BÖLÜM 6

ÖZDEŞ PARÇACIKLAR

parçacık 1 $\rightarrow |k'\rangle$ — SDGTK için tam küme kollektif indis

" 2 $\rightarrow |k''\rangle$

$|k'\rangle|k''\rangle$ 2 parçacığın durum keti

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ 1. & 2. \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$

parçacığı gösterir.

$|k''\rangle|k'\rangle$ de yazabiliriz.

$k' \neq k''$ için bu ikisi matematiksel olarak farklı değiller. Gerçekte ortogonaller.

Bu iki parçacık sistemi üzerinde bir ölçüm yaptığımızı düşünelim. Biri için k' diğeri için k'' elde edilmiş olsun. Bununla birlikte $|k'\rangle|k''\rangle$ mü $|k''\rangle|k'\rangle$ mü durum keti ya da değil bunu bilmiyoruz. Tüm ketler, ölçüm yapıldığında özdeğerleri özdeş bir kümeye yol açan

$$c_1|k'\rangle|k''\rangle + c_2|k''\rangle|k'\rangle$$

biçimli olurlar. Bu değiştokuş dejenereliği olarak bilinir. Tek parçacık durumunun aksine, Gözlenebilirlerin bir tam kümesinin özdeğerinin belirlenmesi durum ketini tamamen belirleyemediğinden değiştokuş dejenereliği böyle bir güçlük çıkartır.

Permütasyon simetrisi

$$P_{12}\,|k'\rangle|k''\rangle = |k''\rangle|k'\rangle$$

perm. op.lü

$$P_{12} = P_{21} \qquad P_{12}^{\,2} = 1$$

P_{12} : k' 'lü 1. parç. $\rightarrow$ k'' lü 1. parçacık

k'' " 2. " $\rightarrow$ k' " 2. " olur.

1 ile 2 değiştokuş edilir.

Örn. $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ de

$\uparrow \quad \uparrow$

1., 2. elekt.nun spini

Dejenerelik için özel bir durum gözönüne alalım.

$$A_1\,|a'\rangle|a''\rangle = a'\,|a'\rangle|a''\rangle$$

$$A_2\,|a'\rangle|a''\rangle = a''\,|a'\rangle|a''\rangle$$

1. ve 2. için gözlenebilirler.

$$P_{12}A_1P_{12}^{-1}P_{12}\,|a'\rangle|a''\rangle = a'\,P_{12}|a'\rangle|a''\rangle$$

$$= P_{12}A_1P_{12}^{-1}\,|a''\rangle|a'\rangle = a'\,|a''\rangle|a'\rangle$$

Bu durumda $P_{12}AP_{12}^{-1} = A_2$ ile uyumludur.

BSK

P_{12} gözlenebilirlerin parçacık etiketlerini değiştirmeli.

$$H = \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m} + V_{çift}\left(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|\right) + V_{ext}(\vec{x}_1) + V_{ext}(\vec{x}_2)$$

$$P_{12} H P_{12}^{-1} = H \qquad \text{çünkü} \qquad [H, P_{12}] = 0$$

hareket sbt.'i.

± 1 özdeğerleri. $(P_{12}^2 = 1)$

2 parçacık keti < sim. / anti-sim.

P_{12}'nin özketlerinde ısrar ediyorsak, iki özel kombinasyon,

$$|k'k''\rangle_+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|k'\rangle|k''\rangle + |k''\rangle|k'\rangle\right)$$

$$|k'k''\rangle_- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|k'\rangle|k''\rangle - |k''\rangle|k'\rangle\right)$$

$$S_{12} \equiv \frac{1}{2}\left(P_{12} + 1\right) \qquad A_{12} \equiv \frac{1}{2}\left(1 - P_{12}\right)$$

simetrikleştirici   antisimetrikleştirici

BS K

S_{12} (A_{12}) → $|k'\rangle|k''\rangle$'nin keyfi bir lineer kombinasyonuna uygulanırsa ortaya çıkan şey sim. (antisim.) olacaktır.

$$\begin{Bmatrix} S_{12} \\ A_{12} \end{Bmatrix} \left[c_1|k'\rangle|k''\rangle + c_2|k''\rangle|k'\rangle \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(c_1|k'\rangle|k''\rangle + c_2|k'\rangle|k''\rangle \right)$$

$$\pm \frac{1}{2}\left(c_1|k''\rangle|k'\rangle + c_2|k'\rangle|k'\rangle \right)$$

$$= \frac{c_1 \pm c_2}{2}\left(|k'\rangle|k''\rangle \pm |k''\rangle|k'\rangle \right)$$

Çok parçacık durumuna genelleyebiliriz.

$$P_{ij}\,|k'\rangle|k''\rangle\ldots|k^i\rangle|k^{i+1}\rangle\ldots|k^j\rangle\ldots$$

$$= |k'\rangle|k''\rangle\ldots|k^j\rangle|k^{i+1}\rangle\ldots|k^i\rangle\ldots$$

$$P_{ij}^2 = 1$$

özdeğerleri ± 1

$$[P_{ij}, P_{kl}] \neq 0$$

Üç özdeş parçacık sistemi

$$3! = 6 \qquad |k'\rangle|k''\rangle|k'''\rangle$$

birimli ket mümkün. 6 katlı değiş tokuş dejenereliği var. Tamamen sim. ya da tamamen anti-sim. olmasında ısrar edersek;

$$|k'\,k''\,k'''\rangle_{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{6}}\Big\{ |k'\rangle|k''\rangle|k'''\rangle \pm |k''\rangle|k'\rangle|k''\rangle$$

$$+ |k''\rangle|k'''\rangle|k'\rangle \pm |k'''\rangle|k''\rangle|k'\rangle \qquad k' \neq k'' \neq k'''$$

$$+ |k'''\rangle|k'\rangle|k''\rangle \pm |k'\rangle|k'''\rangle|k''\rangle \Big\}$$

bunlar P_{12}, P_{13}, P_{23} ün eşzamanlı özketleri

6 bağımsız durum keti var. Tamamen sim. ya da tamamen anti-sim. 4 adet bağımsız ket var. P_{123} e bakalım.

$$P_{123}\big(|k'\rangle|k''\rangle|k'''\rangle\big) = |k''\rangle|k'''\rangle|k'\rangle$$

$$P_{123} = P_{12}P_{13}$$

$$P_{12}P_{13}\big(|k'\rangle|k''\rangle|k'''\rangle\big) =$$

BS K

$k' \neq k'' \neq k'''$ değil de ikisi çakışacak olursa,

tamamen antisim. durum olamaz. Sim. olan,

$$|k' k' k''\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(|k'\rangle|k'\rangle|k''\rangle + |k'\rangle|k''\rangle|k'\rangle + |k''\rangle|k'\rangle|k'\rangle\Big)$$

$\sqrt{\dfrac{2!}{3!}}$ olarak anlaşılmalı.

$$\sqrt{\frac{N_1!\,N_2!\cdots N_n!}{N!}}$$

N_i : $|k^{(i)}\rangle$ ket seçilme sayısı.

6.2. Simetrizasyon Postülası.

Doğanın tamamen sim. ya da anti-sim. durumları tercih edip etmediğini tartışmadık. N özdeş parçacık içeren sistemler ya tamamen sim. ya da anti-sim.'dir. (parçacık çiftlerinin değiş tokuşu altında)

Bose-Einstein (BE) Fermi-Dirac (FD)

$P_{ij}\,|N \text{ özdeş Bozon}\rangle = +\,|N \text{ özdeş bozon}\rangle$

$P_{ij}\,|N \text{ " fermiyon}\rangle = -\,|N \text{ " fermiyon}\rangle$

Yarım-tamsayılı spin parç. — Fermiyonlar
tam sayılı " " — Bozonlar.

^3He → fermiyon e^- ya da proton gibi

^4He → bozon $\pi^{\pm}$, π^0 mezonlar gibi

2 fermiyonlu bir sistem için

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|k'\rangle|k''\rangle - |k''\rangle|k'\rangle\right)$$ başka seçenek yok.

Pauli Dışarlama İlkesi

bozonlar için

$$|k'\rangle|k'\rangle, \quad |k''\rangle|k''\rangle \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|k'\rangle|k''\rangle + |k''\rangle|k'\rangle\right)$$

üç seçenek var.

Maxwell-Boltzmann ist. dağ. kısıtlama yok!

$$|k'\rangle|k''\rangle, \quad |k''\rangle|k'\rangle, \quad |k'\rangle|k'\rangle \quad |k''\rangle|k''\rangle$$

düşük sıcaklıklarda dramatik farklılık var.

6.3. İki elektron sistemi

$P_{12} \to -1$ özdeğeri.

$\vec{x}_1, \vec{x}_2, m_{s_1}, m_{s_2}$ temel ketler.

$$\psi = \sum_{m_{s_1}} \sum_{m_{s_2}} C(m_{s_1}, m_{s_2}) \langle \vec{x}_1, m_{s_1}; \vec{x}_2, m_{s_2} | \alpha \rangle$$

$[\vec{S}^2_{tot}, H] = 0 \Rightarrow$ enerji özfonk.unun $\vec{S}^2_{tot}$ nin bir özfonk.u olması beklenir.

$$\psi = \phi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\chi$$

$$\chi(m_{s_1}, m_{s_2}) = \begin{cases} \chi_{++} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_{+-} + \chi_{-+}) \\ \chi_{--} \end{cases} \text{triplet (sim.)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_{+-} - \chi_{-+}) \; \} \text{ singlet (antisim.)}$$

$$\chi_{+} \to \chi \left(m_{s_1} = \frac{1}{2} \quad m_{s_2} = -\frac{1}{2}\right)$$

$$\langle \vec{x}_1, m_{s_1}; \vec{x}_2, m_{s_2} | P_{12} | \alpha \rangle = \langle \vec{x}_2, m_{s_2}; \vec{x}_1, m_{s_1} | \alpha \rangle$$

FD istatistiği

$$\langle \vec{x}_1, m_{s_1}; \vec{x}_2, m_{s_2} | \alpha \rangle = - \langle \vec{x}_2, m_{s_2}; \vec{x}_1, m_{s_1} | \alpha \rangle$$

olmasını gerektirir.

○ $$P_{12} = P_{12}^{uzay} P_{12}^{spin}$$

$$P_{12}^{spin} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{\hbar^2} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2\right)$$

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \begin{cases} \hbar^2/4 & \text{triplet} \\ -3\hbar^2/4 & \text{singlet} \end{cases}$$

○ $$|\alpha\rangle \rightarrow P_{12} |\alpha\rangle$$

$$\phi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \rightarrow \phi(\vec{x}_2, \vec{x}_1)$$

$$\chi(m_{s_1}, m_{s_2}) \rightarrow \chi(m_{s_2}, m_{s_1})$$

uzaysal kısım sim (antisim) spin kısmı Antisim (sim.) olmalı.

BS K

$|\phi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)|^2 \, d^3\vec{x}_1 \, d^3\vec{x}_2$ = x_1 civarında merkezlenmiş d^3x_1 hacim elemanında 1 elektronun, $d^3\vec{x}_2$ hacminde 2 elektronun bulunma olasılığı,

Spin-bağımlılığı yok ise,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}_2^2 + V_{ext}(\vec{x}_1) + V_{ext}(\vec{x}_2) \right] \psi = E\psi$$

ayrılaşır.

$\omega_A(\vec{x}_1)\,\omega_B(\vec{x}_2) \times$ spin fonk.'u biçiminde çözümlerimiz var.

$$\phi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\omega_A(\vec{x}_1)\,\omega_B(\vec{x}_2) \pm \omega_A(\vec{x}_2)\,\omega_B(\vec{x}_1) \right)$$

spin singl.

spin triplet.

olasılık;

$$\frac{1}{2} \Big\{ |\omega_A(\vec{x}_1)|^2 |\omega_B(\vec{x}_2)|^2 + |\omega_A(\vec{x}_2)|^2 |\omega_B(\vec{x}_1)|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}\left[\omega_A(\vec{x}_1)\,\omega_B(\vec{x}_2)\,\omega_A^*(\vec{x}_2)\,\omega_B^*(\vec{x}_1) \right] \Big\} d^3x_1\, d^3x_2$$

değiş-tokuş yoğunluğu.

elektronlar spin-triplet durumunda olduklarında aynı noktada 2. elektronu bulunma olasılığı azdır. Elektronlar, spinleri triplet durumunda ise bir diğerinden sakınmaya meyillidirler. Tersine, singlet durumunda iseler, değiş-tokuş yoğunluğunun varlığından dolayı aynı noktada bulunmalarının olasılığı artar.