BÖLÜM 4

KUANTUM MEKANİĞİNDE SİMETRİLER

4.1. Simetriler, Korunum Yasaları, Dejenerelikler

Klasik Fizikte Simetriler

$L \equiv L(q_i, \dot{q}_i)$ Lagrange formülasyonunda

$q_i \to q_i + \delta q_i$ yerdeğiştirmesi altında L değişmez ise

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{dp_i}{dt} = 0$$

buna karşılık gelen kanonik mom. korunur.
konjuge

Benzer şekilde,

$H \equiv H(q_i, p_i)$ Hamilton formülasyonunda, $\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$ ise

$$\frac{dp_i}{dt} = 0$$

Yani H q_i'ye açık olarak bağımlı değilse, bu H'nin $q_i \to q_i + \delta q_i$ altında simetriye sahip olduğunu söylemenin diğer bir yolu'dur.

BS K

Kuantum Mekaniğinde Simetriler

Q.M'de dönme ya da öteleme gibi bir operasyona, $\mathcal{C}$ gibi bir üniter operatör iliştirmeyi öğrendik.

simetri operatörü

$$\mathcal{C} = 1 - \frac{i\epsilon}{\hbar} G$$

sonsuz küçük operasyonlar için özdeşlik dönüşümünden bu kadar fark eder.

G : aranan simetri op. için Hermitsel jeneratörü.

H'nın $\mathcal{C}$ altında invaryant olduğunu varsayalım.

$$\mathcal{C}^\dagger H \mathcal{C} = H$$

bu,

$$\left(1+\frac{i\epsilon}{\hbar}G\right) H \left(1-\frac{i\epsilon}{\hbar}G\right) = H$$

$$\cancel{H} - \frac{i\epsilon}{\hbar} HG + \frac{i\epsilon}{\hbar} GH = \cancel{H}$$

$$[H, G] = 0$$

na eşdeğerdir.

Heisenberg Hareket Denk.'i: $\frac{dG}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[G,H] = 0$ yani G hareket sbt'i.

Örneğin, H ötelemeler altında invaryant ise, momentum bir hareket sabiti'dir. H dönmeler altında invaryant ise açısal mom. bir hareket sabiti'dir.

G'nin konumu ve $[G, H] = 0$ arasındaki bağıntıya G, H ile sıra değiştirildiği zaman G'nin bir özketi açısından bakmak ta yarar vardır. t_0 da sistemin G'nin bir özdurumunda olduğunu varsayalım. Daha sonraki bir zamandaki ket, zaman-evrim op.'ünü uygulayarak elde edilir,

$$|g', t_0; t\rangle = U(t, t_0)|g'\rangle$$

da G'nin g' özdeğerli bir özketi'dir. Diğer bir deyişle, bir kere ket bir G özketi ise bu her zaman aynı özdeğerli bir G özketi'dir. İspat,

$$G\,U(t,t_0)|g'\rangle = U(t,t_0)\,G|g'\rangle$$

$$= g'\left[U(t,t_0)|g'\rangle\right]$$

<u>Dejenerelikler</u>

$[H, \varphi] = 0$ olsun. $H|n\rangle = E_n|n\rangle$ olan

$$H(\varphi|n\rangle) = \varphi(H|n\rangle) = E_n(\varphi|n\rangle)$$

$\varphi|n\rangle$ de aynı enerjili bir enerji özketi'dir.

$|n\rangle$, $\mathcal{C}|n\rangle$

farklı durumlar , aynı enerji

$\Downarrow$

dejenere

$\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}(\lambda)$ $\qquad$ $\mathcal{C}(\lambda)|n\rangle$ aynı enerji

sürekli param.

Özel olarak rotasyonu ele alalım.

Rotasyon : $[\mathcal{D}(R), H] = 0$

$\Downarrow$

$[\vec{J}, H] = 0 \qquad [\vec{J}^2, H] = 0$

$[H; \vec{J}^2; J_z]$ → eşzamanlı özketler kullanılabilir.

$\underbrace{\mathcal{D}(R)|n; j, m\rangle}$ aynı enerjili

$2j+1$ bağımsız durumun lineer kombinasyonu

$$\mathcal{D}(R)|n;j;m\rangle = \sum_{m'} |n;j,m'\rangle \mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(R)$$

R sürekli parametresini değiştirerek farklı lineer kombinasyonları elde ederiz

— $2j+1$ katlı dejenere

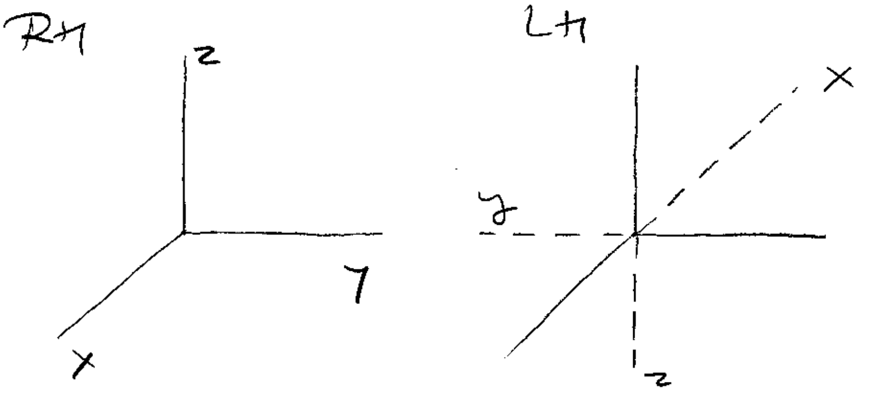
BS K

4.2. Kesikli simetriler, parite ve uzay terslenmesi

parite, öz öteleme ve zaman terslenmesi

1°) parite ≡ uzay terslenmesi, sistemi,

$RH \to LH$ 'a çevirir



Yeni

koordinat sist.'den ziyade durum ketleri ile ilgileniyoruz.

$|\alpha\rangle$ verilmiş olsun,

$$|\alpha\rangle \to \Pi|\alpha\rangle$$ uzay terslenmiş durum.

parite op.

$$\langle\alpha|\Pi^{\dagger}\vec{X}\Pi|\alpha\rangle = -\langle\alpha|\vec{X}|\alpha\rangle$$

olmasını isteriz.

$$\boxed{\Pi^{\dagger}\vec{X}\Pi = -\vec{X}}$$

$$\vec{X}\Pi = -\Pi\vec{X} \Rightarrow \{\vec{X},\Pi\} = 0$$

konum op.'nün özketi parite altında nasıl değişir?

$$\Pi|\vec{x}'\rangle = e^{i\delta}|-\vec{x}'\rangle \qquad \delta \text{ reel}$$

$$\vec{X}\,\Pi|\vec{x}'\rangle = -\Pi\vec{X}|\vec{x}'\rangle = (-\vec{x}')\,\Pi|\vec{x}'\rangle$$

⇒ $\Pi|\vec{x}'\rangle$: $\vec{X}$'in $-\vec{x}'$ özdeğerli özdurumu.

○ $e^{i\delta}=1$ alınabilir.

$$\Rightarrow \Pi^2|\vec{x}'\rangle = |\vec{x}'\rangle \Rightarrow \Pi^2 = 1$$

'den

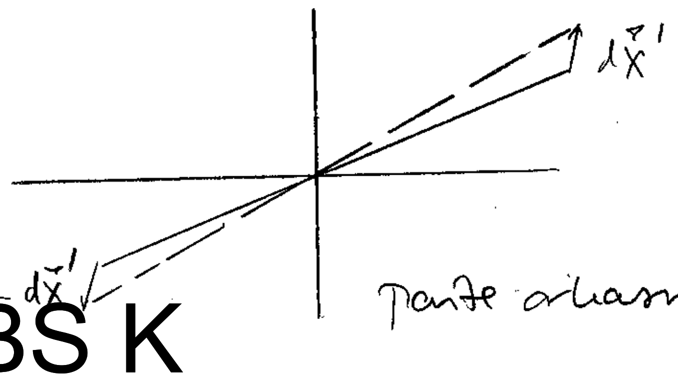
Π sadece üniter değil aynı zamanda Hermitsel,

$$\Pi^{-1} = \Pi^{\dagger} = \Pi$$

○ özdeğeri ∓ 1 olabilir.

Momentum operatörü?

$\vec{p} = m\dfrac{d\vec{x}}{dt}$ parite altında $\vec{X}$ gibi tek.



Parite alınmasından öteleme yada tersi eşdeğer

BS K

O zaman

$$\pi \, T(d\vec{x}\,') = T(-d\vec{x}\,')\, \pi$$

$$\pi \left(1 - \frac{i\vec{p}\cdot d\vec{x}\,'}{\hbar}\right) \pi^{\dagger} = 1 + \frac{i\vec{p}\cdot d\vec{x}\,'}{\hbar}$$

$$\{\pi, \vec{p}\} = 0 \qquad \boxed{\pi^{\dagger} \vec{p}\, \pi = -\vec{p}}$$

— $[\pi, \vec{L}] = 0$ çünkü $\vec{L} = \underbrace{\vec{x} \times \vec{p}}_{\text{tek parite'liler}}$

$$R^{(\text{parite})} R^{(\text{dönme})} = R^{(\text{dönme})} R^{(\text{parite})}$$

$$R^{(\text{parite})} = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$$

yani,

$$[\text{parite}, \text{dönme}] = 0$$

$$\pi D(R) = D(R) \pi$$

$$D(R) = 1 - i\vec{J}\cdot\hat{n}\, \epsilon/\hbar \qquad \boxed{\pi^{\dagger} \vec{J}\, \pi = \vec{J}}$$

$$[\pi, \vec{J}] = 0$$

polar vektör

aksiyel ya da sanki vektör

rank 1 olan

— $\vec{X}$ ve $\vec{J}$ dönmeler altında her ikisi de vektör ya da lineer tensörler. Bununla birlikte, $\vec{X}$ ve $\vec{p}$ tek, $\vec{J}$ çift pariteye sahip.

$\vec{S}\cdot\vec{x}$ 'e bakalım.

$$\pi^{-1}\,\vec{S}\cdot\vec{x}\,\pi = -\vec{S}\cdot\vec{x} \leftarrow \text{sanki skaler}$$

$$\pi^{-1}\,\vec{L}\cdot\vec{S}\,\pi = \vec{L}\cdot\vec{S}$$

Parite altında Dalga Fonk.ları;

$$\psi(\vec{x}') = \langle \vec{x}' | \alpha \rangle$$

uzay terslenmiş durumun dalga fonk.'u, $\pi|\alpha\rangle$ durum keti ile temsil edilir:

$$\langle \vec{x}' | \pi | \alpha \rangle = \langle -\vec{x}' | \alpha \rangle = \psi(-\vec{x}')$$

$|\alpha\rangle$ paritenin bir özketi olsun.

$$\pi|\alpha\rangle = \pm 1\,|\alpha\rangle \quad \text{olmalı.}$$

$$\langle \vec{x}' | \pi | \alpha \rangle = \pm \langle \vec{x}' | \alpha \rangle$$

$$\Rightarrow \psi(-\vec{x}') = \pm\,\psi(\vec{x}') \begin{cases} \text{tek} \\ \text{çift.} \end{cases}$$

tüm dalga fonk.ları kesin paritelı.

BS K

$\vec{L}$'nin bir özketinin bir parite özketi olması beklenir, çünkü $[\vec{L},\pi]=0$. $\vec{L}^2$ ve L_z'nin (parite altında) özketinin nasıl davrandığını genel iki uzay terslenmesi altında dalga fonk.'unun özelliklerini inceleyelim.

$$\langle \vec{x}' | \alpha l m \rangle = R_\alpha(r)\, Y_l^m(\vartheta\, \varphi)$$

$$\underbrace{\vec{X}' \to -\vec{X}'}$$

$$r \to r$$

$$\vartheta \to \pi - \vartheta \qquad \cos\vartheta \to -\cos\vartheta$$

$$\varphi \to \varphi + \pi \qquad e^{im\varphi} \to (-1)^m e^{im\varphi}$$

$$Y_l^m = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, P_l^m(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi}$$

$$P_l^m = \ldots$$

$$Y_l^m \to (-1)^l\, Y_l^m$$

$$\pi\, |\alpha, lm\rangle = (-1)^l\, |\alpha, lm\rangle$$

BS K

Teorem:

$$[H, \Pi] = 0$$

ve $|n\rangle$ H'nin E_n özdeğerli dejenere olmayan bir özketi olsun.

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle$$

$|n\rangle$ aynı zamanda bir parite özketi'dir.

İspat:

$$\frac{1}{2}(\Pi^2 \pm \Pi)|n\rangle = \frac{1}{2}\underbrace{(1 \pm \Pi)|n\rangle}_{\pm 1 \text{ özdeğerli bir parite özketi}}$$ ye bakalım.

$$H\frac{1}{2}(1 \pm \Pi)|n\rangle = E_n|n\rangle$$

aynı durumu temsil etmelidir.

Örnek BHS alınır.
aynı ...

$|0\rangle$ çift pariteli $e^{-x^2/2\mu\omega}$ $\vec{x} \to -\vec{x}$ altında

$|1\rangle = a^{\dagger}|0\rangle$ $a^{\dagger} \sim (\vec{x}, \vec{p})$ lineer

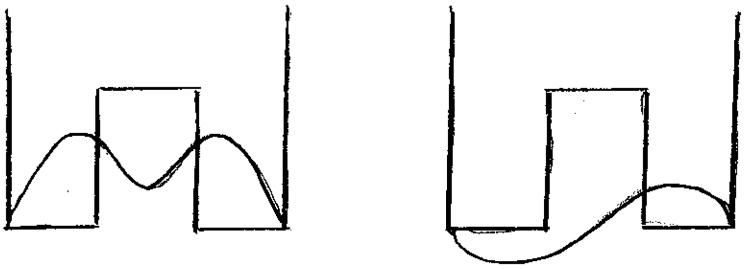
tek pariteli

genelde,
$|n\rangle \longrightarrow (-1)^n$ pariteli

dejenere bak H arıyorum.

BS K

Simetrik çift kuyu potansiyeli



simetrik $|S\rangle$ Anti-sim. $|A\rangle$

H parite invaryant.

$$E_A > E_S$$

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|S\rangle + |A\rangle\right) \quad |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|S\rangle - |A\rangle\right)$$

durağan olmayan durumlar enerji.

$t=0$ da sistem $|R\rangle$ ile temsil edilsin.

$$|R, t_0=0; t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iE_S t/\hbar}|S\rangle + e^{-iE_A t/\hbar}|A\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iE_S t/\hbar}\left(|S\rangle + e^{-i(E_A - E_S)t/\hbar}|A\rangle\right)$$

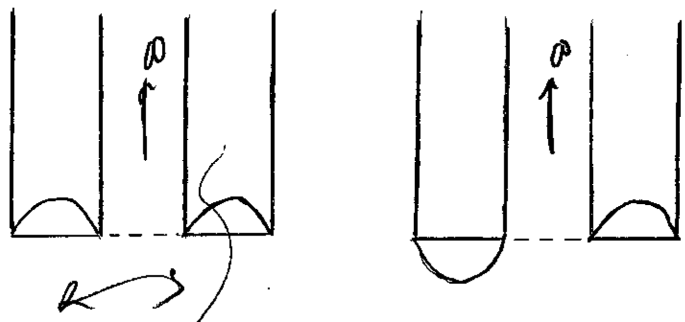
$t = \frac{T}{2} = \frac{2\pi\hbar}{2(E_A - E_S)}$ zamanda sistem saf $|L\rangle$ durumunda olur.

$t=T$ de $|R\rangle$ ye döner. v.s.

sistem $|R\rangle$ ve $|L\rangle$ arasında,

$$\omega = \frac{E_A - E_S}{\hbar}$$

ile salınır. (tünelleme)



başlangıç, t=0 anında

$T \to \infty$ $|R\rangle$ de kalır.

NH_3 amonyak örnek ver.

BS K

Parite - Seçim Kuralı

$|\alpha\rangle$ ve $|\beta\rangle$ parite özdurumları olsun

$$\pi|\alpha\rangle = \varepsilon_\alpha|\alpha\rangle$$

$$\pi|\beta\rangle = \varepsilon_\beta|\beta\rangle \qquad \varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta (\pm 1)$$

$\langle\beta|\vec{x}|\alpha\rangle = 0$; $\varepsilon_\alpha = -\varepsilon_\beta$ olmadıkça

$$\langle\beta|\vec{x}|\alpha\rangle = \langle\beta|\pi^{-1}\pi\, x\, \pi^{-1}\pi|\alpha\rangle = \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta(-\langle\beta|\vec{x}|\alpha\rangle)$$

ε_α ve ε_β zıt olmadıkça mümkün değil.

$$\int \psi_\beta^*(\vec{x})\, \vec{x}\, \psi_\alpha(\vec{x})\, d\tau = 0$$

ψ_α ve ψ_β aynı pariteye sahipse. Wigner.

- H parite altında invaryant ise, dejenere olmayan enerji özdurumları daimi elektrik dipol momente sahip olamazlar.

$$\langle n|\vec{x}|n\rangle = 0$$

- Genelleştirilirse: $\vec{p}$, $\vec{S}\cdot\vec{x}$ gibi tek pariteli operatörler sadece zıt pariteli durumlar arasında sıfırdan farklı matris elemanlarına sahiptirler.

BS K

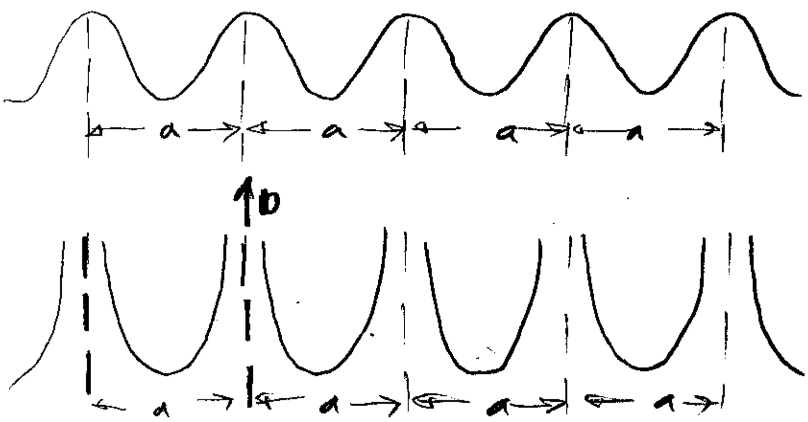
Parite korunmazlığı.

zayıf etkileşmeler. Bozunum proseslerinde, zıt parite durumların süperpozisyonları olan son durumlara sahip olabiliriz.

4.3. Kesikli bir simetri olarak

Örgü ötelemesi

$$V(x \pm a) = V(x)$$



$$\tau^{\dagger}(\ell)\, x\, \tau(\ell) = x + \ell \quad (1.6.)$$

$$\tau(\ell)|x'\rangle = |x' + \ell\rangle$$

ancak

$$\ell = a \Rightarrow \tau^{\dagger}(a)\, V(x)\, \tau(a) = V(x+a) = V(x)$$

$$\tau^{\dagger}_{(a)} H\, \tau_{(a)} = H \qquad \text{K.E. invaryant.}$$

$$[H, \tau(a)] = 0 \qquad \tau(a) : \text{üniter.}$$

ve eşzamanlı köşegenleştirilebilirler.

BS K

$\tau(a)$'nın özdeğer ve özdurumlarını belirlemeden önce, kuyular arasındaki pot.'in sonsuz olduğu durumda taban durum nedir sorusuna bakalım. Parçacık örgü sitelerinden birinde tamamen lokalize olmuştur, bu muhtemel taban durum adayı. n. site de lokalize olsun.

$|n\rangle$

$$H|n\rangle = E_0|n\rangle$$

dalga fonk.u $\langle x'|n\rangle$: sadece n. site de sonlu.

Bununla birlikte, benzer bir lokalize durum bir diğer sitede de aynı E_0 enerjisine sahip olabilir. Yani $-\infty$ — $+\infty$ a giden n sonsuz taban durum enerjisi vardır.

$|n\rangle$ örgü-öteleme op.'ünün bir özketi değildir, çünkü, buna uygulandığı zaman $|n+1\rangle$ verir.

$$\tau(a)|n\rangle = |n+1\rangle$$

$[\tau(a), H] = 0$ olmasına karşın $|n\rangle$ $\tau(a)$'nın bir özketi değildir,

çünkü sonsuz katlı dejenerasyon vardır.

Bu gibi bir dejenerasyon söz konusu olunca, H ve $\tau(a)$'nın eşzamanlı özketlerini bulmak lazım.

BS K

$|R\rangle$ ve $|L\rangle$ Ω'nın bir özketi idi.

bunların bir lineer kombinasyonunu kurabiliriz.

$$|\theta\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\theta} |n\rangle \qquad -\pi \leq \theta \leq \pi \quad \text{reel.}$$

H ve $T(a)$'nın eş zamanlı özketi $\quad H|\theta\rangle = E_0 |\theta\rangle$

$T(a)$'nın da bir özketi olduğunu ispatlayalım

$$T(a)|\theta\rangle = \sum e^{in\theta}|n+1\rangle = \sum e^{i(n-1)\theta}|n\rangle$$

$$= e^{-i\theta}|\theta\rangle$$

E_0 θ'dan bağımsız

Gerçek duruma 4.6 a'ya dönelim. QM sel tünelleme son bulsun.

$\langle x'|n\rangle$ dalga fonk.u n'den başka diğer sitelere de sızan bir kuyruğu var.

$\{|n\rangle\}$ bazında H'nın diagonal elemanlarının tümü eşittir.

$$\langle n|H|n\rangle = E_0 \quad n\text{'den bağımsız.}$$

QM sel tünellemede dolayı $\{|n\rangle\}$ bazında H tamamen diyagonal olmayabilir. Bariyerler sonsuz değil ama yüksek olsunlar.

$\langle n'|H|n\rangle \neq 0 \qquad n'=n \qquad n'=n\pm 1 \qquad$ ise,

sıkı bağ yaklaşımı

$$\langle n\pm 1|H|n\rangle = -\Delta$$

n'den bağımsız.

$n \neq n'$ olduğu zaman, $|n\rangle$ ve $|n'\rangle$ dik,

$$H|n\rangle = E_0|n\rangle - \Delta|n+1\rangle - \Delta|n-1\rangle$$

artık bir enerji özdurumu değil.

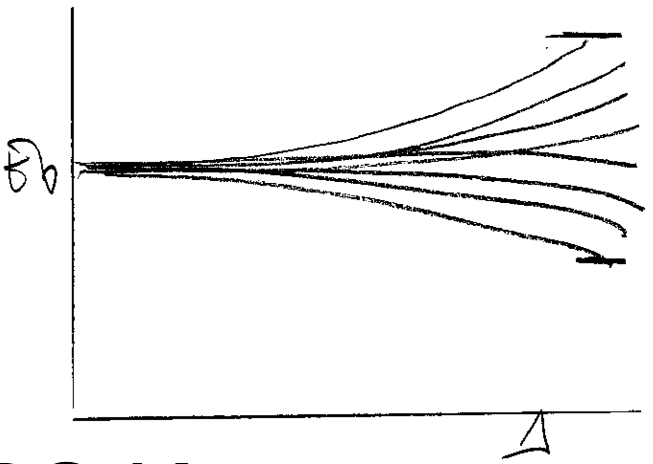
$$H|\theta\rangle = E_0\sum e^{in\theta}|n\rangle - \Delta\sum e^{in\theta}|n+1\rangle - \Delta\sum e^{in\theta}|n-1\rangle$$

$$= E_0\sum e^{in\theta}|n\rangle - \Delta\sum\left(e^{in\theta-i\theta}+e^{in\theta+i\theta}\right)|n\rangle$$

$$= (E_0 - 2\Delta\cos\theta)\sum e^{in\theta}|n\rangle$$

Δ ile dejenerasyon kaldırılmış.

enerji özdeğeri $E_0-2\Delta$ ile $E_0+2\Delta$ arasında sürekli bir değişim gösterir.



θ'nın fiziksel anlamı için $\langle x'|\theta\rangle$'ya bakalım.

$$\langle x'|\tau(a)|\theta\rangle = \underbrace{\langle x'-a|\theta\rangle = e^{-i\theta}\langle x'|\theta\rangle}_{\text{sonuç,}}$$

$$\Rightarrow \langle x'|\theta\rangle = e^{ikx'}\, u_k(x') \text{ ile çözüm} \qquad \underline{\underline{\theta = ka}}$$

$$e^{ik(x'-a)}\, u_k(x'-a) = e^{ikx'}\, u_k(x')\, e^{-ika}$$

Bloch teoremi.

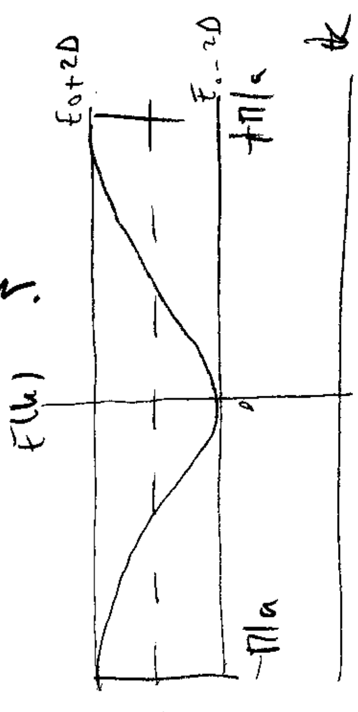
$$\theta : -\pi \;—\; +\pi \quad \Rightarrow \quad k : -\frac{\pi}{a} \;—\; +\frac{\pi}{a}$$

$$E(k) = E_0 - 2\Delta \cos ka$$

sıkı bağ yaklaşımı geçerli olduğu müddetçe potansiyelin şeklinden bağımsız.

$|k| = \pi/a$ kesilim dalga vektörü

tümlemenin bir sonucu olarak dejenere haller.

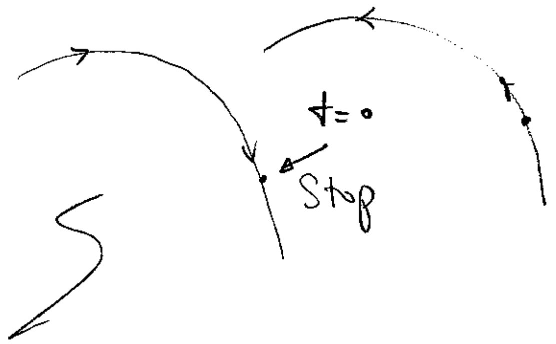


$$\left.\begin{array}{l} E_0 - 2\Delta \\ \\ E_0 + 2\Delta \end{array}\right] \text{ Brillouin zone.}$$

4.4 Zaman terslenme kesikli simetri

Hareketin terslenmesi (Wigner, 1932)

Klasik Mekanik :

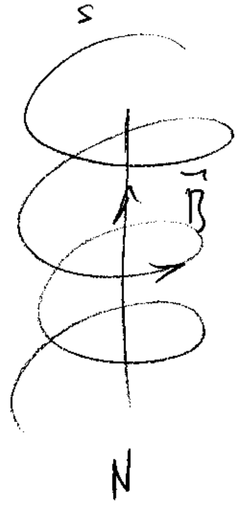


ters $\vec{p}\big|_{t=0} \longrightarrow -\vec{p}\big|_{t=0}$

Kuvvet alanında bir parçacık $\vec{x}(t)$

$$m\ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla} V(\vec{x})$$

e bir çözüm ise $\vec{x}(-t)$ de aynı kuvvet alanı için (V'den türetilebilir) bir çözüm'dür.



$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\vec{j}}{c}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{F} = e\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}\times\vec{B}}{c}\right)$$ — invaryant $t \to -t$

$\vec{E} \to \vec{E}$

$\vec{B} \to -\vec{B}$

$\rho \to \rho$

$\vec{j} \to -\vec{j}$ $\quad \vec{v} \to -\vec{v}$

BS K

Dalga mekaniği

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla} + V\right)\psi$$

$\psi = \psi(\vec{x}, t)$ çözüm olsun.

$\psi(\vec{x}, -t)$ çözüm değil. Ama $\psi^*(\vec{x}, -t)$ çözüm.

$\psi(x, t) = u_n(\vec{x})\, e^{-iE_n t/\hbar}$

$\psi^*(x, -t) = u_n^*(\vec{x})\, e^{-iE_n t/\hbar}$

zaman terslenmesi konjuge alma işlemi ile ilgili.

$t = 0$ da $\quad \psi = \langle \vec{x} | \alpha \rangle$

$\langle \vec{x} | \alpha \rangle$ zaman terslenmiş duruma karşı gelen DF

Prob. 8

Simetri operasyonları üzerine

$$|\alpha\rangle \to |\tilde{\alpha}\rangle \qquad |\beta\rangle \to |\tilde{\beta}\rangle$$

$\langle\beta|\alpha\rangle$ iç çarpımı korunur. (dönme, öteleme, parite)

$$\langle\tilde{\beta}|\tilde{\alpha}\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle$$

$$\langle\beta|\alpha\rangle \to \langle\beta|U^{\dagger}U|\alpha\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle$$

Zaman terslenmesini çalışırken bunun kısıtlayıcı olduğunu göreceğiz. Bunun yerine daha zayıf gereklilik olan

$$|\langle\tilde{\beta}|\tilde{\alpha}\rangle| = |\langle\beta|\alpha\rangle|$$

yı kullanacağız.

Tanım: Dönüşüm $|\alpha\rangle \to |\tilde{\alpha}\rangle = \theta|\alpha\rangle$

$|\beta\rangle \to |\tilde{\beta}\rangle = \theta|\beta\rangle$

antiüniter'dir eğer, $\langle\tilde{\beta}|\tilde{\alpha}\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^{*}$

$$\theta\left(c_1|\alpha\rangle + c_2|\beta\rangle\right) = c_1^{*}\theta|\alpha\rangle + c_2^{*}\theta|\beta\rangle$$

antilineerliği de tanımlar.

antiüniter op. $\theta = UK$ olsun.

üniter — kompleks konjuge operatör

$$K c|\alpha\rangle = c^* K|\alpha\rangle$$

$|\alpha\rangle$ baz ketleri cinsinden açılırsa ne olur?

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle \xrightarrow{K} |\tilde{\alpha}\rangle = \sum_{a'} \langle a'|\alpha\rangle^* K|a'\rangle$$

$$= \sum_{a'} \langle a'|\alpha\rangle^* |a'\rangle$$

K hiçbir şeyi baz ketini değiştirmedi.

$\Theta = UK$ 'e dönelim!

$$\Theta\left(c_1|\alpha\rangle + c_2|\beta\rangle\right) = UK\left(c_1|\alpha\rangle + c_2|\beta\rangle\right)$$

$$= c_1^* UK|\alpha\rangle + c_2^* UK|\beta\rangle$$

$$= c_1^* \Theta|\alpha\rangle + c_2^* \Theta|\beta\rangle \quad \text{4.4.13 sağlanır.}$$

$$|\alpha\rangle \xrightarrow{\Theta} |\tilde{\alpha}\rangle = \sum_{a'} \langle a'|\alpha\rangle^* UK|a'\rangle$$

$$= \sum_{a'} \langle a'|\alpha\rangle^* U|a'\rangle$$

$$= \sum_{a'} \langle \alpha|a'\rangle U|a'\rangle$$

$$|\tilde{\beta}\rangle = \sum_{a'} \langle \beta|a'\rangle U|a'\rangle \overset{DC}{\longleftrightarrow} \langle\tilde{\beta}| = \sum_{a'} \langle a'|\beta\rangle\langle a'|U^\dagger$$

BS K $\langle\tilde{\beta}|\tilde{\alpha}\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^*$ ✓ check.

Zaman terslenme Operatörü

$$|\alpha\rangle \to \underbrace{\Theta|\alpha\rangle}_{\text{Zaman terslenmiş durum.}}$$

Hareket terslenmiş durum.

$$|\alpha\rangle \to |\vec{p}\,'\rangle \overset{\text{mom. özelliği}}{\Rightarrow} \Theta|\alpha\rangle \to |-\vec{p}\,'\rangle$$

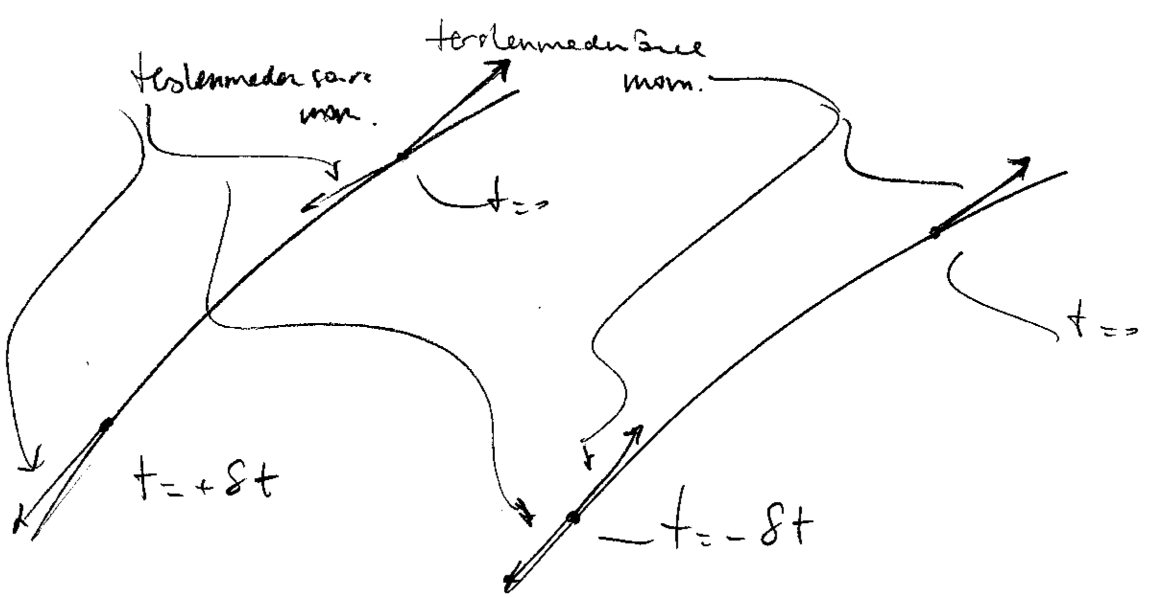
$t = 0$ $|\alpha\rangle$ ile temsil edilen fiz. sis. sist. $\to$ $t = \delta t$ zaman sonra sistem

$$|\alpha, t_0=0; t=\delta t\rangle = \left(1 - \frac{iH}{\hbar}\delta t\right)|\alpha\rangle$$

Bunun yerine, $t=0$ da önce Θ'yı uygulayalım. zaman evrimini karakterize eder.

$$\left(1 - \frac{iH}{\hbar}\delta t\right)\Theta|\alpha\rangle$$ eğer hareket zaman terslenmesi altında simetrik ise,

$$\Theta|\alpha, t_0=0; t=-\delta t\rangle$$ ile aynı olmalıdır.



BS K

Matematiksel olarak,

$$\left(1-\frac{iH}{\hbar}\delta t\right)\Theta|\alpha\rangle = \Theta\left(1-\frac{iH}{\hbar}(-\delta t)\right)|\alpha\rangle$$

$$-iH\,\Theta|\,\rangle = \Theta\, iH|\,\rangle \quad \forall|\,\rangle$$

üniter olamaz. Hadi, Olduğunu varsayalım, i'leri atabilirdik

$$-H\,\Theta = \Theta H$$

$$\Rightarrow H\Theta|n\rangle = -\Theta H|n\rangle = (-E_n)\,\Theta|n\rangle$$

$\Theta|n\rangle$ H'nin $-E_n$ özdeğerli bir özketi olurdu.

Θ anti üniter $\Rightarrow$ $\Theta iH|\,\rangle = -i\,\Theta H|\,\rangle$

$$\Theta H = H\Theta$$

$\langle\beta|\Theta|\alpha\rangle$-dan $\left(\langle\beta|\right)\cdot\left(\Theta|\alpha\rangle\right)$ anlaşılmalı.

$\left(\langle\beta|\Theta\right)\cdot|\alpha\rangle$ değil.

Zaman terslenmesi altında operatörler.

$$|\tilde{\alpha}\rangle = u|\alpha\rangle \qquad |\tilde{\beta}\rangle = u|\beta\rangle.$$

$$\langle\beta|X|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\underbrace{u X^{\dagger} u^{-1}}_{\text{lineer op.}}|\tilde{\beta}\rangle$$

ispat:

$|\gamma\rangle = X^{\dagger}|\beta\rangle$ tanımla.

$$|\gamma\rangle \overset{DC}{\longleftrightarrow} \langle\beta|X = \langle\gamma|$$

$$\langle\beta|X|\alpha\rangle = \langle\gamma|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\tilde{\gamma}\rangle$$

$$= \langle\tilde{\alpha}|u X^{\dagger}|\beta\rangle = \langle\tilde{\alpha}|u X^{\dagger}u^{-1}H|\beta\rangle$$

$$= \langle\tilde{\alpha}|u X^{\dagger}u^{-1}|\tilde{\beta}\rangle \checkmark$$

$A = A^{\dagger}$ için

$$\langle\beta|A|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\underline{\underline{uAu^{-1}}}|\tilde{\beta}\rangle$$

$$uAu^{-1} = \pm A$$

BS K

$$\langle \beta | A | \alpha \rangle = \pm \langle \tilde{\beta} | A | \tilde{\alpha} \rangle^{*}$$

$$|\beta\rangle = |\alpha\rangle \Rightarrow \quad \langle \alpha | A | \alpha \rangle = \pm \langle \tilde{\alpha} | A | \tilde{\alpha} \rangle$$

$\vec{p}$ ye bakalım.

$$\langle \alpha | \vec{p} | \alpha \rangle = - \langle \tilde{\alpha} | \vec{p} | \tilde{\alpha} \rangle$$

- $\Theta \vec{p}\, \Theta^{-1} = -\vec{p}$

$$\vec{p}\, \Theta |\vec{p}\,'\rangle = - \Theta \vec{p}\, \Theta^{-1} \Theta |\vec{p}\,'\rangle$$

$$= (-\vec{p}\,')\, \Theta |\vec{p}\,'\rangle \longrightarrow -\vec{p}\,' \text{ özdeğerli bir özket.}$$

- $\Theta \vec{x}\, \Theta^{-1} = \vec{x}$

$$\Rightarrow \Theta |\vec{x}\,'\rangle = |\vec{x}\,'\rangle \qquad \langle \alpha | \vec{x} | \alpha \rangle = \langle \tilde{\alpha} | \vec{x} | \tilde{\alpha} \rangle \text{dan.}$$

$$\Theta \vec{J}\, \Theta^{-1} = -\vec{J}$$

(4.1.)

$$E^{(i)} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\sum_{j=1}^{3} n_{ij}^2 \qquad n_{ij} = 1, 2, 3, \ldots$$

$$E = \sum_{i=1}^{3} E^{(i)} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\sum_{i}\sum_{j} n_{ij}^2$$ 9 terim.

en düşük üç enerji düzeyi ve dejenerelikleri:

$n_{ij} = 1$ yani $E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(\underbrace{1^2 + \cdots + 1^2}_{9}) = \frac{9\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$

$n_{11} = 2, n_{ij} = 1$; $E_2 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(2^2 + \underbrace{1^2 + \cdots + 1^2}_{8}) = \frac{12\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$

$n_{11} = 2, n_{22} = 2, n_{ij} = 1$; $E_3 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(2^2 + 2^2 + \underbrace{1^2 + \cdots + 1^2}_{7}) = \frac{15\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$

$E_1 \to$ 1 adet $\psi_{\substack{111\\111\\111}}$

$E_2 \to$ 1 adet $\psi_{\substack{211\\111\\111}}$, 1 adet $\psi_{\substack{121\\111\\111}}$, ..., $\psi_{\substack{111\\111\\112}}$ (toplam 9 adet) $\quad \frac{9!}{(9-1)!\,1!} = 9$

$E_3 \to$ 1 adet $\psi_{\substack{221\\111\\111}}$, 1 adet $\psi_{\substack{212\\111\\111}}$, ..., $\quad \frac{9!}{(9-2)!\,2!} = 36$ toplam adet

$2^3 = 8$ adet spin dalga fonk. var $\Rightarrow$ $E_1 \to 8$ katlı
$E_2 \to 9\times 8$ 〃 $= 72$
$E_3 \to 36\times 8$ 〃 $= 288$

4.4.)

$$Y_{\ell}^{j=\ell\pm 1/2, m} = \frac{1}{\sqrt{2\ell+1}} \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\ell \pm m + 1/2}\; Y_{\ell}^{m-\frac{1}{2}}(\theta,\varphi) \\ \sqrt{\ell \mp m + 1/2}\; Y_{\ell}^{m+1/2}(\theta,\varphi) \end{pmatrix}$$

(a) $\ell = 0 \quad j = 1/2$

$$Y_{\ell=0}^{1/2\; 1/2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) $$\vec{\sigma}\cdot\vec{x}\,\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{r}{\sqrt{4\pi}}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

$$= -r \begin{pmatrix} -Y_1^0(\theta,\varphi)/\sqrt{3} \\ \sqrt{2/3}\; Y_1^1(\theta,\varphi) \end{pmatrix}$$

4.7.) (a) $\Psi(\vec{x},t)$ 3B 'da düzlem dalgaya karşı gelen spinor bir parçacığın DF.

$\Psi^*(\vec{x},-t)$

$$\Psi(\vec{x},t) = e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar - wt)}$$

$$\Psi^*(\vec{x},-t) = e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar + wt)} = e^{i[(-\vec{p})\cdot\vec{x}/\hbar - wt]}$$

mom. doğrultusu terslenmiş düzlem dalga.

(b) $\vec{\sigma}\cdot\hat{n} \left\{ \cancel{\chi}(\hat{n}) \right.$

BS K

4.11.) $V(\vec{x})$ asimetrik (hiç bir enerji düzeyi dejenere değil)

$\vec{p} \to -\vec{p}\,,\ \vec{r} \to \vec{r}$) zaman terslenmesi altında $\Rightarrow$ $[H, \Theta] = 0$

$$H\,\Theta|\alpha\rangle = \Theta H|\alpha\rangle = E\,\underbrace{\Theta|\alpha\rangle}$$

$\Theta|\alpha\rangle$, H'nin $|\alpha\rangle$ gibi E özdeğerli özketi!

non-dejenerelikten $\Theta|\alpha\rangle = |\tilde{\alpha}\rangle = e^{i\delta}|\alpha\rangle$ (δ reel.)

a) $$\langle\alpha|\vec{L}|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\Theta\,\vec{L}\,\Theta^{-1}|\tilde{\alpha}\rangle = -\langle\tilde{\alpha}|\vec{L}|\tilde{\alpha}\rangle$$

$$= -e^{-i\delta}\langle\alpha|\vec{L}|\alpha\rangle \Rightarrow \langle\vec{L}\rangle = \vec{0}$$

(b)
$$\psi_\alpha(\vec{r}) = \langle\vec{r}|\alpha\rangle = \sum_{l,m}\langle\vec{r}|lm\rangle\langle lm|\alpha\rangle$$

$$= \sum_{lm} F_{lm}(r)\,\langle\hat{n}|lm\rangle = \sum_{lm} F_{lm}(r)\,Y_l^m(\theta,\varphi)$$

$$\langle\vec{r}|\Theta|\alpha\rangle = e^{i\delta}\langle\vec{r}|\alpha\rangle \Rightarrow \psi_\alpha(\vec{r}) = e^{-i\delta}\langle\vec{r}|\tilde{\alpha}\rangle$$

$$= e^{-i\delta}\psi_\alpha^*(\vec{r}) = e^{-i\delta}\sum_{lm} F_{lm}^*(r)\,Y_l^{m*}(\theta,\varphi)$$

$$= e^{-i\delta}\sum_{lm} F_{lm}^*(r)\,(-1)^m\,Y_l^{-m}(\theta,\varphi)$$

$$= e^{-i\delta}\sum_{lm} F_{l,-m}^*(r)\,(-1)^{-m}\,Y_l^{m}(\theta,\varphi)$$

$$\Downarrow$$

$$F_{lm}(r) = (-1)^m e^{-i\delta} F_{l,-m}^*(r)$$