk.'u.

$$\frac{1}{2m}|\vec{\nabla}W|^2+V-E=0$$

$$|\vec{\nabla}W|^2=2m(E-V(x))$$

$$\vec{p}_{cl}=\vec{\nabla}S=\vec{\nabla}W$$

$$\nabla W=\pm\sqrt{2m(E-V)}$$

$$W=\pm\int^x\sqrt{2m(E-V)}\,dx'$$

<u>Yarıklasik (WKB) Yaklaşımı</u> :

Berkeley, Kuantum fiz. Böl. 8

$$S(x,t)=W(x)-Et$$

$$=\pm\int^x dx'\sqrt{2m[E-V(x')]}-Et$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$ (durağan durum, tüm x'ler için)

BS K

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\rho \vec{\nabla} S}{m}\right) = 0$$

$$\rho \frac{dW}{dx} = \pm \rho \sqrt{2m(E - V(x))} = \text{sbt.}$$

$$\sqrt{\rho} = \frac{\text{Sbt}}{[E - V(x)]^{1/4}} \propto \frac{1}{\sqrt{v_{cl}}}$$

$$\psi(x,t) = \frac{\text{Sbt}}{[E - V(x)]^{1/4}} \exp\left\{ \pm \left(\frac{i}{\hbar}\right) \int^{x} dx' \sqrt{2m(E - V(x'))} - \frac{iEt}{\hbar} \right\}$$

WKB çözümü.

$$\hbar \left| \frac{d^2 W}{dx^2} \right| \ll \left| \frac{dW}{dx} \right|^2$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m[E - V(x)]}} \ll \frac{2(E - V(x))}{|dV/dx|}$$

* pot.'in dikkate değer bir şekilde değiştiği karakteristik uzunlukla kıyaslandığında küçük. Pot. birkaç dalga boyu sınırlarında sbt olmalı. Yarı klasik resim kısa dalga boyu limitinde anlamlı.

BS K

$\psi(x,t)$ çözümü (2.4.75) $E-V(x)$'in pozitif olduğu klasik olarak izinli olduğu bölge için türetilmiştir. Şimdi klasik olarak yasak $E-V(x)$'in negatif olduğu bölgeyi gözönüne alalım. Bu durumda klasik Hamilton-Jacobi teorisi bir anlam ifade etmez. Ve modifiye edilmeli. $E<V$ için bir analog çözüm vardır

$$\psi(\vec{x},t) \simeq \frac{\text{sbt}}{[V(x)-E]^{1/4}} \exp\left\{ \pm \frac{1}{\hbar} \int^{x} dx' \sqrt{2m\,[V(x')-E]} - \frac{iEt}{\hbar} \right\}$$

dalga denk.'ini sağlar ($\hbar/\sqrt{2m(V-E)}$ pot.'in değişmeye başladığı karakteristik mesafeye kıyasla küçük olmak şartı ile), Ama bu çözümler hiçbiri $V(x)=E$ klasik dönüm noktalarında anlam taşımaz. Gerçekte, iki çözümü bu dönüm noktalarını geçerken eşleştirmek hiç de zor değil'dir.

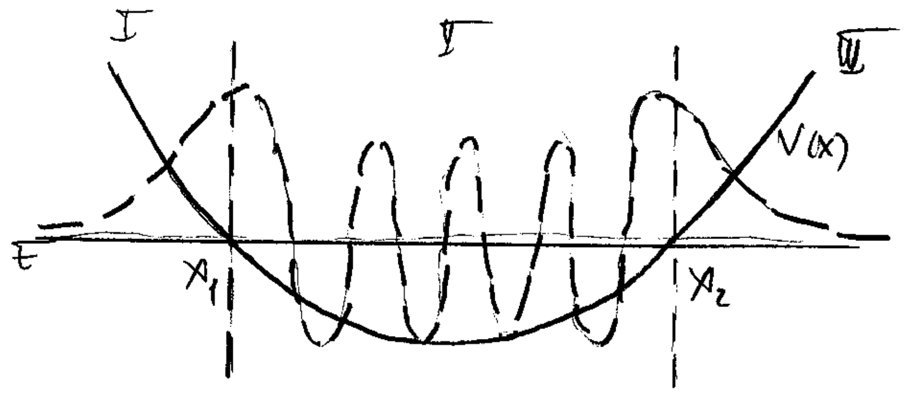
1°) $V(x)=E$'nin kökü ile tanımlı x_0 dönüm noktası civarında $V(x)$'e bir lineer yaklaşım yap.

2°) $$\frac{d^2 u_E}{dx^2} - \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=x_0} (x-x_0)\,u_E = 0$$

denk.'ini x_0 civarında geçerli olan $\pm 1/3$ değerli Bessel fonk.'unu içeren 3. bir çözüm bul.

3°) Bu çözümü çeşitli integral sbt'leri uygun şekilde seçerek diğer iki çözümle eşleştir.

BS K



$$\left\{\frac{1}{[V(x)-E]^{1/4}}\right\}\exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_x^{x_1}dx'\sqrt{2m\,[V(x')-E]}\,\right] \qquad \mathrm{I}-\mathrm{II}$$

$$\longrightarrow\left\{\frac{2}{[E-V(x)]^{1/4}}\right\}\cos\left[\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x}dx'\sqrt{2m\,[E-V(x')]}-\frac{\pi}{4}\right]$$

$$\left\{\frac{1}{[V(x)-E]^{1/4}}\right\}\exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_{x_2}^{x}dx'\sqrt{2m\,[V(x')-E]}\,\right] \qquad \mathrm{III}-\mathrm{II}$$

$$\longrightarrow\left\{\frac{2}{[E-V(x)]^{1/4}}\right\}\cos\left[-\frac{1}{\hbar}\int_{x}^{x_2}dx'\sqrt{2m\,[E-V(x')]}+\frac{\pi}{4}\right]$$

II deki dalga fonk.'unun eşitliği kosinüs argümanlarının en fazla π'nin bir tamsayı katı (2π'nin değil çünkü, 2.4.42 terslenebilir) kadar fark etmesi gerektiğini söyler. Bu şekilde işlemde bir uyum şartı elde ederiz

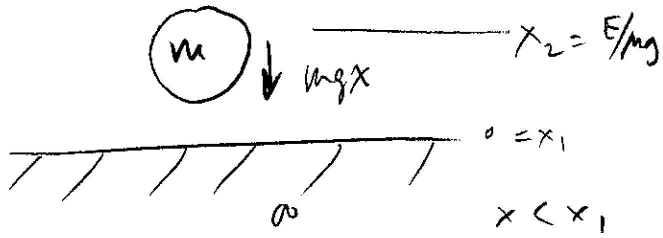
$$\int_{x_1}^{x_2}dx\sqrt{2m[E-V(x)]}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\hbar \qquad n=0,1,2,\ldots$$

bir pot. kuyusundaki parçacığın enerji düzeyleri ... kullanılabilir

$$\oint p\,dq=nh \qquad \text{A. Sommerfeld \& W. Wilson}$$

Örnek

$$V(x) = \begin{cases} mgx & x>0 \\ \infty & x<0 \end{cases}$$



$X_1 = 0 \qquad X_2 = \dfrac{E}{mg}$ klasik dön. noktaları

Bununla birlikte, problemimizde $x \le x_1 = 0$ için dalga fonk.'u verili ile sıfır olması gerektiğinden, WKB dalga fonk. u $x < x_1$ bölgesine "sızdığı" varsayımı altında 2.4.43 türetilmiştir. Bu probleme daha ~~tatmin~~ edici bir yaklaşım

$$V(x) = mg|x| \qquad (-\infty < x < \infty)$$

la tanımlanan ve dönüm noktaları $X_1 = -E/mg$ $\;X_2 = E/mg$ olan modifiye problemin ($x=0$ de sıfır olmasını garantiliyen) tek-parite çözümlerle sağlamaktır.

$$\int_{-E/mg}^{+E/mg} dx \sqrt{2m\left(E - mg|x|\right)} = \left(n_{tek} + \frac{1}{2}\right)\pi\hbar \qquad n_{tek} = 1, 3, 5, \dots$$

ya da eşdeğer olarak

$$\int_0^{E/mg} dx \sqrt{2m\left(E - mgx\right)} = \left(n - \frac{1}{4}\right)\pi\hbar \qquad n = 1, 2, 3, 4 \dots$$

$$E_n = \frac{\left[3\left(n - \frac{1}{4}\right)\pi\right]^{2/3}}{2} \left(mg^2\hbar^2\right)^{1/3}$$ zıplayan topun enerji düzeyleri.

Bu problemi tam çözmek mümkün:

$$Ai(-\lambda_n) = 0$$

$$E_n = \left(\frac{\lambda_n}{2^{1/3}}\right)\left(m g^2 \hbar^2\right)^{1/3}$$

2.5. Feynman yol integralleri ve propagatörler

Dalga Mekaniğinde propagatörler:

Bir kere başlangıç ketini H ile sıradeğiştiren bir gözlenebilirin özketleri cinsinden açıyor isek, zamandan bağımsız Hamiltoniyenli en genel zaman-evrimi probleminin nasıl çözülebildiğini 2.1 kesiminde gösterdik. Bu ifadeyi dalga mekaniği diline çevirelim.

$$|\alpha, t_0; t\rangle = e^{-iH(t-t_0)/\hbar} \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'| \, |\alpha, t_0\rangle \qquad [A,H]=0$$

(Başlangıç keti)

$$= \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|\alpha, t_0\rangle \exp\left[-\frac{iE_{a'}(t-t_0)}{\hbar}\right]$$

$\langle \vec{x}\,'|$ ile çarp.

$$\langle x'|\alpha, t_0; t\rangle = \sum_{a'} \langle \vec{x}\,'|a'\rangle\langle a'|\alpha, t_0\rangle \exp\left(\frac{-iE_{a'}(t-t_0)}{\hbar}\right)$$

$$\psi(\vec{x}\,', t) = \sum_{a'} c_{a'}(t_0)\, u_{a'}(\vec{x}\,')\, e^{-iE_{a'}(t-t_0)/\hbar}$$

$$\langle a'|\alpha, t_0\rangle = \int d^3x' \langle a'|\vec{x}\,'\rangle\langle x'|\alpha, t_0\rangle$$

$$c_{a'}(t_0) = \int d^3x'\, u_{a'}^*(\vec{x}\,')\, \psi(\vec{x}\,', t_0)$$

integral op. sonlu başlangıca etkiyerek son dalga fonk.'nu veren bir int. op.

$$\psi(\vec{x}'',t) = \int d^3x' \, K(\vec{x}'',t;\vec{x}',t_0)\,\psi(\vec{x}',t_0)$$

$$K(\vec{x}'',t;\vec{x}',t_0) = \sum_{a'} \langle \vec{x}''|a'\rangle\langle a'|\vec{x}'\rangle \, e^{-iE_{a'}(t-t_0)/\hbar}$$

(verilen her problemde, pot. e bağımlı, başlangıç dalga fonk.undan bağımsız.)

Açıkça, dalga fonk.'unun zaman evrimi, başlangıçta $\psi(\vec{x}',t_0)$ verilmiş ve K biliniyor ise tamamen öngörülebilir. Bu anlamda, Schrödinger dalga mekaniği kusursuz bir nedensel teoridir.

* propogatörün kayda değer 2 özelliği vardır.

~~1°) $t>t_0$ için, K sbt $\vec{x}'$, t_0 için Schr.~~ denk.-ni sağlar.

2°) $\lim_{t\to t_0} K(\vec{x}'',t;\vec{x}',t_0) = \delta^3(\vec{x}''-\vec{x}')$

K şöyle de yazılabilir

$$K(\vec{x}'',t;\vec{x}',t_0) = \langle \vec{x}''|\, e^{-iH(t-t_0)/\hbar} \,|\vec{x}'\rangle$$

Başlangıç dalga fonk.'unun uzayın sonlu bir bölgesi üzerinden yayıldığı daha genel bir problemi çözmek istiyorsak, yapmamız gereken tek şey $\psi(\vec{x}',t_0)$'ı K ile çarpıp tüm uzay üzerinden (yani $\vec{x}'$) integre etmektir. Bu anlamda, farklı konumlardan ($\vec{x}'$) gelen katkıları toplamış oluruz. Bunun elektrostatikteki analojisi şudur.

BS K

Genel bir $\rho(\vec{x}')$ yük dağılımının elektrostatik potansiyelini bulmak istiyoruz. İlk önce nokta yük problemini çözüp bunu yük dağılımı ile çarpıp integral etmek durumundayız.

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}''^2 + V(\vec{x}'') - i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right]K(\vec{x}'',t;\vec{x}',t_0) = -i\hbar\,\delta^3(\vec{x}''-\vec{x}')\,\delta(t-t_0)$$

sınır şartı $K(\vec{x}'',t;\vec{x}',t_0)=0 \quad t<t_0$

Bir boyutta serbest parçacık prob. için alalım.

$$P|p'\rangle = p'|p'\rangle \qquad H|p'\rangle = \frac{p'^2}{2m}|p'\rangle$$

$$K(x'',t;x',t_0) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dp'\, e^{ip'(x''-x')/\hbar - ip'^2(t-t_0)/2m\hbar}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t-t_0)}}\; e^{im(x''-x')^2/2\hbar(t-t_0)}$$

bu ifade bir Gaussian paketin zamanla nasıl değiştiğini anlamak için kullanılabilir

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{ipx/\hbar}$$

BS K

Basit harmonik salınıcı için

$$u_n(x)\, e^{iE_n t/\hbar} = \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2\hbar} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x\right) e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t}$$

$$K(x'',t;x',t_0) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin(\omega(t-t_0))}\right)^{1/2} \exp\left(\left[\frac{im\omega}{2\hbar \sin\omega(t-t_0)}\right] \times \left[(x''^2+x'^2)\cos\omega(t-t_0) - 2x''x'\right]\right)$$

bunu ispatlamak için

$$\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \exp\left(-\frac{(\xi^2+\eta^2-2\xi\eta\zeta)}{(1-\zeta^2)}\right) = e^{-(\xi^2+\eta^2)} \sum_{n=0} \left(\frac{\zeta^n}{2^n n!}\right) H_n(\xi) H_n(\eta)$$

'yı kullanmak gerekir.

Genelliği bozmaksızın $t_0=0$ deriz. İnceleyeceğimiz ilk integral $\vec{x}''=\vec{x}'$ diyerek elde edeceğimiz integral'dir.

$$G(t) = \int d^3x'\, K(\vec{x}',t;\vec{x}',0)$$

$$= \int d^3x' \sum_{a'} |\langle \vec{x}'|a'\rangle|^2 e^{-iE_{a'}t/\hbar}$$

$$= \sum_{a'} e^{-iE_{a'}t/\hbar}$$

[illegible] sonuçtur.

$$\beta = it/\hbar$$

$$Z = \sum_{a'} e^{-\beta E_{a'}}$$ bölüşüm fonk.'u.

$G(t)$'nin Laplace-Fourier dönüşümü,

$$\tilde{G}(E) \equiv -i \int_0^\infty dt\, G(t)\, e^{(iEt/\hbar)/\hbar}$$

$$= -i \int_0^\infty dt \sum_{a'} e^{-iE_{a'}t/\hbar}\, e^{(iEt/\hbar)/\hbar}$$

$$E \to E + i\varepsilon$$

$\varepsilon \to 0$ limitinde

$$\tilde{G}(E) = \sum_{a'} \frac{1}{E - E_{a'}}$$

BS K

Bir Geçiş Genliği Olarak Propogatör

$$K(\vec{x}'',t;\vec{x}',t_0)=\sum_{a'}\langle\vec{x}''|a'\rangle\langle a'|\vec{x}'\rangle e^{-iE_{a'}(t-t_0)/\hbar}$$

$$=\sum_{a'}\langle\vec{x}''|e^{-iHt/\hbar}|a'\rangle\langle a'|e^{iHt_0/\hbar}|\vec{x}'\rangle$$

$$=\langle\underbrace{\vec{x}'',t}|\underbrace{\vec{x}',t_0}\rangle$$

kon. op.'nin özbra ve özketleri (Heisenberg R.)

$\langle b',t|a'\rangle$: HR'de $t_0=0$ da a' özdeğerli A'nın bir özdurumunda hazırlanmış sist.i, t anında B'nin b' özdeğerli bir özdurumunda bulmanın olasılık genliği — $|a'\rangle\to|b'\rangle$ geçiş genliği.

$\langle\vec{x}'',t|\vec{x}',t_0\rangle$: t_0 da $\vec{x}'$ konum özdeğerli hazırlanmış parçacık için, t de, $\vec{x}''$ de bulmanın olasılık genliği.

$(\vec{x}',t_0)\longrightarrow(\vec{x}'',t)$ uzay-zaman noktasına geçişte parçacık için genlik — geçiş genliği.

Diğer bir yorum:

$|\vec{x}',t_0\rangle$ HR de $\vec{x}'$ özdeğerli konum özketi.

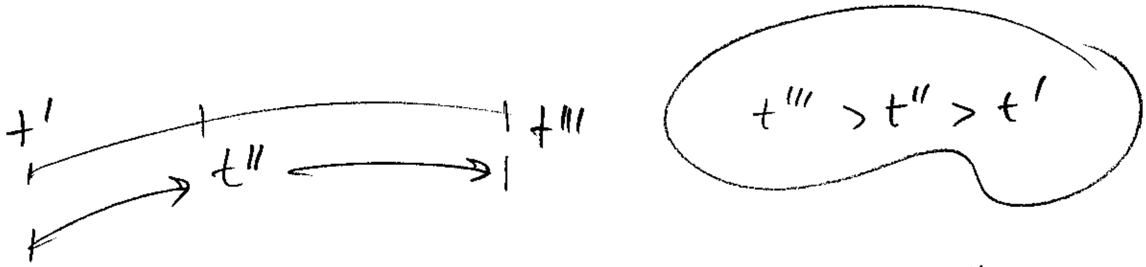
BS K

Herhangi bir zamanda, bir gözlenebilirin HR özketleri temel ketler olarak seçilebildiğinden dolayı, $\langle \vec{x}'', t | \vec{x}', t_0 \rangle$'ı farklı zamanlardaki temel ketlerin iki kümesini birbirine bağlayan dönüşüm fonk.'udur diyebiliriz.

Konum ve zaman koordinatlarını daha simetrik olarak işleyen notasyonu kullanırız.

$$\langle \vec{x}'', t | \vec{x}', t_0 \rangle \longrightarrow \langle \vec{x}'', t'' | \vec{x}', t' \rangle$$

$$\int d^3x'' \, |\vec{x}'', t''\rangle\langle \vec{x}'', t''| = \mathbb{1}.$$



$$\langle \vec{x}''', t''' | \vec{x}', t' \rangle = \int d^3x'' \, \langle \vec{x}''', t''' | \vec{x}'', t'' \rangle \langle \vec{x}'', t'' | \vec{x}', t' \rangle$$

~~kompozisyon özelliği~~

Olasılık teorisinde: Chapman_Kolmogoroff denk.'i

Difüzyon teorisinde: Smoluchowsky " :

$$\langle \vec{x}'''', t'''' | \vec{x}', t' \rangle = \int d^3x''' \int d^3\vec{x}'' \, \langle \vec{x}'''', t'''' | \vec{x}''' t''' \rangle \langle \vec{x}''' t''' | \vec{x}'' t'' \rangle \langle \vec{x}'' t'' | \vec{x}' t' \rangle$$

BS K

sonsuz küçük bir zaman aralığı için (t' ile $t'+dt=t''$ arasındaki) $\langle \vec{x}'', t'' | \vec{x}', t' \rangle$ nün biçimini bir şekilde kestirirsek, sonlu bir zaman aralığı için $\langle \vec{x}'', t'' | \vec{x}', t' \rangle$ genliğini 2.5.29 anlamında sonsuz küçük zaman aralıkları için uygun geçiş genliklerini birleştirerek elde edebiliriz. (R. Feynman, 1948)

Yollar üzerinden toplam olarak Yol integralleri

Genelliği bozmaksızın kendimizi bir-boyutlu problemlere kısıtlarız.

$$\underbrace{x''' \cdots x'''}_{N \text{ kere}}$$

gibi hantal ifadeleri x_N gibi notasyon kullanarak yazarız.

(x_1, t_1) uzay-zaman noktasında — (x_N, t_N) uz.-zaman noktası

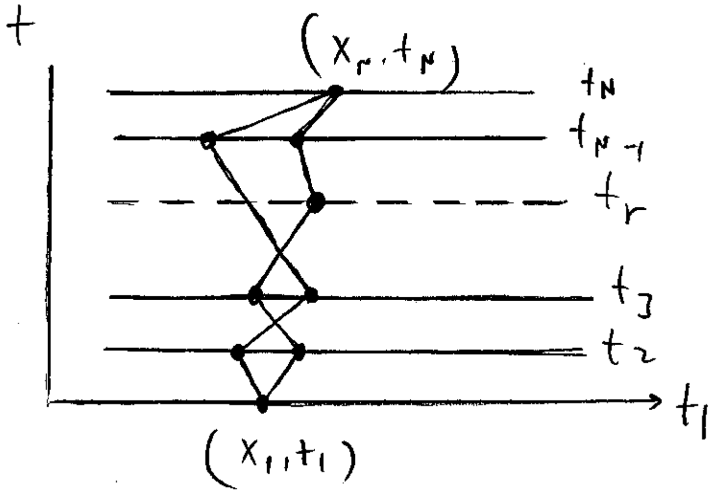
$t_1 — t_N$ i

($N-1$ eşit parçaya bölelim)

$$t_j - t_{j-1} = \Delta t = \frac{t_N - t_1}{N-1}$$

$$\langle x_N, t_N | x_1, t_1 \rangle = \int dx_{N-1} \int dx_{N-2} \cdots \int dx_2$$

$$\langle x_N, t_N | x_{N-1}, t_{N-1} \rangle \langle x_{N-1}, t_{N-1} | x_{N-2}, t_{N-2} \rangle \cdots \langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle$$



Herbir zaman aralığı için, örneğin

$$(x_{n-1}, t_{n-1}) \leftarrow (x_n, t_n)$$

$x_2, x_3, \dots x_{N-1}$ üzerinden integre ederiz.

Bu, uzay-zaman düzlemindeki tüm mümkün yollar üzerinden integre edeceğiz anlamına gelir.

$$L_{cl} = L_{cl}(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x)$$

(x_1, t_1) ve (x_N, t_N) olarak belirlenmiş sonlanma noktaları ile bu Lagranjiyen verilmişse, Kl. mek. te, bu noktaları birleştiren her yolu dikkate almamıza gerek yoktu. Klasik parçacığın gerçek hareketine karşı gelen tek bir yol vardır. Örneğin,

$$V(x) = mgx \qquad (x_1, t_1) = (h, 0) \quad \Big| \quad (x_N, t_N) = \left(0, \sqrt{\frac{2h}{g}}\right)$$

$$x = h - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{klasik yol.}$$

Daha genel olarak, Hamilton ilkesine göre, eylemi minimize eden eşsiz yol

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, L_{cl}(x, \dot{x}) = 0$$

BS K

Feynman Formülasyonu,

$$e^{i\int_{t_1}^{t_2}\frac{dt}{\hbar}L_{cl}(x,\dot{x})} \longrightarrow \langle x_2,t_2|x_1,t_1\rangle$$

e karşı gelir.

eşit

yada

orantılı ile aynı şeymidir?

$$S(n,n-1) \equiv \int_{t_{n-1}}^{t_n} dt\, L_{cl}(x,\dot{x})$$

Kendimizi yol boyunca, örn. (x_{n-1},t_{n-1}) ve (x_n,t_n), küçük bir segment'e kısıtlarız. Dirac'a göre $\exp(iS(n,n-1)/\hbar)$ i bu segment ile eşleştirilir.

$$\prod_{n=2}^{N} e^{\frac{iS(n,n-1)}{\hbar}} = e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=2}^{N} S(n,n-1)} = e^{iS(N,1)/\hbar}$$

Bu halen, $\langle x_N,t_N|x_1,t_1\rangle$ i vermez: daha ziyade, bu denklem ~~kısma~~ gözönüne aldığımız özel bir yol'dan gelen katkıdır. Aynı zamanda, t_{n-1} ve t_n arasındaki zaman adığını sonsuz küçük parçalara böleriz. Böylece $\langle x_N,t_N|x_1,t_1\rangle$ için aday ifademiz

$$\langle x_N,t_N|x_1,t_1\rangle \sim \sum_{\text{tüm yollar}} e^{iS(N,1)/\hbar} \qquad 2.5.38$$

BS K

$\hbar \to 0$ iken 2.5.38 deki üstel son derece düzensiz salınır, öyleki komşu yollardan çeşitli katkılar arasında birbirini götürmeler meydana gelir. Bu, $\hbar$'nın küçüklüğünden dolayı, belirli bir yol için $e^{iS/\hbar}$'ın tamamen farklı bir yol için $e^{iS/\hbar}$ ile tamamen farklı fazlara sahip olmasındandır. Öyleki, çoğu yol, $\hbar$'ın küçük bir nicelik olmasından dolayı katkıda bulunmaz. Bununla birlikte, önemli bir istisna vardır.

$$\delta S(N,1)=0$$

şartını sağlayan bir yol alalım. S deki değişim uç noktaları sabit tutulan yol'un küçük bir deformasyonundan dolayı'dır. Bu klasik yol'dur. Şimdi yolu klasik yoldan bir parça deforme edelim. Ortaya çıkan S halen deformasyonda 1. mertebeye kadar S_{min}'e eşittir. Bu $\exp(iS/\hbar)$'ın fazının $\hbar$ küçük bile olsa klasik yoldan çok az saptığımız için çok fazla değişmediği anlamına gelir. Sonuç olarak, Kl yola ne kadar yakın kalırsak, komşu yollar arasındaki yapıcı girişim o kadar mümkündür. $\hbar \to 0$ limitinde, asıl katkılar o zaman klasik yolu da içeren dar bir şeritten (ya da daha üst boyutlarda bir tüpten) gelir.

$t_n - t_{n-1}$ zaman farkının sonsuz küçük olduğunu varsaydığımız $\langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle$ 'e dönelim.

$$\langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle = \frac{1}{w(\Delta t)} e^{iS(n,n-1)/\hbar}$$

$V(x)$ 'e değil de $t_n - t_{n-1}$ zaman aralığına bağlı ağırlık faktörü.

$1/$uzunluk boyutunda olmalı. bu yüzden

* $\Delta t \to 0$ iken $S(n,n-1)$ i hesaplayacağız.

zaman aralığı çok küçük olduğundan, (x_{n-1}, t_{n-1}) ile (x_n, t_n) e birleştiren yol izi doğru çizgi yaklaşımını uygun:

$$S(n,n-1) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x) \right)$$

$$= \Delta t \left\{ \left(\frac{m}{2}\right) \left[\frac{(x_n - x_{n-1})}{\Delta t} \right]^2 - V\left(\frac{(x_n + x_{n-1})}{2} \right) \right\}$$

$V=0$ serbest parçacık durumunu alalım.

$$\langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle = \frac{1}{W(\Delta t)} e^{im(x_n - x_{n-1})^2/2\hbar\Delta t}$$

2.5.16 dekine özdeş propagatör

BS K

$W(\Delta t)$'yi serbest parçacık için hesaplayalım.

$$\langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle \Big|_{t_n = t_{n-1}} = \delta(x_n - x_{n-1})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \, e^{im\xi^2/2\hbar\Delta t} = \sqrt{\frac{2\pi i \hbar \Delta t}{m}}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \, e^{im\xi^2/2\hbar\Delta t} = \delta(\xi)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{W(\Delta t)} = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}\right)^{1/2}$$

$$\langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \, e^{iS(n,n-1)/\hbar}$$

Geçiş olasılığı için son ifade,

$$\langle x_N, t_N | x_1, t_1 \rangle = \lim_{N \to \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}\right)^{(N-1)/2}$$

$$\times \int dx_{N-1} \int dx_{N-2} \cdots \int dx_2 \prod_{n=2}^{N} e^{iS(n,n-1)/\hbar}$$

BS K

$$\int_{x_1}^{x_N} \mathcal{D}[x(t)] = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\, \Delta t} \right)^{(N-1)/2} \int dx_{N-1} \int dx_{N-2} \cdots \int dx_2$$

$$\langle x_N, t_N | x_1, t_1 \rangle = \int_{x_1}^{x_N} \mathcal{D}(x(t))\, e^{i \int_{t_1}^{t_N} dt \frac{L_{cl}(x,\dot{x})}{\hbar}}$$

Feynman yol integrali.

Q.M. den ödünç alma noktalar

1°) süperpozisyon ilkesi

2°) Geçiş genliği için kompozisyon özelliği

3°) $\hbar \to 0$ limitinde klasik karşıgelme.

Feynman ifadesi Schrödinger zaman-bağımlı dalga denklemini sağlar:

$$\langle x_N, t_N | x_1, t_1 \rangle = \int dx_{N-1} \langle x_N, t_N | x_{N-1}, t_{N-1} \rangle \langle x_{N-1}, t_{N-1} | x_1, t_1 \rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_{N-1} \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar \Delta t}} \exp\left\{ \left(\frac{im}{2\hbar}\right) \frac{(x_N - x_{N-1})^2}{\Delta t} - \frac{iV\Delta t}{\hbar} \right\}$$

$$\times \langle x_{N-1}, t_{N-1} | x_1, t_1 \rangle$$

 $t_N - t_{N-1}$ 'in sonsuz küçük olduğunu varsaydık.

$\xi = x_N - x_{N-1}$ der ve $x_N \to x$, $t_N \to t+\Delta t$ dersek,

$$\langle x, t+\Delta t \mid x_1, t_1 \rangle = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \, \exp\left(\frac{i m \xi^2}{2\hbar \Delta t} - \frac{i V \Delta t}{\hbar} \right)$$

$$\times \langle x-\xi, t \mid x_1, t_1 \rangle$$

2.4.45 den açıkça görüldüğü üzere, $\Delta t \to 0$ limitinde, integrallere asıl katkı $\xi \simeq 0$ bölgesinden gelir. Böylece $\langle x-\xi, t \mid x_1, t_1 \rangle$ i ξ'nin kuvvet serisine açmakta haklıyız. $\langle x, t+\Delta t \mid x_1, t_1 \rangle$ i de ve $e^{-iV\Delta t/\hbar}$, ı da Δt'nin kuvvet serisine açarız.

$$\langle x, t \mid x_1, t_1 \rangle + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \langle x, t \mid x_1, t_1 \rangle$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \, e^{i m \xi^2 / 2\hbar \Delta t} \left(1 - \frac{i V \Delta t}{\hbar} + \dots \right)$$

$$\times \left[\langle x, t \mid x_1, t_1 \rangle + \left(\frac{\xi^2}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle x, t \mid x_1, t_1 \rangle + \dots \right]$$

* ξ de lineer olan terim ξ ye göre integre edildiğinde sıfırlanacağından almadık.

LHS deki ilk terim RHS deki ilk terimle eşlenir.

$$\Delta t \frac{\partial}{\partial t} \langle x, t \mid x_1, t_1 \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \left(\sqrt{2\pi} \right) \left(\frac{i \hbar \Delta t}{m} \right)^{3/2} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle x, t \mid x_1, t_1 \rangle - (i/\hbar) \Delta t \, V \langle x, t \mid x_1, t_1 \rangle$$

Burada $\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, \xi^2\, e^{im\xi^2/2\hbar\Delta t} = \sqrt{2\pi}\left(\frac{i\hbar\Delta t}{m}\right)^{3/2}$

kullanıldı. Bu anlamda $\langle x,t|x_1,t_1\rangle$ Schrödinger'in zamana bağımlı dalga denk. ini sağlar.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle x,t|x_1,t_1\rangle = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\langle x,t|x_1,t_1\rangle + V\langle x,t|x_1,t_1\rangle$$

2.6. Potansiyel ve Ayar Dönüşümleri

Klasik mekanikte pot. enerjinin sıfır noktasının fiziksel öneme haiz olmadığını biliriz. $\vec{x}(t)$ ve $\vec{L}(t)$ gibi dinamik değişkenlerin zaman gelişimini, $V(\vec{x})$'i ya da $V(\vec{x})+V_0$'ı kullandım (V_0 hem uzay ve hem de zamanda sbt.) ya da kullanmayalım bağımsızdır. Newton'un II yasasında beliren kuvvet sadece pot.'in gradyentiyle bağlıdır; ek bir sabit önemsizdir. QM de durum nedir?

Pot.e maruz kalmış bir S.R durum ketinin zaman evrimine bakalım. $|\alpha,t_0;t\rangle$ $V(\vec{x})$ varlığında bir durum keti ve $\widetilde{|\alpha,t_0;t\rangle}$ de

$$\widetilde{V}(\vec{x}) = V(\vec{x}) + V_0$$

karşı gelen durum keti olsun.

$t=t_0$ da başlangıç şartlarının her iki ket içinde $|\alpha\rangle$ ile çakıştığını varsayalım. Bu her zaman uygun bir faz seçilimi ile yapılabilir. t anındaki durum keti $\mathcal{U}(t,t_0)$ zaman-evrim op.'ünü uygulayarak elde edilebilir.

$$\widetilde{|\alpha, t_0; t\rangle} = \exp\left[-i\left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + V(x) + V_0\right)\frac{(t-t_0)}{\hbar}\right]|\alpha\rangle$$

$$= \exp\left[\frac{-iV_0(t-t_0)}{\hbar}\right]|\alpha, t_0, t\rangle$$

Diğer bir deyişle, $\tilde{V}$ nin etkisi altında hesaplanan ket $\exp\left[\frac{-iV_0(t-t_0)}{\hbar}\right]$ faz çarpanı kadar farklı bir zaman bağımlılığına sahiptir. Durağan durumlar için, bu, $V(x)$ ile hesaplanan zaman bağımlılığı $\exp\left(-iE(t-t_0)/\hbar\right)$ ise $V(\vec{x})+V_0$ ile hesaplanan karşı gelen zaman bağımlılığının $\exp\left[-i(E+V_0)(t-t_0)/\hbar\right]$ olduğu anlamına gelir. V yerine $\tilde{V}$ kullanımı

$$E \rightarrow E + V_0$$

değişimine karşı gelir. $\langle\vec{x}\rangle$ ve $\langle\vec{S}\rangle$ nin beklenen değerlerinin zaman evrimi gibi gözlenebilir etkiler daima enerji farklarına bağlıdır; tüm durum keti $\exp\left(-iV_0(t-t_0)/\hbar\right)$ çarpanı ile çarpılmış ile gözlenebilirlerin beklenen değerlerinde fark olmaz.

Potansiyelin sıfır-nokta enerjisi için konvensiyonumuzdaki değişim,

$$V(\vec{x}) \to V(\vec{x}) + V_0$$

$$|\alpha, t_0; t\rangle \to \exp\left[-iV_0(t-t_0)/\hbar\right]|\alpha, t_0; t\rangle$$

durum ketindeki değişim ile verilir. Tabiiki, bu değişim dalga fonk.unda

$$\psi(\vec{x}', t) \to \exp\left[\frac{-iV_0(t-t_0)}{\hbar}\right]\psi(\vec{x}', t)$$

ile olur. Şimdi V_0 ı uzaysal olarak üniform ama zaman bağımlı alalım.

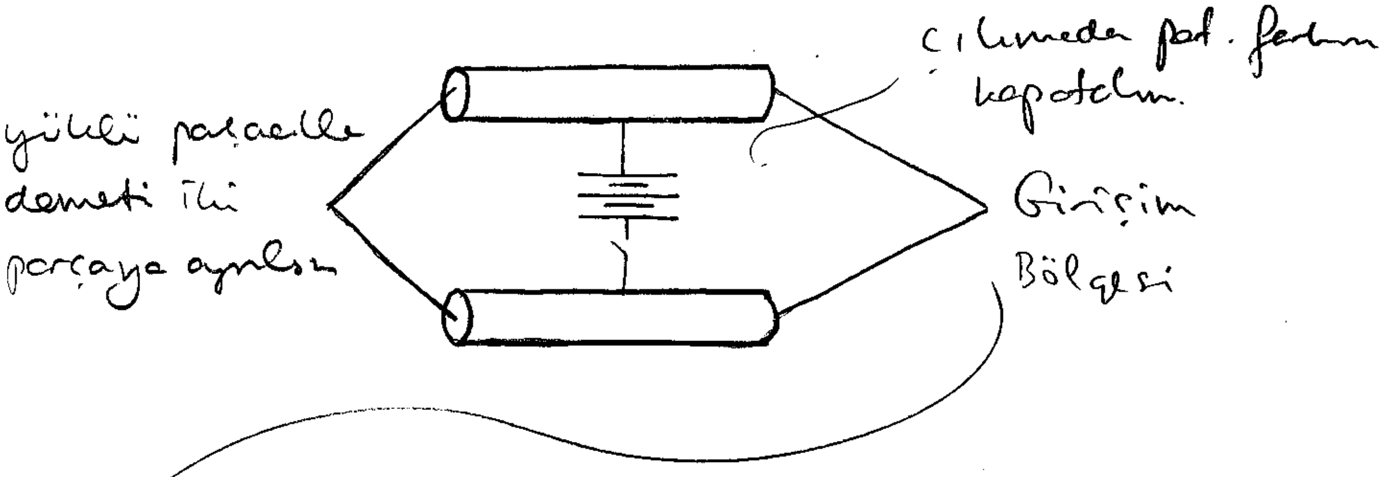
$$|\alpha, t_0; t\rangle \to \exp\left[-i\int_{t_0}^{t} dt' \frac{V_0(t')}{\hbar}\right]|\alpha, t_0; t\rangle$$

Fiziksel olarak, $V(\vec{x})$ yerine $V(\vec{x}) + V_0$ ı kullanmak her bir zaman anında yeni bir sıfır noktasını (enerji skalasının) seçiyoruz anlamına gelir.

Potansiyelin mutlak skalasının seçimi keyfi olsa bile, pot. farkları aşikar olmayan fiziksel öneme sahiptirler, gerçekte, kuvvetli bir şekilde dedekte edilebilirler.

BS K

Bu noktayı illüstre etmek için, aşağıdaki şekli inceleyelim:



bu bölgede $\cos(\varphi_1-\varphi_2)$, $\sin(\varphi_1-\varphi_2)$

$$\varphi_1-\varphi_2=\frac{1}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt\,\left[V_2(t)-V_1(t)\right]$$

Saf olarak QM'sel.

Aharanov–Bohm deneyinin Minkowski-dönmüş olanı.

QM de Gravite :

Düşen cismin hareket denk.'i

$$m\ddot{\vec{x}}=-m\vec{\nabla}\Phi_{Gra.}=-mg\hat{z}$$

m düşer; bir tüy ve taş aynı şekilde davranır. – à la Galileo gravite altında. Bu, doğal olarak, eylemsizlik ve gravitasyonel kütlelerin eşitliğinin bir sonucudur. m açık olarak belirlenmediğinden KM deki gravite saf geometrik olduğu söylenir.

QM de durum farklıdır. Dalga mekaniği formülasyonunda, 2.6.10'nın analoğu

$$\left[-\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\vec{\nabla}^2 + m\Phi_{Gra} \right]\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

kütleler birbirini götürmez. $\hbar/m$ şeklinde belirir. $\hbar$'nın belirdiği bir problemde m nin de belirmesini bekleriz. Bu noktayı

$$\langle \vec{x}_n, t_n | \vec{x}_{n-1}, t_{n-1} \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \exp\left[i \int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \frac{\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - mgz\right)}{\hbar} \right]$$

$$(t_n - t_{n-1} = \Delta t \to 0)$$

üzerine dayalı düşen cismin Feynman-yol integrali (FPI) formülasyonunu kullanarak da gösterebiliriz. (m/t olarak belirir.)

Bu, Hamilton'un klasik yaklaşımı ile de tersttir.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - mgz \right) = 0$$

m elimine edilir. 2.6.11 Schrödinger denk.i ile başlayarak,

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle \vec{x} \rangle = -g\hat{z}$$

Ehrenfest teoremini türetebiliriz. Burada da ne $\hbar$ ne ne de m belirir. Gravitenin açıkça olmayan QMsel etkisini görmek için $\hbar$'ın açıkça belirdiği etkiler incelenmelidir.

BS K

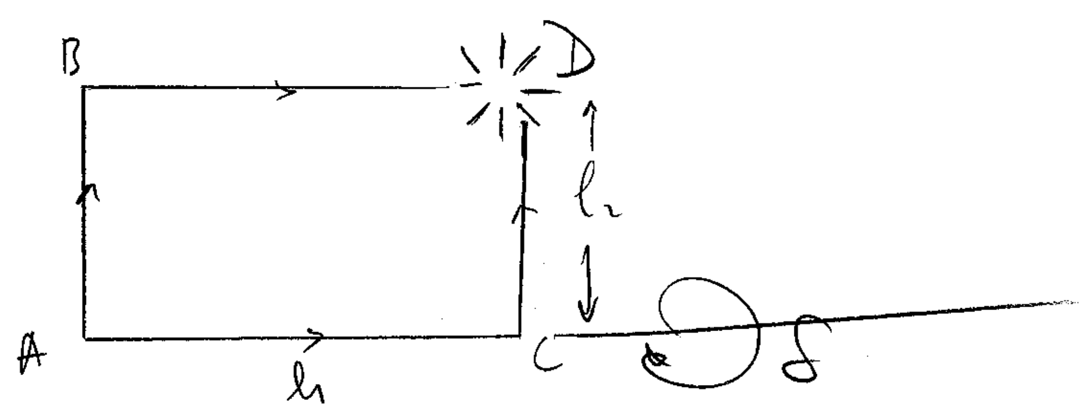
1975'e kadar, 2.6.11 deki $m\Phi_{Gr}$ teriminin varlığını gerçekleştirmiş doğrudan bir deney yoktu. Emin olmak için, bir elementer parçacığın serbest düşüşü gözlenmiş, ancak bunun için klasik hareket denk.'i hesaba katılmıştır. V. Pound ve et al 'nın ünlü <u>fotonun ağırlığı</u> deneyi Quantum bölgesinde graviteyi test edememiştir.

$e + n$ bağlı $\quad CF \simeq 2.10^{39}\, GF$

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{e^2 m_e} \to \frac{\hbar^2}{G_N m_e^2 m_n} \sim 10^{31}\, cm = 10^{13} \text{ ışık yılı}$$

Evrenin kestirilen yarıçapından büyük!

Şimdi Gravite-indüklenmiş Quantum girişimi olarak bilinen dikkate değer bir olayı tartışalım.



termal nötron demeti

$mgl_2 \sin\delta$

BS K

Elektromagnetizmada Ayar Dönüşümleri

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad , \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\phi \qquad (e<0) \text{ elekt.}$$

$$\phi = \phi(\vec{x}) \qquad \vec{A} = \vec{A}(\vec{x})$$

$$\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 \longrightarrow \vec{p}^{\,2} - \frac{e}{c}\left(\vec{p}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{p}\right) + \left(\frac{e}{c}\right)^2 \vec{A}^{\,2}$$

$$H = H^\dagger$$

HR de yüklü parçacığın (ϕ ve $\vec{A}$ 'ya maruz kalmış) dinamiği

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[x_i, H] = \frac{(p_i - eA_i/c)}{m}$$

Bu kitapta ötelemenin jenaratörü olarak tanımlanmış olan $\vec{p}$ $m\,d\vec{x}/dt$ ile aynı değildir. $\vec{p}$ sıklıkla kanonik mom. (kinematik ya da mekanikel mom.'dan ayırt etmek için) olarak adlandırılır.

$$\vec{\Pi} \equiv m\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{p} - \frac{e\vec{A}}{c}$$

$$[p_i, p_j] = 0$$

$$[\Pi_i, \Pi_j] = \left(\frac{i\hbar e}{c}\right)\epsilon_{ijk} B_k$$

$$H = \frac{\Pi^2}{2m} + e\phi$$

Lorentz kuvvetinin QM'cel versiyonu

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{d\vec{\Pi}}{dt} = e\left[\vec{E} + \frac{1}{2c}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\times\vec{B} - \vec{B}\times\frac{d\vec{x}}{dt}\right)\right]$$

$$\langle \vec{x}'|\left[\vec{\Pi} - \frac{e\vec{A}(\vec{x})}{c}\right]|\alpha, t_0; t\rangle$$

$$= \left[-i\hbar\vec{\nabla}' - \frac{e\vec{A}(\vec{x}')}{c}\right]\langle \vec{x}'|\left[\vec{p} - \frac{e\vec{A}(\vec{x})}{c}\right]|\alpha, t_0; t\rangle$$

$$= \left[-i\hbar\vec{\nabla}' - \frac{e\vec{A}(\vec{x}')}{c}\right]\cdot\left[-i\hbar\vec{\nabla}' - \frac{e\vec{A}(\vec{x}')}{c}\right]\langle \vec{x}'|\alpha, t_0; t\rangle$$

$$\frac{1}{2m}\left[-i\hbar\vec{\nabla}' - \frac{e\vec{A}(\vec{x}')}{c}\right]\cdot\left[-i\hbar\vec{\nabla}' - \frac{e\vec{A}(\vec{x}')}{c}\right]\langle \vec{x}'|\alpha, t_0; t\rangle$$

$$+ e\phi(\vec{x}')\langle \vec{x}'|\alpha, t_0; t\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle \vec{x}'|\alpha, t_0; t\rangle$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}'\cdot\vec{j} = 0$$

$$\vec{j} = \left(\frac{\hbar}{m}\right)\mathrm{Im}\left(\psi^*\vec{\nabla}'\psi\right) - \left(\frac{e}{mc}\right)\vec{A}|\psi|^2$$

$\vec{\nabla}' \to \vec{\nabla}' - \left(\frac{ie}{\hbar c}\right)\vec{A}$ yerdeğiştirmelerinden beklediğimiz şey.

BS K

$\sqrt{\rho}\, e^{iS/\hbar}$ yazarsak

$$\vec{j} = \left(\frac{\rho}{m}\right)\left(\vec{\nabla} S - \frac{e\vec{A}}{c}\right)$$

süperiletkenliği, akı kuantizasyonunu vs. tartışırken bu form daha uygundur. $\vec{j}$'nin beklenen değeri kinematik mom'un (kanonik değil) beklenen değeri'dir.

$$\int d^3x\, \vec{j} = \frac{\langle \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \rangle}{m} = \frac{\langle \vec{\Pi} \rangle}{m}$$

Şimdi elektromagnetizmadaki ayar dönüşümlerini konuşmayı tartışmak konumundayız.

$$\phi \to \phi + \lambda \qquad \vec{A} \to \vec{A} \qquad (1)$$

(sbt. x ve t'den bağımsız.)

$\vec{E}$ ve $\vec{B}$ değişmeden kalır. Enerji skalasının sıfır noktasında bir değişime yol açar.

Daha ilginç olanı

$$\phi \to \phi \qquad \vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \qquad (2)$$

dönüşümü'dür. $\Lambda \equiv \Lambda(\vec{x})$ $\vec{E}$ ve $\vec{B}$ değişmeden kalır. Hem (1) ve hem de (2)

BS K $\phi \to \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t} \qquad \vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda$ 'nın özel bir durumudurlar.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

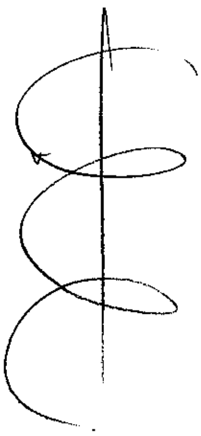
değişmez.

Klasik fizikte yüklü parçacığın yörüngesi gibi gözlenebilir etkiler kullanılan ayardan bağımsızdırlar.

$$\vec{B} = B\,\hat{z}$$

$$\vec{A} \equiv \vec{A}\left(\frac{-By}{2}, \frac{Bx}{2}, 0\right)$$

$$\equiv \vec{A}\left(-By, 0, 0\right) \leftarrow \vec{A} \to \vec{A} - \vec{\nabla}\left(\frac{Bxy}{2}\right)$$



Hamilton hareket denklemleri,

$$\frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \qquad \frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \ldots$$

Genelde, kanonik mom. ayar-değişmez bir nicelik değildir. Aksine, kinematik mom $\vec{\Pi}$, ya da $d\vec{x}/dt$ ayar değişmez bir özelliktir 2.6.23. $\vec{p}$ $\vec{A}$'daki değişikliği kompanse etmeli.

$\vec{A}$ 'nın varlığında durum ketini $|\alpha\rangle$ ile gösterelim.

$$\tilde{\vec{A}} = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda$$

olduğu zaman aynı fiziksel durum için durum keti $|\tilde{\alpha}\rangle$ ile gösterilsin.

1 $\quad \langle \alpha | \vec{x} | \alpha \rangle = \langle \tilde{\alpha} | \vec{x} | \tilde{\alpha} \rangle$

2 $\quad \langle \alpha | \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} | \alpha \rangle = \langle \tilde{\alpha} | \vec{p} - \frac{e}{c}\tilde{\vec{A}} | \alpha \rangle$

3 $\quad \langle \alpha | \alpha \rangle = \langle \tilde{\alpha} | \tilde{\alpha} \rangle$

$|\tilde{\alpha}\rangle = \varphi |\alpha\rangle$ şunu kurduğum bunlar söylüyor

$$\varphi^{\dagger} \vec{x} \varphi = \vec{x} \quad \text{ve} \quad \varphi^{\dagger}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} - \frac{e\vec{\nabla}\Lambda}{c}\right)\varphi = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}$$

ise 1 ve 2 invaryans özellikleri garantilenir.

$$\varphi = e^{ie\Lambda(\vec{x})/\hbar c}$$

bu işi yapar. 1°) $\varphi \cdot \varphi^{\dagger} = 1$ 3 tamam. 2°) 1 sağlanır çünkü $\vec{x}$ $\vec{x}$'in her fonk. u ile değiş tokuş eder. 3°) (2) sağlanır.

Ayar dönüşümleri altında QM'nin invaryanslığı doğrudan Schrödinger denk.ine bakarak gösterilebilir. $|\alpha, t_0; t\rangle$ $\vec{A}$'nın varlığında Sch. denk.ine bir çözüm olsun:

$$\left[\frac{(\vec{p} - e\vec{A}/c)^2}{2m} + e\phi\right]|\alpha, t_0; t\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha, t_0; t\rangle$$

$\tilde{\vec{A}}$'nın varlığında karşılık gelen çözüm

$$\left[\frac{(\vec{p} - e\vec{A}/c - e\vec{\nabla}\Lambda/c)^2}{2m} + e\phi\right]\widetilde{|\alpha, t_0; t\rangle} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{|\alpha, t_0; t\rangle}$$

Yeni keti

$$\widetilde{|\alpha, t_0; t\rangle} = e^{ie\Lambda/\hbar c}|\alpha, t_0; t\rangle$$

olarak alır isek yeni Sch. denk.i sağlanacaktır.

$$e^{-ie\Lambda/\hbar c}\left(\vec{p} - \frac{e\vec{A}}{c} - \frac{e\vec{\nabla}\Lambda}{c}\right)^2 e^{ie\Lambda/\hbar c} = \left(\vec{p} - \frac{e\vec{A}}{c}\right)^2$$

karşılık gelen dalga fonk.'u,

$$\tilde{\psi}(\vec{x}', t) = e^{\underbrace{ie\Lambda(\vec{x}')/\hbar c}_{\text{reel}}}\psi(\vec{x}', t)$$

Özet: aynı fiziksel durum için farklı vektör potansiyelleri kullanıldığı zaman, karşılık gelen durum ketleri (ya da dalga fonk. ları) farklı olmalı. Bununla birlikte, yalnızca küçük bir değişiklik gerekir: $\vec{A}$ ile belirlenen ayardan $\vec{A}+\vec{\nabla}\Lambda$ ile belirlenen ayara yalnızca eski keti $\exp[ie\Lambda(\vec{x})/\hbar c]\exp[ie\Lambda(\vec{x}')/\hbar c]$ ile çarparak geçeriz. Öteleme jeneratörü olarak tanımlanmış kanonik mom., kinematik mom ve olasılık akısı ayar değişmez iken, beklenen değeri seçilen özel ayara bağlıdır anlamında ayar bağımlıdır.

göz önüne alalım.

$$F(\vec{x}) \qquad F(\vec{x}+d\vec{x}) \simeq F(\vec{x}) + (\vec{\nabla}F)\cdot d\vec{x}$$

$\vec{x} \to \vec{x}+d\vec{x}$ skala değişimi yapalım

$$1\Big|_{\vec{x}} \longrightarrow \left[1+\Sigma(\vec{x})\cdot d\vec{x}\right]_{\vec{x}+d\vec{x}}$$

O zaman $F(\vec{x})$'yi tekrar skala etmeliyiz.

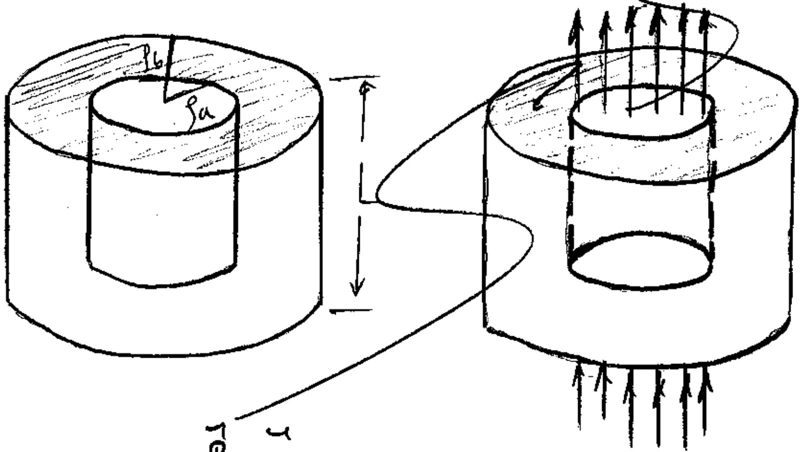
$$F(\vec{x}+d\vec{x})\Big|_{\text{rescl.}} \simeq F(\vec{x}) + \left[(\vec{\nabla}+\Sigma)F\right]\cdot dx$$

$$\vec{\nabla} - \frac{ie}{\hbar c}\vec{A} \qquad \text{ayar değişmez.}$$

BS K

Aharanov – Bohm Olayı

$\vec{B} \neq \vec{0}$



$\vec{B} = \vec{0}$
ama
$\vec{A} \neq \vec{0}$

$$\vec{B} = B\hat{z}$$

$$\vec{A} = \left(\frac{B\rho_a^2}{2\rho}\right)\hat{\varphi}$$

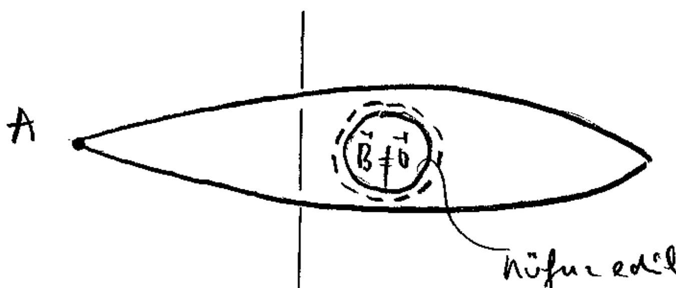
$$\vec{\nabla} \to \vec{\nabla} - \frac{ie}{\hbar c}\vec{A}$$

$$\vec{\nabla} = \hat{\rho}\,\partial_\rho + \hat{z}\,\partial_z + \hat{\varphi}\,\rho^{-1}\partial_\varphi$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} \to \frac{\partial}{\partial\varphi} - \left(\frac{ie}{\hbar c}\right)\frac{B\rho_a^2}{2}$$

en. spekt. da gözlenebilir bir değişime yol açar.

Aharanov-Bohm olayının bağlı-durum versiyonu.



Girişim Bölg.

nüfuz edilemeyen silindir.

$\vec{x}_1$ — A

$\vec{x}_N$ — B

$$L^{(0)}_{cl} = \frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2 \longrightarrow L^{(0)}_{cl} + \frac{e}{c}\,\frac{d\vec{x}}{dt}\cdot\vec{A}$$

$\vec{B} = \vec{0}$

(x_{n-1}, t_{n-1}) —— (x_n, t_n) e giden belirli bir yol segmenti için eylemdeki karşılık gelen değişim

$$S^{(0)}(n,n-1) \longrightarrow S^{(0)}(n,n-1) + \underbrace{\frac{e}{c}\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)\cdot\vec{A}}_{=\frac{e}{c}\int_{x_{n-1}}^{x_n}\vec{A}\cdot d\vec{s}}$$

○ <u>$\vec{x}_1 \longrightarrow \vec{x}_N$ toplam katkı;</u>

$$\prod \exp\left[\frac{iS^{(0)}(n,n-1)}{\hbar}\right] \to \left\{\prod \exp\left[\frac{iS^{(0)}(n,n-1)}{\hbar}\right]\right\} e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_N}\vec{A}\cdot d\vec{s}}$$

halen tek bir özel yol için katkı.

$\int \vec{A}\cdot d\vec{s}$ yollardan bağımsız

○

$$\int_{\text{yukarı}} \mathcal{D}[\vec{x}(t)]\, e^{iS^{(0)}(N,1)/\hbar} + \int_{\text{aşağı}} \mathcal{D}[\vec{x}(t)]\, e^{iS^{(0)}(N,1)/\hbar}$$

$$\longrightarrow \int_{\text{yuk.}} \mathcal{D}[\vec{x}(t)]\, e^{iS^{(0)}(N,1)/\hbar} \left\{ e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{x_1}^{\vec{x}_N}\vec{A}\cdot d\vec{s}} \right\}_{\text{yuk.}}$$

$$+ \int_{\text{aş}} \mathcal{D}[\vec{x}(t)]\, e^{iS^{(0)}(N,1)/\hbar} \left\{ e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_N}\vec{A}\cdot d\vec{s}} \right\}_{\text{aş}}.$$

$\vec{B}$ 'nin varlığında ve yokluğundaki faz farkı,

$$\left(\frac{e}{\hbar c}\right)\int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_N}\vec{A}\cdot d\vec{s}\,\Big|_{\text{yukarı}} - \left(\frac{e}{\hbar c}\right)\int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_N}\vec{A}\cdot d\vec{s}\,\Big|_{\text{aşağı}} = \frac{e}{\hbar c}\oint \vec{A}\cdot d\vec{s}$$

$$= \frac{e}{\hbar c}\,\Phi_B$$

Φ_B : nüfuz edilemeyen silindirin içerisindeki akı. Bu magnetik alan şiddetini değiştirilirken

$$\frac{2\pi\hbar c}{|e|} = 4.135\times10^{-7}\ \text{Gauss-cm}^2$$

temel magnetik akı birimi ile verilen bir periyot ile B bölgesinde parçacığı gözleme olasılığında sinüzoidal bir bileşen olduğu anlamına gelir. Burada tartışılan girişim etkisinin tamamen QM sel olduğunu vurgulamak gerekir. Daha evvelki bağlı durum problemindeki gibi, burada, parçacık sonlu $\vec{B}$ bölgesine giremez: Parçacık dalga fonk.unun sonlu olduğu her yerde Lorentz kuvveti sıfırdır. Nüfuz edilemeyen silindirin içerisinde bir mag. alanın varlığına ya da yokluğuna bağlı olan kuvvetli bir girişim deseni vardır. Bu nokta QM de $\vec{B}$ den ziyade $\vec{A}$'nın temel olan şey olduğunun tartışılmasına sebebiyet vermiştir. Bununla birlikte gözlenebilir etkiler her iki örnekte de B cinsinden doğrudan ifade edilebilen Φ_B ye bağlı olduğuna dikkat edilmelidir.

BS K

Magnetik monopol

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 4\pi\rho_M \longleftrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$$

Doğada mag. monopol var ise, e, ħ ve c cinsinden kuantumlanmış olmalı. Nokta yüke benzeterek olduğunu varsayar isek,

$$\vec{B} = \frac{e_M}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{A} = \frac{e_M(1-\cos\theta)}{r\sin\theta}\hat{\phi}$$

dan türetilebilir

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \hat{r}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]$$

$$+\hat{\theta}\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right] + \hat{\varphi}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]$$

negatif z-ekseni üzerinde $(\theta=\pi)$ singüler. Bu problem için singülaritesiz bir pot. kurmak imkansızdır.

$$\oint_{\text{kapalı yüzey}} \vec{B}\cdot d\vec{\sigma} = 4\pi e_M \qquad \underline{\text{Gauss yasası}}.$$

$\vec{A}$ singüler olmasa idi,

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0 \quad \text{olurdu}$$

BS K

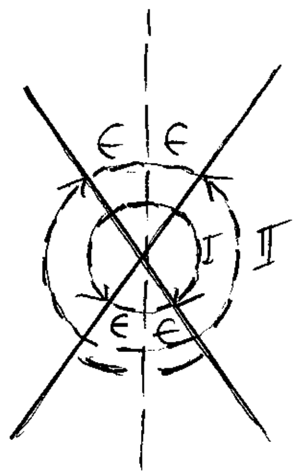
$$\int_{\text{kapalı yüzey}} \vec{B}\cdot d\vec{\sigma} = \int_V \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})\, d^3x = 0$$

Bununla birlikte, vektör pot. sadece $\vec{B}$'yi elde etmek için bir yol olduğundan, $\vec{A}$ için heryerde geçerli olan tek bir ifade elde etmek için ısrarlı olmayız.

$$\vec{A}^{I} = \left[\frac{e_M(1-\cos\theta)}{r\sin\theta}\right]\hat{\varphi} \qquad \theta < \pi-\epsilon$$

$$\vec{A}^{II} = -\left[\frac{e_M(1+\cos\theta)}{r\sin\theta}\right]\hat{\varphi} \qquad \theta > \epsilon$$

pot. çifti kurduğumuzu varsayalım. $\vec{A}^{I}$, negatif z ekseni etrafında $\theta=\pi-\epsilon$ ile tanımlanan koninin içi hariç heryerde, aynı şekilde $\vec{A}^{II}$, pozitif z-ekseni etrafında $\theta=\epsilon$ konisi hariç heryerde kullanılabilir.



Şimdi $\epsilon<\theta<\pi-\epsilon$ üst üste gelme bölgesinde, ki burada ya $\vec{A}^{I}$'i ya da $\vec{A}^{II}$'yi kullanabiliriz, ne olduğuna bakalım. İki pot. de aynı magnetik alana yol açtığından birbirleri ile bir ayar dönüşümü ile ilişkili olmalıdırlar.

Bu problem için Λ'yı bulurken,

$$\vec{A}^{II} - \vec{A}^{I} = \frac{-2e_M}{r\sin\theta}\,\hat{\varphi}$$

ye bakarız.

$$\vec{\nabla}\Lambda = \hat{r}\frac{\partial\Lambda}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\Lambda}{\partial\theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Lambda}{\partial\varphi}$$

$\Lambda = -2e_M\varphi$ işimizi görür. $B = \frac{e_M}{r^2}\hat{r}$

Şimdi de, 2.6.74 mag. alanına maruz kalmış e yüklü parçacığın dalga fonksiyonuna göz atalım. Daha evvelden de vurguladığımız gibi, Dalga fonk.unun özel formu kullanılan özel ayara bağlıdır. Üstüste gelme bölgesinde ya $\vec{A}^{I}$'i ya da $\vec{A}^{II}$'yi kullanırız, 2.6.55 e göre karşı gelen dalga fonk.ları

$$\psi^{II} = e^{-\frac{2iee_M\varphi}{\hbar c}}\psi^{I}$$

ile birbirleri ile ilişkilidirler. ψ^{I} ve ψ^{II}'nin herbiri tek-değerli olmalıdırlar, özel bir ayar seçtiğimizden dolayı konum özketleri cinsinden durum ketinin açılımı eşsiz olmalı. Tüm bunlardan sonra, tekrar tekrar vurguladığımız gibi, dalga fonk.u basitçe konum özketleri cinsinden durum keti için bir açılım katsayısıdır.

Şimdi sabit olan belirli bir r yarıçapı ile $\theta = \pi/2$ ekvatoru üzerinde ψ^{II}'nin davranışını inceleyelim. φ azimutal açısını arttırdığımız zaman (ekvator boyunca), $\varphi = 0 \to \varphi = 2\pi$ olur, ψ^{I} kadar ψ^{II} de tek değerli olduğundan orijinal değerine gelmelidir.

BS K

2.6.84 e göre bu,

$$\frac{2 e e_m}{\hbar c} = \pm N \qquad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ise mümkündür. Magnetik yükler

$$\frac{\hbar c}{2|e|} \simeq \left(\frac{137}{2}\right)|e|$$

biriminde kuantumlanmış olmalıdırlar.

Prb. 2.1.)

$$H = -\left(\frac{eB}{mc}\right) S_z = \omega S_z$$

$$\dot{S}_x = \frac{1}{i\hbar}[S_x, H] = \frac{\omega}{i\hbar}[S_x, S_z] = -\omega S_y$$

$$\dot{S}_y = \frac{1}{i\hbar}[S_y, H] = \frac{\omega}{i\hbar}[S_y, S_z] = \omega S_x$$

$$\dot{S}_z = 0$$

$$\dot{S}_x \mp i \dot{S}_y = -\omega S_y \mp i\omega S_x$$

$$= \mp i\omega (S_x \mp i S_y)$$

$$(S_x \mp i S_y)_t = (S_x \mp i S_y)_0 \, e^{\mp i\omega t}$$

$$S_x(t) = S_x(0) \cos\omega t - S_y(0) \sin\omega t$$

$$S_y(t) = S_y(0) \cos\omega t + S_x(0) \sin\omega t$$

$$S_z(t) = S_z(0)$$

BS K

prb. 2.4.) $H = \frac{p^2}{2m}$ (1D)

$$\dot{x} = \frac{1}{i\hbar}\left[x, \frac{p^2}{2m}\right] = \frac{p}{m} \qquad \dot{p} = \frac{1}{i\hbar}\left[p, p^2/2m\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$p(t) = p(0)$$

$$x(t) = x(0) + \frac{p(0)}{m}t$$

$$\Rightarrow [x(t), x(0)] = \frac{t}{m}[x(0), p(0)] = \frac{i\hbar t}{m}$$

---

prb. 2.5.) $[H, x] = \left[\frac{p^2}{2m} + V(x), x\right] = -\frac{i\hbar p}{m} \Rightarrow [[H, x], x] = -\frac{\hbar^2}{m}$

$$[(Hx - xH), x] = -x(Hx - xH) + (Hx - xH)x$$

$$\langle a''|Hxx|a''\rangle - 2\langle a''|xHx|a''\rangle + \langle a''|xxH|a''\rangle = -\frac{\hbar^2}{m}$$

$$H|a''\rangle = E_{a''}|a''\rangle \qquad \langle a''|H = E_{a''}\langle a''|$$

$$E_{a''}\langle a''|xx|a''\rangle - 2\langle a''|xHx|a''\rangle + E_{a''}\langle a''|xx|a''\rangle = -\hbar^2/m$$

$$\sum_{a'}\langle a''|xH|a'\rangle\langle a'|x|a''\rangle = \sum_{a'} E_{a'}|\langle a''|x|a'\rangle|^2$$

$$E_{a''}\sum_{a'}|\langle a''|x|a'\rangle|^2 - 2\sum_{a'}E_{a'}|\langle a''|x|a'\rangle|^2 + E_{a''}\sum_{a'}|\langle a''|x|a'\rangle|^2 = -\hbar^2/m$$

$$\Rightarrow \sum_{a'}(E_{a'} - E_{a''})|\langle a''|x|a'\rangle|^2 = \hbar^2/2m$$

BS K

prb. 2.6.) $[\vec{x}\cdot\vec{p}, H] = [\vec{x}\cdot\vec{p}, \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})]$

$$= \frac{1}{2m}[\vec{x}\cdot\vec{p}, \vec{p}^2] + [\vec{x}\cdot\vec{p}, V(\vec{x})]$$

$$= \frac{1}{2m}\sum_{ij}[x_i p_i, p_j p_j] + \sum_i [x_i p_i, V(\vec{x})]$$

$$= \frac{1}{2m}\sum_{ij}\left(\cancel{x_i[p_i, p_j p_j]} + [x_i, p_j p_j]p_i\right)$$

$$+ \sum_i \left(x_i[p_i, V(\vec{x})] + \cancel{[x_i, V(\vec{x})]}p_i\right)$$

$$= \frac{1}{2m}\sum_{ij}[x_i, p_j p_j]p_i + \sum_i x_i[p_i, V(\vec{x})]$$

$$= \frac{1}{2m}\sum_{ij}\left([x_i, p_j]p_j p_i + p_j[x_i, p_j]p_i\right) + \sum_i x_i[p_i, V(\vec{x})]$$

$$= \frac{1}{2m}\sum_{ij}\left(i\hbar\delta_{ij}p_j p_i + p_j(i\hbar\delta_{ij})p_i\right) + \sum_i x_i\left(-i\hbar\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)$$

$$= i\hbar\left[\frac{\vec{p}^2}{m} - \vec{x}\cdot\vec{\nabla}V(\vec{x})\right]$$

$$\Rightarrow \langle[\vec{x}\cdot\vec{p}, H]\rangle = i\hbar\left\langle\frac{\vec{p}^2}{m}\right\rangle - i\hbar\langle\vec{x}\cdot\vec{\nabla}V(\vec{x})\rangle = i\hbar\frac{d}{dt}\vec{x}\cdot\vec{p}$$

Durağan bir durum için $\frac{d}{dt}(\vec{x}\cdot\vec{p}) = 0$

BS K

. prb. 2.8.) $a' \neq a''$ $A|a'\rangle = a'|a'\rangle$

$A|a''\rangle = a''|a''\rangle$

$H = |a'\rangle \delta \langle a''| + |a''\rangle \delta \langle a'|$ $\delta \in R$

a) $|a'\rangle$, $|a''\rangle$ H'nin özdurumları değil.

$H = \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\langle a'|H|a'\rangle = \langle a''|H|a''\rangle = 0$

$\langle a''|H|a'\rangle = \langle a'|H|a''\rangle = 1$

○ $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $|H - E\mathbb{1}| = 0 \Rightarrow E = \pm\delta$ ○

$$\begin{pmatrix} 0 & \delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \pm\delta\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

$E = +\delta \Rightarrow \psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $E_- \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \psi_-$

○) $t = 0$ $|a'\rangle$ da $t > 0 \Rightarrow$ durum nedir.

$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$ $H|\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle$

$$\begin{pmatrix} 0 & \delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = i\hbar \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \delta\, b(t) &= i\hbar \frac{da(t)}{dt} \\ \delta\, a(t) &= i\hbar \frac{db(t)}{dt} \end{aligned}\right] \quad \begin{aligned} a(t) &= -\left(\frac{\hbar}{\delta}\right)^2 \frac{d^2 a}{dt^2} \Rightarrow a(t) = a_1 \cos wt + a_2 \sin wt \\ b(t) &= -\left(\frac{\hbar}{\delta}\right)^2 \frac{d^2 b}{dt^2} \quad b(t) = b_1 \cos wt + b_2 \sin wt \end{aligned}$$

$w = \frac{\delta}{\hbar}$

BS K

$|a'\rangle = |\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = 1 \quad b_1 = 0$

normalizasyon $\Rightarrow b_2 = 1 \quad a_2 = 0$

$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos wt \\ \sin wt \end{pmatrix}$$

c) $t > 0$ için sistemi $|a''\rangle$ de bulma olasılığı

$\langle a''| = (0 \;\; 1) \Rightarrow |\langle a''|\psi(t)\rangle|^2 = \sin^2 wt$

d) $H = \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J_x$ spin 1/2 $\delta = \hbar/2$

---

prb. 2.11 a) $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m w^2 x^2$ $t = 0 \Rightarrow e^{-ipa/\hbar} |0\rangle = |\alpha\rangle$

$t > 0$ için $\langle x \rangle = ?$ $\dot{x} = \frac{p}{m}$ $\dot{p} = -m w^2 x$

$\Rightarrow \ddot{x} + w^2 x = 0 \Rightarrow x(t) = a \cos wt + b \sin wt$

$t = 0$ da $x(0) = a$ $\dot{x}(t) = -aw \sin wt + bw \cos wt$

$$\dot{x}(0) = bw = \frac{p(0)}{m} \Rightarrow p(0) = bmw$$

$$\Rightarrow x(t) = x(0) \cos wt + \frac{p(0)}{mw} \sin wt$$

$$|\alpha\rangle = e^{-ip(0)a/\hbar} |0\rangle$$

HR de $t > 0$ $\langle x(t) \rangle = \langle \alpha | x(t) | \alpha \rangle$

BS K

$$e^{ip(0)a/\hbar} x(0) e^{-ip(0)a/\hbar} = e^{ip(0)a/\hbar} \left([x(0), e^{-ip(0)a/\hbar}] + e^{-ip(0)a/\hbar} x(0) \right)$$

$$= x(0) + a$$

$$e^{ip(0)a/\hbar} p(0) e^{-ip(0)a/\hbar} = p(0)$$

$$\langle 0 | x(0) | 0 \rangle = \langle 0 | p(0) | 0 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle x(t) \rangle = \langle 0 | e^{ip(0)a/\hbar} \left[x(0) \cos\omega t + \frac{p(0)}{m\omega} \sin\omega t \right] e^{-ip(0)a/\hbar} | 0 \rangle$$

$$= a \cos\omega t$$

---

prb. 2.12.) $\langle x' | 0 \rangle = \pi^{-1/4} x_0^{-1/2} \exp\left[-x'^2 / 2x_0^2 \right] \quad x_0 \equiv (\hbar / m\omega)^{1/2}$

a)
$$\langle x' | \alpha \rangle = \langle x' | e^{-ipa/\hbar} | 0 \rangle$$

$$e^{ipa/\hbar} | x' \rangle = | x' - a \rangle \qquad \langle x' | e^{-ipa/\hbar} = \langle x' - a |$$

$$\langle x' | \alpha \rangle = \langle x' - a | 0 \rangle \Rightarrow \pi^{-1/4} x_0^{-1/2} e^{-(x'-a)^2 / 2x_0^2} = \langle x' | \alpha \rangle$$

b) P (taban durumda $|\alpha\rangle$ bulunma olasılığı) $= \int \langle \alpha | x' \rangle \langle x' | 0 \rangle dx'$

$$= e^{-a^2 / 2x_0^2}$$

Zamandan bağımsız.

Prb. 2.31.) $L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m w^2 x^2$

Cl. eylem $S(t, t_0) = \int_{t_0}^{t} dt \left(\frac{m \dot{x}^2}{2} - \frac{m w^2}{2} x^2 \right)$

$\Delta t = t_n - t_{n-1}$ ve $\Delta x = X_n - X_{n-1} \Rightarrow S(n, n-1) = \Delta t \frac{m}{2} (x_n - x_{n-1})^2 / \Delta t^2$

$$- \frac{m w^2}{2} (x_n + x_{n+1})^2$$

$$S(n, n-1) = \frac{m}{2} \left\{ \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{\Delta t} - w^2 \left(x_n - \frac{\Delta x}{2} \right)^2 \Delta t \right\}$$

$$= \frac{m}{2} \left\{ \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{\Delta t} - w^2 x_n^2 \Delta t \right\} \quad (1)$$

b) (1) den gelir gerliği

$$\langle x_n t_n | x_{n-1} t_{n-1} \rangle = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{1/2} e^{i S(n, n-1)/\hbar}$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{1/2} e^{\frac{i m}{2\hbar} \left[\frac{(x_n - x_{n-1})^2}{\Delta t} - w^2 x_n^2 \Delta t \right]}$$

2.5.18, 2.5.26 dan,

$$\langle x_n t_n | x_{n-1} t_{n-1} \rangle = K(x_n, t_n ; x_{n-1} t_{n-1})$$

$$= \left(\frac{m w}{2\pi i \hbar \sin w \Delta t} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{i m w}{2 h} \sin w \Delta t \left[(x_n^2 + x_{n-1}^2) \cos w \Delta t - 2 x_n x_{n-1} \right] \right]$$

$$\sin w \Delta t \simeq w \Delta t$$

BS K $(x_n^2 + x_{n-1}^2) \cos w \Delta t - 2 x_n x_{n-1}$

$$= (x_n - x_{n-1})^2 - \left[(x_n^2 + x_{n-1}^2)/2 \right] \omega^2 \Delta t^2$$

$$= (x_n - x_{n-1})^2 - \omega^2 x_n^2 \Delta t^2$$

$\Delta x \, \Delta t^2$ ihmal ettik $\quad \frac{x_n^2 + x_{n-1}^2}{2} = x_n^2 - \left[\frac{x_n + x_{n-1}}{2} \right] \Delta x$

$$\frac{(x_n^2 + x_{n-1}^2)\Delta t^2}{2} = x_n^2 \Delta t^2$$

$$\langle x_n t_n | x_{n-1} t_{n-1} \rangle = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{1/2} e^{\frac{im}{2\hbar}\left[(x_n - x_{n-1})^2/\Delta t - \omega^2 x_n^2 \Delta t \right]}$$

BS K

a

2.13.) $x=(\hbar/2m\omega)^{1/2}(a+a^\dagger)$ $\quad p=i(\hbar m\omega/2)^{1/2}(a^\dagger-a)$

$$\begin{cases}\langle m|p|n\rangle = i(\hbar m\omega/2)^{1/2}\left(\sqrt{n+1}\,\delta_{m,n+1}-\sqrt{n}\,\delta_{m,n+1}\right)\\ \langle m|x|n\rangle = (\hbar/2m\omega)^{1/2}\left(\sqrt{n}\,\delta_{m,n-1}+\sqrt{n+1}\,\delta_{m,n+1}\right)\end{cases}$$

$$\langle m|x^2|n\rangle = (\hbar/2m\omega)\left\{\sqrt{n(n-1)}\,\delta_{m,n-2}+(2n+1)\delta_{m,n} + \sqrt{(n+1)(n+2)}\,\delta_{m,n+2}\right\}$$

$$\langle m|p^2|n\rangle = -\frac{\hbar m\omega}{2}\left\{\sqrt{n(n-1)}\,\delta_{m,n-2}-(2n+1)\delta_{m,n} + \sqrt{(n+1)(n+2)}\,\delta_{m,n+2}\right\}$$

$\langle m|x^2|n\rangle = \sum_r \langle m|x|r\rangle\langle r|x|n\rangle$ kullanılabilir.

b Vrial theorem $\quad \langle 2T\rangle = \langle \vec{x}\cdot\vec{\nabla}V\rangle$

$$\left\langle \frac{p^2}{m}\right\rangle = \left\langle x\frac{dV}{dx}\right\rangle \qquad x\frac{dV}{dx} = m\omega^2x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m}\langle p^2\rangle = m\omega^2\langle x^2\rangle$$

$$\frac{1}{m}\langle p^2\rangle = \frac{1}{\cancel{m}}\,\frac{\hbar \cancel{m}\omega}{2}(2n+1)$$

$$\cancel{m}\omega^2\langle x^2\rangle = \cancel{m}\omega^{\cancel{2}}\frac{\hbar}{\cancel{2m\omega}}(2n+1)$$

2.16.) $|\alpha\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$

$$\langle x\rangle = \left(\langle 0|a^* + \langle 1|b^*\right) x \left(a|0\rangle + b|1\rangle\right)$$

$$= a^* a \langle 0|x|0\rangle + a^* b \langle 0|x|1\rangle$$

$$+ b^* a \langle 1|x|0\rangle + b^* b \langle 1|x|1\rangle$$

2.13 $\rightarrow$ $\langle m|x|n\rangle = (\hbar/2m\omega)^{1/2}\left(\sqrt{n}\,\delta_{m,n-1} + \sqrt{n+1}\,\delta_{m,n+1}\right)$

$$\Rightarrow \langle x\rangle = (\hbar/2m\omega)^{1/2}\left(a^* b + b^* a\right)$$

$$a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow \langle x\rangle = (\hbar/2m\omega)^{1/2}\, 2ab$$

$$= (2\hbar/m\omega)^{1/2}\, a\sqrt{1-a^2}$$

$$\frac{d}{da}\langle x\rangle = 0 \Rightarrow a = 1/\sqrt{2}\ ,\ b = 1/\sqrt{2}$$

$$\langle x\rangle_{MAX} = \frac{1}{2}\left(2\hbar/m\omega\right)^{1/2} \Rightarrow |\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)$$

b) $|\alpha, t_0; t\rangle = U(t;t_0)\,|\alpha, t_0\rangle$

$$U(t,t_0) = e^{-iH(t-t_0)/\hbar} \qquad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$t_0 = 0$

$$|\alpha, t\rangle = e^{-iHt/\hbar}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega t/2}|0\rangle + e^{-3i\omega t/2}|1\rangle\right)$$

BS K

— SR $\langle \alpha, t | x | \alpha, t \rangle = (\hbar / 2m\omega)^{1/2} \cos\omega t$

— HR $|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$

$$x(t) = x(0) \cos\omega t + \frac{p(0)}{m\omega} \sin\omega t$$

$$\langle \alpha | x | \alpha \rangle = (\hbar / 2m\omega)^{1/2} \cos\omega t$$

$\langle x(0) \rangle$ $\langle p(0) \rangle$ 2.13

c) $\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$

$$\langle \alpha t | x^2 | \alpha t \rangle = \hbar / m\omega$$

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \frac{\hbar}{m\omega} (1 - \cos^2 \omega t/2)$$

BS K

2.20.) $\psi_n(x)$ basit harmonik salınıcının özfonk.'ları olsun

parite : $\psi_n(-x) = (-1)^n \psi_n(x)$

özdeğerler tek pariteli olanlarıdır.

$E_n = (n+1/2)\hbar w \qquad n \to 2n+1$

$E_n = (2n+1+1/2)\hbar w = (2n+3/2)\hbar w \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

(a) $E_0 = 3\hbar w/2$

(b) $\langle x' | 1 \rangle = \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}x_0}\left(x' - x_0^2 \frac{d}{dx'}\right) \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{x_0}} e^{-x'^2/2x_0^2}$

$x_0 = \sqrt{\hbar/mw} \ni \psi_1 = \frac{2}{\sqrt{2}\, x_0^{3/2} \pi^{1/4}} x' e^{-x'^2/2x_0^2}$

$\langle x^2 \rangle = \frac{3}{2} x_0^2 = \frac{3\hbar}{2mw}$

BS K