Bölüm-1

Klasik Fizikte Ne Öğrendik

Makroskopik evren: Madde ve Işık!

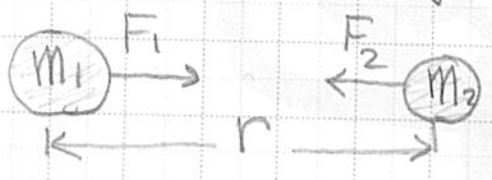
Madde: Kütle çekimi ve Hareket yasaları

$\boxed{\text{Isaac Newton (1643-1727)}}$

Newton Hareket Denklemleri:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Kütle çekimi yasası:



$$F_1 = F_2 = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

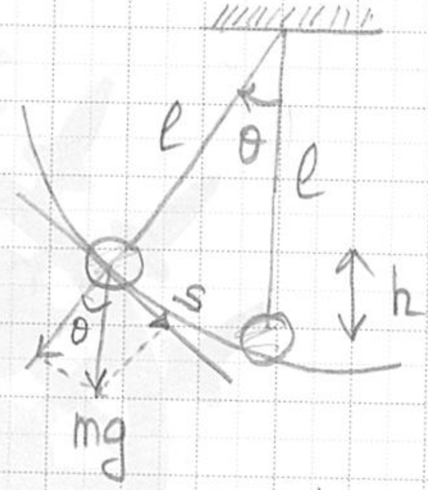
Newton kütle çekimi kuvvetini ve hareket denklemlerini kullanarak gezegenlerin yörüngelerini elde etti ve sonuçlarının Kepler yasaları ile uyumlu olduğunu gösterdi.

Kütle çekimi kuvveti kullanarak elde edilen tüm yörüngeler koni kesitlerini veriyordu.

Koni Kesitleri: Çember, elips, parabol hiperbol.

Örnek : Basit Sarkaç (serbest salınım)

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\theta$$



$$s = \ell\theta$$

$$\left.\begin{aligned}\sin\theta &\simeq 0 + \theta + \dots \\ \cos\theta &\simeq 1 - \frac{\theta^2}{2} + \dots\end{aligned}\right\}$$ Küçük Salınım

$$m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\,\theta$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{g}{\ell}\right)\theta}$$

$\omega^2 = \dfrac{g}{\ell}$ olsun Çözüm: $\theta(t) = \theta_0\sin(\omega t + \varphi)$

φ : $t=0$ anındaki başlangıç koşulundan belirlenir.

$t=0$ anında $\theta(t=0)=0$ olması istenirse $\varphi = 0$ olmalıdır.

θ_0 = En büyük açı değeri

EK: İki Boyutlu Kutupsal Koordinatlar

$\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\varphi \hat{\varphi}$

$\hat{r} = \hat{x} \cos\varphi + \hat{y} \sin\varphi$

$\hat{\varphi} = -\hat{x} \sin\varphi + \hat{y} \cos\varphi$

— o —

$\vec{r}$ orijinden başlayan konum vektörü ise

$\vec{r} = r\hat{r} \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\varphi}{dt}\hat{\varphi}}$$

Çizgisel Momentum:

$\vec{p} = m\vec{v}$ $(\hat{\theta}, \hat{r})$ iki boyutlu kutupsal koordinatlar

$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}$ $\frac{dr}{dt} = \frac{d\ell}{dt} = 0$ $r = \ell$

$\vec{v} = \ell\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} = \frac{ds}{dt}\hat{\theta}$

$\vec{p} = \left[m(\ell\theta_0)\,\omega\,\cos(\omega t + \varphi)\right]\hat{\theta}$ $\frac{d\vec{p}}{dt} \neq 0$

Çizgisel momentum sabit değil

Açısal Momentum

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \left[m\ell^2\omega\,\theta_0\cos(\omega t + \varphi)\right]\hat{z}$

$\frac{d\vec{L}}{dt} \neq 0$ sabit değil

Toplam Enerji:

$E = \frac{p^2}{2m} + mgh$ $h = \ell(1 - \cos\theta)$

$h = \ell\left(1 - \left[1 - \frac{\theta^2}{2}\right]\right)$

$h = \ell\,\theta^2/2$

$$E = \frac{[m \ell w \theta_0 \cos(wt+\varphi)]^2}{2m} + mg\ell \frac{\theta_0^2}{2} \sin^2(wt+\varphi)$$

$w^2 = \frac{g}{\ell}$ kullanılırsa

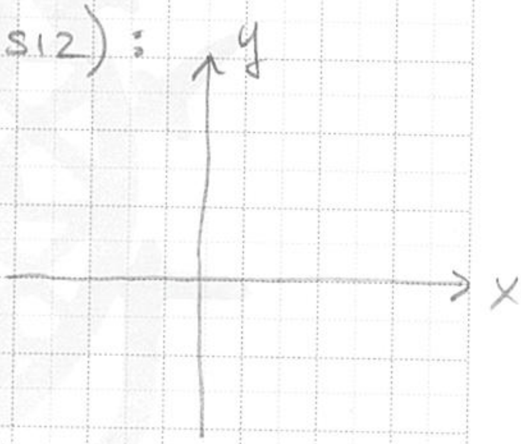
$$E = \left(mg\ell \theta_0^2 / 2\right) \left[\cos^2(\,''\,) + \sin^2(\,''\,)\right]$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2} mg\ell\theta_0^2 = \frac{1}{2} m w^2 s_0^2 = \text{sabit}}$$

$\frac{dE}{dt} = 0$ Toplam enerji korunuyor.

— o — o —

Yörünge (zamandan bağımsız):



$x = \ell \sin\theta$

$y = \ell \cos\theta$

$x^2 + y^2 = \ell^2 (\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

$x^2 + y^2 = \ell^2$ çember denklemi

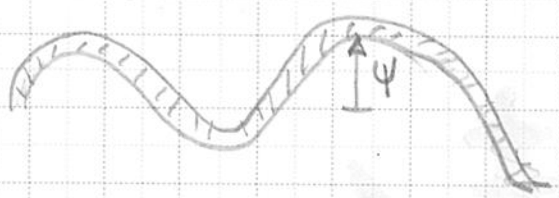
[$r = \ell = sb$ çember denklemi (2B kutupsal koor.)]

— o —

IŞIK : Klasik Fizikte girişim ve kırınım yapması nedeniyle EM dalga ile anlatılır.

Maxwell Denklemleri ile tasvir edilir.

Dalga Denklemi:



$$\frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial t^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Sabit fazlı ilerleyen dalga çözümü

$$\psi(z,t) = A_0 \cos(kz - wt + \delta) \quad (\hat{z} \text{ yönünde})$$

veya

$$\psi(z,t) = A\, e^{i(kz - wt + \delta)} \quad (\hat{z} \text{ yönünde})$$

$kz - wt + \delta$: Dalganın fazı $\qquad \delta$: faz sabiti

$$\psi(z,t) = A\, e^{i(kz + wt + \delta)} \quad (-\hat{z} \text{ yönünde})$$

$w = f(k)$ Dağınım bağıntısı

EM alan için dalga denklemi (Boşlukta) :

1 Boyut :

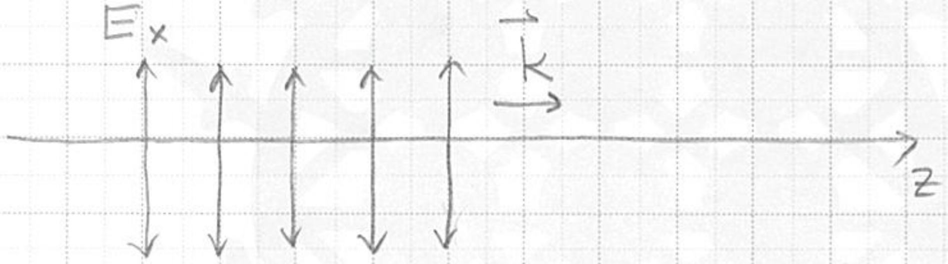
$$\boxed{\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 E_x(z,t)}{c^2 \partial t^2}}$$

Enine (düzlem) dalga çözümü:

$$\boxed{E_x(z,t) = E_0 \, e^{i(kz-\omega t+\delta)}}$$

$\omega = kc$ dağınım bağıntısı

Çözüm denklemde yerine konursa dağınım bağıntısı elde edilir.



Şiddet $I \propto E_x^2$

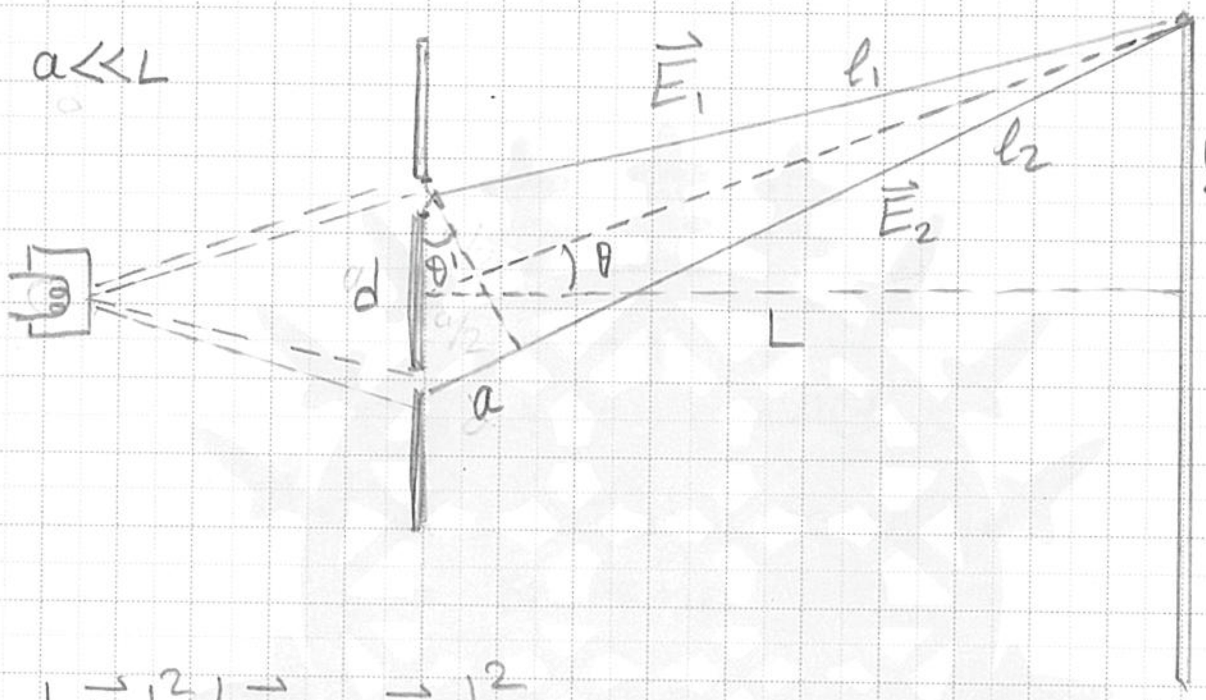
Enerji Yoğunluğu $u \propto E_x^2$ $\left(\frac{\text{Enerji}}{\text{hacım}}\right)$

Şiddet $\propto u$

YOUNG DENEYİ

Thomas Young (1773-1829)

Işığın dalga özelliğini girişim ile kanıtlay[an]
ilk deney.



$$|\vec{E}_T|^2 = |\vec{E}_1 + \vec{E}_2|^2$$ (Çizgisel özellik)

$I_1 = |\vec{E}_1|^2$ = şiddet

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\ \cos\delta$$

$E_1 = A\, e^{i(kx - wt + \delta_1)}$ $\qquad |E_1|^2 = |A|^2 = I_1$

$E_2 = A\, e^{i(kx - wt + \delta_2)}$ $\qquad |E_2|^2 = |A|^2 = I_2$

$$E_1^* E_2 + E_2^* E_1 = |A|^2 \left(e^{i(\delta_2 - \delta_1)} + e^{-i(\delta_2 - \delta_1)} \right)$$

$$= 2|A|^2 \cos\delta \qquad \delta = \delta_2 - \delta_1$$

$$= 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\delta \qquad \text{faz fark}$$

$$I = |E_1 + E_2|^2 = 2I_1(1 + \cos\delta) \qquad I_1 = I_2$$

— o —

δ faz farkının kaynağı iki dalganın yol farkı veya zaman farkıdır.

$\delta = k(\ell_2 - \ell_1)$ veya $\delta = \omega(t_2 - t_1)$ olarak yazılab

$\omega = kc$ dağınım bağıntısı nedeniyle bu iki ifade birbirine özdeştir.

$\ell_1 = ct_1 \qquad \ell_2 = ct_2$

Şekilden $\quad a = \ell_2 - \ell_1 = d \sin\theta' \simeq d \sin\theta$

$$\cos\delta = \cos(ka) \qquad ka \begin{cases} \rightarrow 2\pi n & \text{yapıcı girişim} \\ \rightarrow 2\pi\left(\frac{n+1}{2}\right) & \text{yıkıcı girişim} \end{cases}$$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$n = 0, 1, 2, 3$

$\frac{2\pi}{\lambda} a = 2\pi n$ ise $\boxed{a = n\lambda}$ olur veya $\boxed{a = \frac{(n+1)}{2}\lambda}$

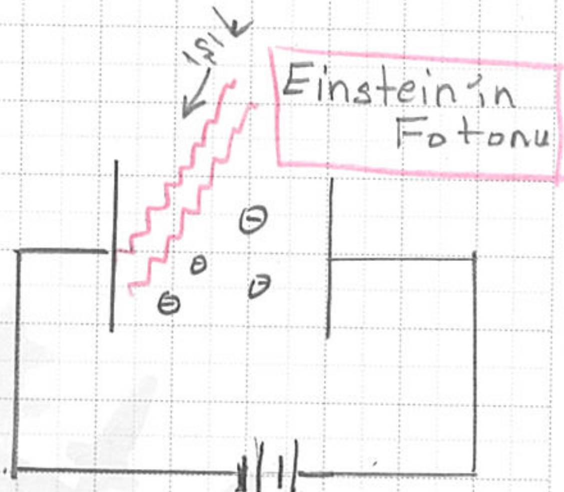
— o —

BÖLÜM-2

KLASİK FİZİK İLE AÇIKLANAMAYAN DENEYLER

IŞIK DENEYLERİ:

Fotoelektrik Etki



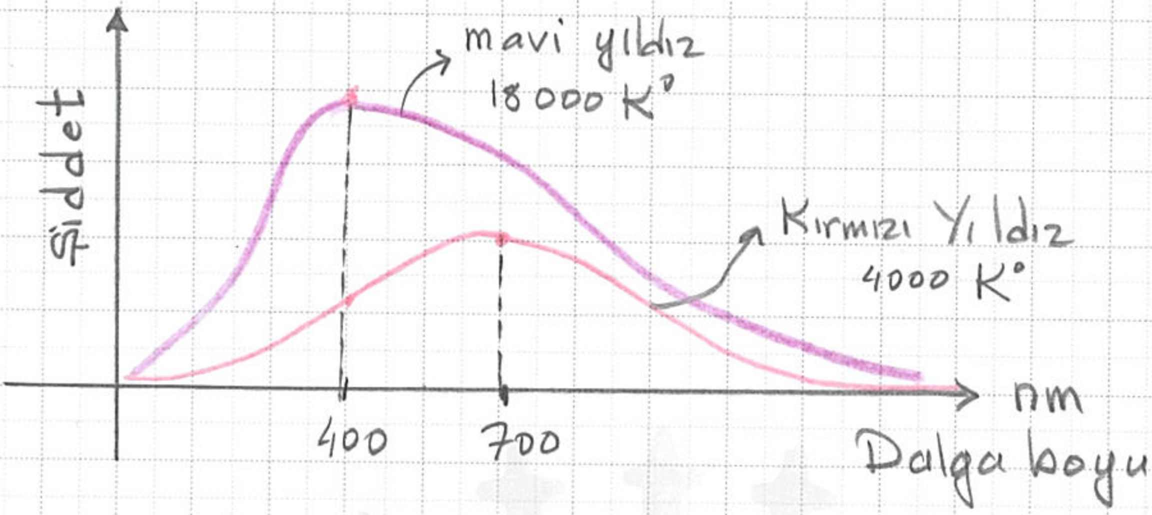
Albert Einstein
Nobel: 1921

Işık foton adı verilen parçacıklardan oluşmuştur.
Her fotonun energisi frekansla orantılıdır.

$$E_{foton} = h\nu \qquad E_{kinetik} = h\nu - W$$

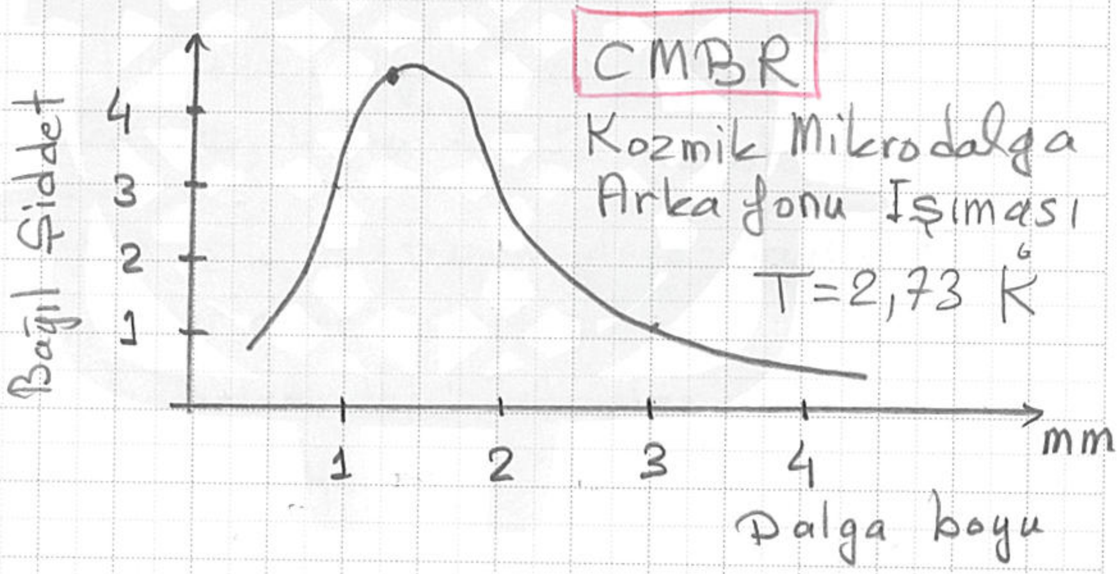
$$h = 6.626 \times 10^{-34}\ Js \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi} \simeq 1{,}05\ 10^{-34}\ Js$$

Sıcak Cisimlerden Yayılan Işıma



İnsan vücudu (300 K°) kırmızı ötesi (IR) ışıma yapa
Cisimler (600-700) K° görünür bölgede ışıma yapmaya başlar.

A. Penzias
R. Wilson
Nobel
1978



CMBR
Kozmik Mikrodalga Arka fonu Işıması
$T = 2{,}73\ K^{\circ}$

Bu gözlem sonuçlarını klasik EM dalga il.
açıklamak mümkün değildir.

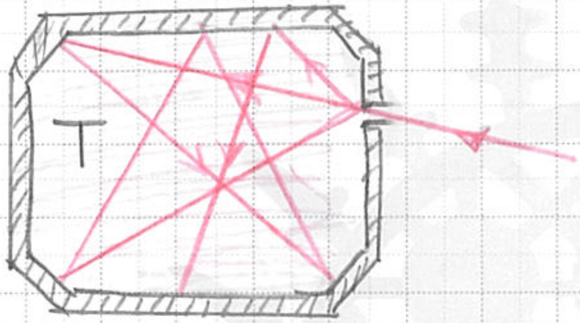
Max Planck
Nobel 1918

Planck Işıma Yasası

$$I(\lambda,T)=\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1\right)}$$

Planck Işıma Yasası Nasıl Elde Edilir?

Model: Siyah Cisim (Işıması)



1. Delikten kutuya (siyah cisim) giren ışık yansımaz (Dışarıya çıkamaz, kutu içinde ne olur?)
2. İçeri giren ışık kutunun duvarlarıyla etkileşir, kutunun duvarlarını ısıtır.
3. Kutunun duvarlarındaki atomlar sıcaklığı ile uyumlu titreşim yapar.
4. Bu atomlar titreşim frekansıyla uyumlu yeniden ışıma yapar.
5. Bu sıcaklık ışıması kutunun (siyah cismin) denge sıcaklığını belirler. Işıma sıcaklığa bağımlıdır.

Planck: Siyah cismin yüzeyi yüklü harmonik salınıcılardan oluşmuştur. Harmonik salınıcının enerjisi $\boxed{E_n = nh\nu \quad n=0,1,2}$

Klasik Fizik (istatistik Fizik): Harmonik salınıcının ortalama enerjisi $\boxed{E = k_B T}$

T mutlak sıcaklığına sahip bir ortamda ortalama enerji kanonik dağılım (Boltzman) üzerinden ortalama alınarak bulunur.

Kanonik Dağılım: $P_n = \dfrac{e^{-\beta E_n}}{\sum_n e^{-\beta E_n}}$ $\qquad \beta = \dfrac{1}{k_B T}$

Fotonun E_n enerjisine sahip olma olasılığı: P_n

$E_n = nh\nu$

Fotonun ortalama enerjisi: $\bar{E} = \sum_n P_n E_n$

$= -\dfrac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$ $\qquad Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$

$$Z = \left[1 + e^{-\beta h\nu} + e^{-2\beta h\nu} + \dots\right] = \left[1 + y + y^2 + y^3 + \dots\right]$$

$$= \frac{1}{(1-y)} = \frac{1}{\left(1 - e^{-\beta h\nu}\right)}$$

$$\bar{E} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln\left[\frac{1}{1-e^{-\beta h\nu}}\right]$$

$$= -\left\{\frac{\partial}{\partial \beta}\left[-\ln\left(1-e^{-\beta h\nu}\right)\right]\right\}$$

$$= -\left\{-\frac{1}{\left(1-e^{-\beta h\nu}\right)}\left(h\nu\, e^{-\beta h\nu}\right)\right\}$$

$$\boxed{\bar{E} = \left\{\frac{h\nu}{e^{\beta h\nu}-1}\right\}}$$

Siyah cisimden ışıyan fotonların ortalama enerjisi

Fotonların birim λ aralığındaki durum yoğunluğu $n(\lambda) = \frac{8\pi}{\lambda^4}$

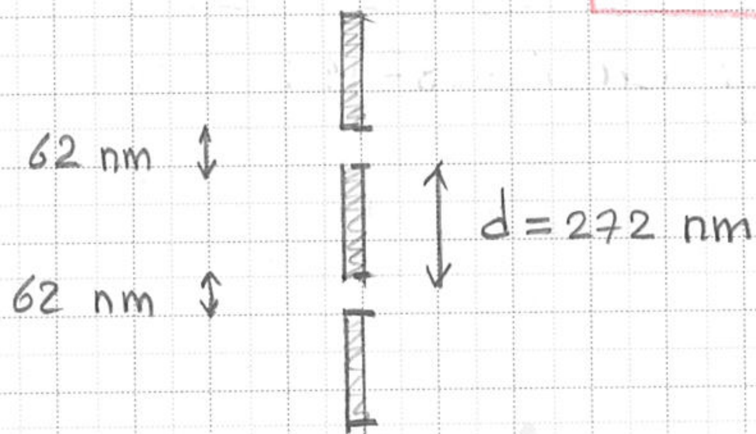
Enerji yoğunluğu $u(\lambda,T) = n(\lambda)\,\bar{E}$

$$u(\lambda,T) = \frac{8\pi h\nu}{\lambda^4}\frac{1}{\left(e^{\beta h\nu}-1\right)}$$

$$\boxed{u(\lambda,T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\left(e^{\beta h\nu}-1\right)}} \propto I(\lambda,T) = \text{Şiddet}$$

IOP

EK: New Journal of Physics: (13-March 2013)
Volume 15 - (2013)



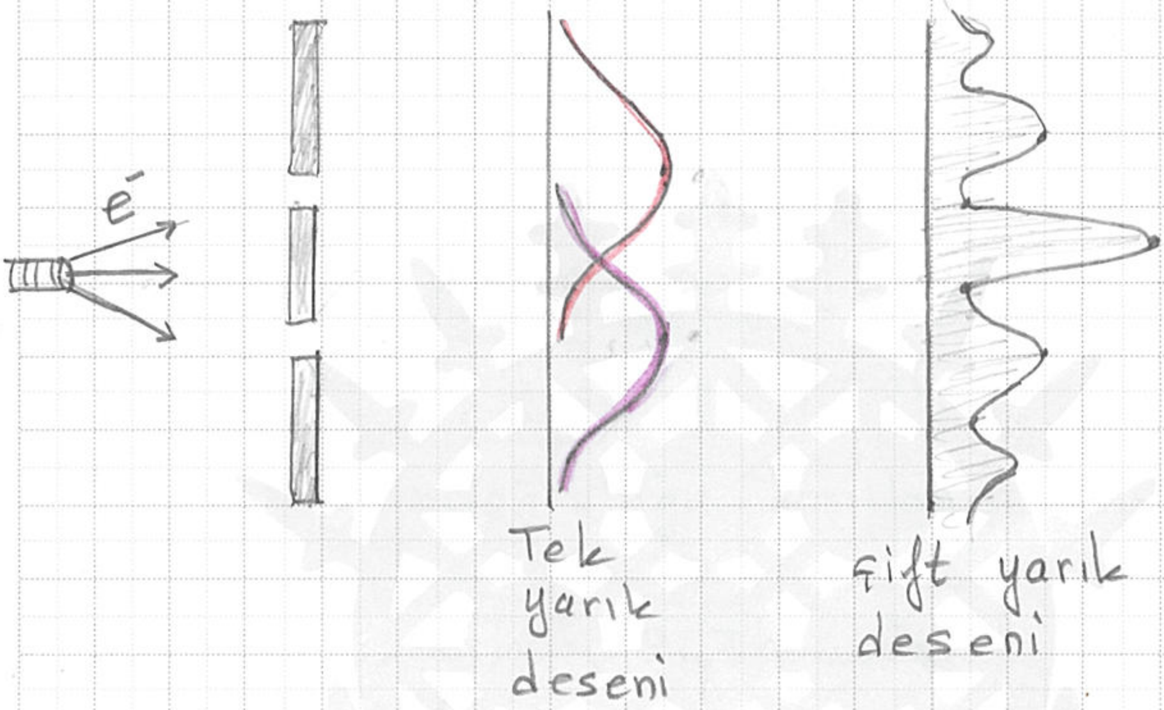
Deneyde, deliklerin açılıp kapatılmasının kontrol edilebilir olması ve tek tek elektronların gönderilebilmesi en önemli sonuçtur.

["Quantum" entanglement] !

Kuantum fiziğinde
FAZ FARKI ÖNEMLİ

Elektronlarla Çift Yarık Girişim Deneyi

Richard Feynman (1918-1988)
Nobel 1965



Sonuç: Elektronlar girişim yaparak dalga özelliği gösteriyor.
Ancak su dalgası gibi yarıklardan geçerken ikiye bölünemez.

Bu durumda elektronu tanımlayan dalga fonksiyonu olasılık fonksiyonu olarak yorumlanabilir.

Elektron Kırınım Deneyleri

[C. Davisson, L. Germer 1927] Kırınım Deney

"Tek Nikel kristalinden saçılan elektronlar.

Bu deney ile "Louis de Broglie" tarafından 1924 yılında öne sürülen elektronun de Broglie dalga boyu olan

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p}} \qquad p = mv$$

hipotezinin doğruluğu kanıtlandı.

C. Davisson, L. Germer, G. Thomson
Nobel 1937

Louis de Broglie Nobel 1929

Olasılık fonksiyonu (genliği)

Parçacıklar için dalga denkleminin çözümleri olan dalga fonksiyonları olasılık genliği olarak yorumlanır.

(1B) $\dfrac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = v^2 \dfrac{\partial^2 \psi_x}{\partial z^2}$ $\qquad \psi_x(z,t) = A\, e^{i(kz-\omega t+\delta)}$

Klasik dalga denklemi $\qquad \omega = kv$

3B $\boxed{\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \psi}$ $\qquad \psi(\vec{r},t) = A\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\delta)}$

$\vec{r} = (x, y, z)$

$\psi(\vec{r},t)$: Parçacığın t anında $\vec{r}$ civarında bulunma olasılık genliği

$|\psi(\vec{r},t)|^2 = |\psi^* \psi|$: Olasılık yoğunluğu

$P_V = \int_V |\psi(\vec{r},t)|^2 d^3r$ = Parçacığın V hacmi içinde bulunma olasılığı (t anında)

$P = \int_{\text{Tüm uzay}} |\psi(\vec{r},t)|^2 d^3r = 1 = \dfrac{100}{100}$ (Normalizasyon) Boylandırma

EK:

Gaussian olasılık yoğunluğu

$$|\Psi(x)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-3)^2 \frac{1}{2}}$$

ortalama konum $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\Psi|^2 dx$

$x-3=y$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (y+3) e^{-y^2 \frac{1}{2}} dy = 0 + \frac{3}{\sqrt{2\pi}} 2\int_0^{\infty} e^{-y^2/2} dy$$

— o —

$$= 2\int_0^{\infty} e^{-\alpha z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad 4\int_0^{\infty} dy_1 \int_0^{\infty} dy_2\, e^{-\alpha(y_1^2+y_2^2)}$$

$$I^2 = 4\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \frac{dr^2}{2} e^{-\alpha r^2} \qquad y_1^2+y_2^2 = r^2 \qquad dy_1 dy_2 = r\,dr\,d\theta$$

$$I^2 = 4\int_0^{\pi/2} d\theta \left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\alpha}\right) e^{-\alpha r^2}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{\alpha} \qquad I = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

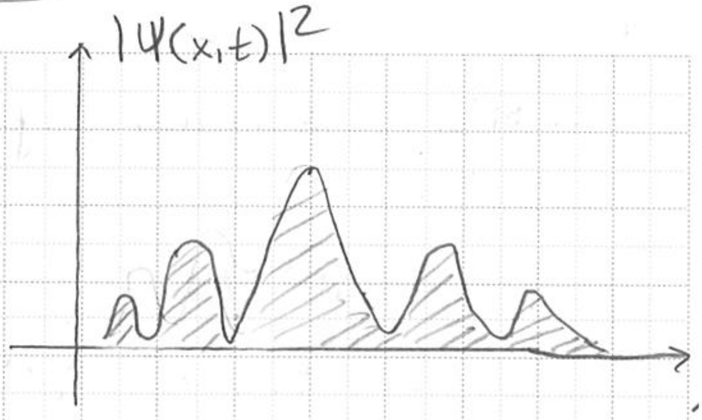
— o —

$$\langle x \rangle = \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = 3$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\Psi(x)|^2 dx = 10$$

$$\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{10-9} = 1 = \Delta x_s$$

Örnek: Grafiğe göre parçacık sadece taralı bölge içinde bir yerde bulunma olasılığına sahiptir.



Ortalama Konum

$$\langle x \rangle = \bar{x} = \int x \, |\Psi(x,t)|^2 \, dx$$

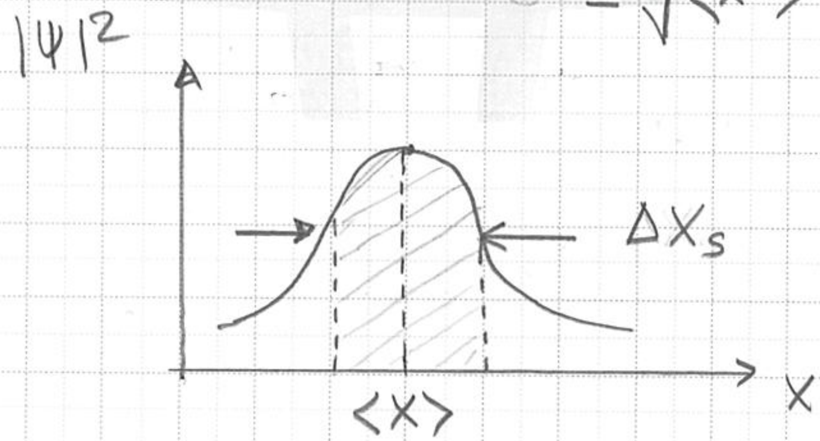
Ortalama değerden Sapma

$$\Delta x = (x - \langle x \rangle)$$

Standart Sapma $\Delta x_s = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}$

$$\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

örnek:



Girişim

$$P = |\Psi_1 + \Psi_2|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + \underbrace{\Psi_1^* \Psi_2 + \Psi_1 \Psi_2^*}_{\text{girişim terimi}}$$

(Superposition)

Fourier Dönüşümü

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{+ikx}\, g(k)\, db \\ g(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ikx}\, f(x)\, dx \end{aligned}\right\} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{Dalga}$$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{\frac{ipx}{\hbar}}\, g(p)\, dk \\ g(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{-\frac{ipx}{\hbar}}\, f(x)\, dx \end{aligned}\right\} \quad \text{parçacık} \quad p = \hbar k$$

Dalga- Parçacık İlişkisi

	Parçacık	Dalga	Dağınım Bağıntısı	
	E, p	ω, k ν, λ		
Işık	$E = h\nu$ $p = \hbar k$	ν, λ	$\omega = kc$ $E = pc$	
Madde	E, p	$\lambda = \frac{h}{p}$ $\omega = \frac{E}{\hbar}$	$E = p^2/2m$ $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$	

Momentum olasılık genliği

$\varphi(p)$: parçacığın p momentumuna sahip olma olasılık genliği

$|\varphi(p)|^2$: p momentumuna sahip olma olasılık yoğunluğu

$\int_{\Delta p} |\varphi(p)|^2 dp$: Δp aralığında p momentumuna sahip olma olasılığı

EK:

$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx\, e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} \left(\frac{1}{2\pi\alpha}\right)^{1/4} e^{-ipx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{2\pi\alpha}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\left[ipx + \frac{x^2}{4\alpha}\right]}$$

$$(cx + d\,ip)^2 = c^2x^2 - d^2p^2 + (2cd)\,ipx$$

$$c = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \qquad 2cd = 1 \qquad d = \frac{1}{2c} = \sqrt{\alpha}$$

$$cx + dip = x'$$

$$\varphi(p) = [\,\,''\,\,]\, e^{-\alpha p^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(c\,dx)}{c}\, e^{-x'^2}$$

$$= \left(\frac{1}{(2\pi)^2 2\pi\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} 2\sqrt{\alpha} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x'^2} dx'\right) e^{-\alpha p^2}$$

$$= \left(\frac{2^4\alpha^2}{2^2\pi^2 2\pi\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\pi}\, e^{-\alpha p^2}$$

$$\boxed{\varphi(p) = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha p^2}}$$

$\varphi(p)$ Nasıl Bulunur?

Eğer $\psi(x)$ biliniyorsa Fourier dönüşümü ile $\varphi(p)$ bulunur.

$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar}\, \psi(x)\, dx \qquad (\hbar = sb)$$

$$\psi(x) = \frac{}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{ipx/\hbar}\, \varphi(p)\, dp$$

—— o ——

Örnek:

$$\psi(x) = \left(\frac{1}{2\pi\alpha}\right)^{1/4} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} \qquad \hbar = 1$$

$$\varphi(p) = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha p^2}$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\, |\psi(x)|^2\, dx = 0$$

$$\Delta x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle = \int x^2 |\psi(x)|^2 dx = \alpha$$

$$\langle p \rangle = 0 \qquad \Delta p^2 = \frac{1}{4\alpha}$$

EK:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx^2$$

$$\left(2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = 4\int_{0}^{\infty} dx\,dy\, e^{-(x^2+y^2)} = \int_{0}^{\infty} r\,dr\, e^{-r^2} \int_{0}^{2\pi} d\phi$$

$x^2+y^2=r^2$ $\quad$ $dx\,dy = r\,dr\,d\phi$

$$\int_{0}^{\infty} r\,dr\, e^{-r^2} \int_{0}^{2\pi} d\phi = \frac{1}{2}(2\pi) = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\boxed{\Delta x \, \Delta p = \frac{1}{2}}$$

Belirsizlik ilkesi

Δx : Konumdaki belirsizlik

Δp : Momentumdaki belirsizlik

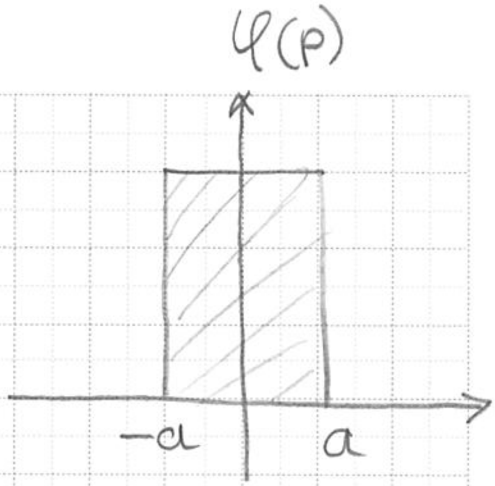
Kuantum fiziğinin koruyucusu

$$\boxed{\Delta x \, \Delta p \geqslant \frac{\hbar}{2}}$$

Heisenberg (1927) Belirsizlik ilkesi

Örnek:

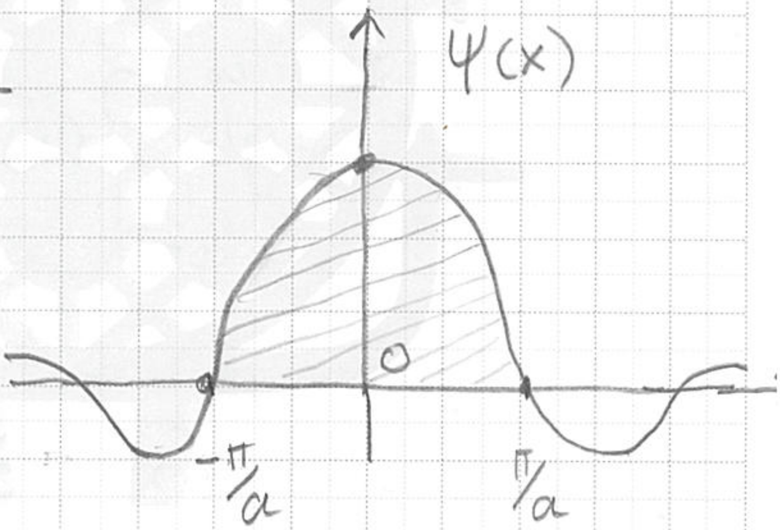
$$\varphi(p)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2a}} & p<|a| \\ 0 & p>|a|\end{cases}$$



$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{ipx}\,\varphi(p)\,dp$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4\pi a}}\,\frac{e^{ipx}}{ix}\Bigg]_{-a}^{a}=\sqrt{\frac{a}{\pi}}\,\frac{\sin(ax)}{ax}$$

$$\psi(x)=\sqrt{\frac{a}{\pi}}\,\frac{\sin(ax)}{ax}$$



$\Delta p=2a$

$\Delta x=\dfrac{2\pi}{a}$

$\Delta x\,\Delta p=4\pi>1$

Dirac Delta Fonksiyonu

$$\left.\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \varphi(p)\, e^{ipx/\hbar}\, dp \\ \varphi(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \psi(x)\, e^{-ipx/\hbar}\, dx\end{aligned}\right\} \text{Fourier Dönüşümü}$$

İkinci ifadeyi birincide yerine koyalım

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{ipx/\hbar} \int dp \int dx'\, \psi(x')\, e^{-ipx'/\hbar}$$

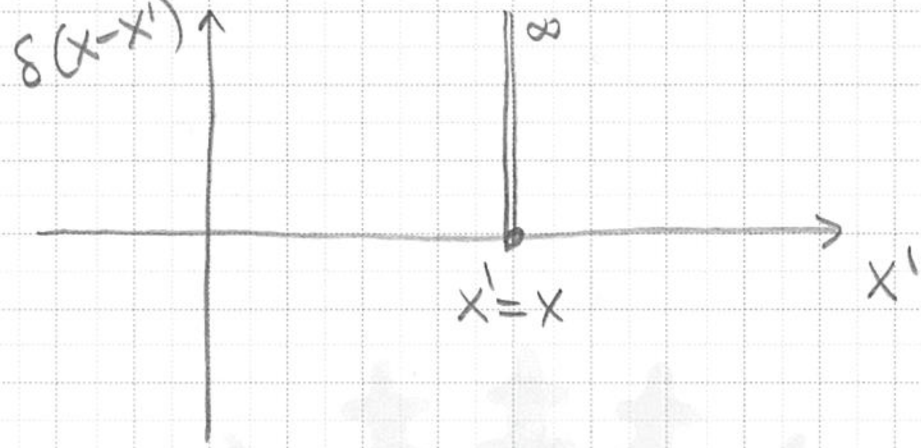
$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, \psi(x') \left[\int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{ip(x-x')/\hbar} \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, \psi(x')\, \delta(x-x') = \psi(x)$$

$$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{ip(x-x')/\hbar}$$

Dirac Delta fonk.

$$\delta(x-x') = \begin{cases} x' = x & \rightarrow \infty \\ x' \neq x & 0 \end{cases}$$



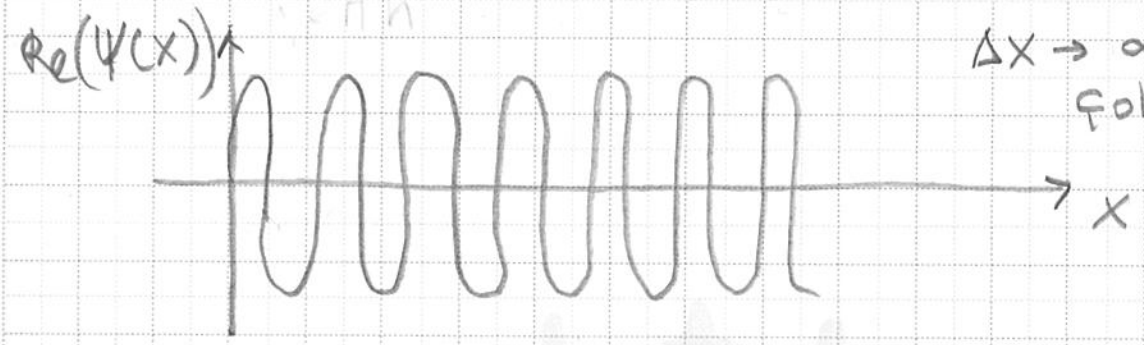
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x')\, f(x')\, dx'$$

$$\varphi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(p'-p)\, \varphi(p')\, dp'$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x')\, dx' = 1 \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x')\, dx' = 1$$

Düzlem Dalganın Fourier Dönüşümü

$$\psi(x) = A\, e^{ip_0 x/\hbar} = A\, e^{ik_0 x}$$



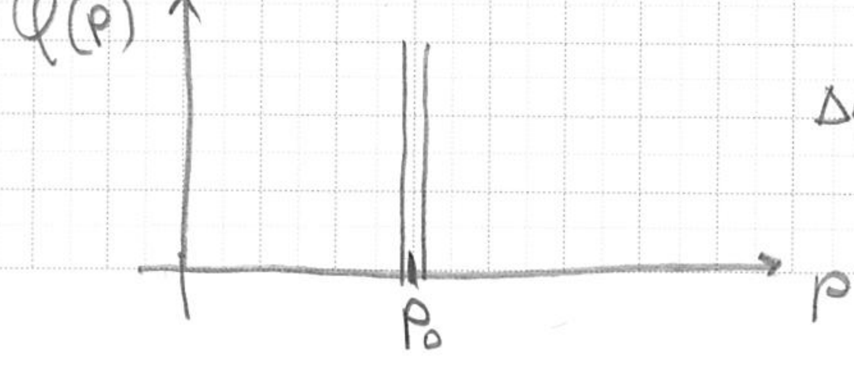
$\Delta x \to \infty$
çok belirsi

$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx\, e^{-ipx/\hbar} \left(A\, e^{ip_0 x/\hbar}\right)$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-i(p-p_0)x/\hbar}$$

$$\varphi(p) = \sqrt{2\pi\hbar}\, A \quad \delta(p-p_0)$$

Eğer $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$ ise $\varphi(p) = \delta(p-p_0)$ ol



$\Delta p \to 0$ çok belirl

Konum ve Momentum Uzayında Olasılık fonksiyonlarının Bazı özellikleri:

$$\int |\psi(x)|^2 dx = \int |\varphi(p)|^2 dp$$

Parseval Teoremi

İspat:

$$\int dx \, \psi^*(x) \left(\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx} \varphi(p) \, dp \right)$$

$$= \int dp \, \varphi(p) \left(\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx} \psi^*(x) \, dx \right)$$

$$= \int dp \, \varphi(p) \, \varphi^*(p) = \int dp \, |\varphi(p)|^2$$

Olasılık Fonksiyonlarının türevleri

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{ipx/\hbar} \varphi(p)\, dp$$

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\; e^{ipx/\hbar} \left(\frac{ip}{\hbar} \varphi(p)\right)$$

Yani

$\frac{d\psi}{dx}$'in Fourier dönüşümü $\rightarrow \frac{ip}{\hbar}\varphi(p)$

$$\frac{d\psi}{dx} \xrightarrow{FD} \frac{ip}{\hbar} \varphi(p)$$

—— o ——

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\; e^{ipx/\hbar} \left(-\frac{p^2}{\hbar^2} \varphi(p)\right)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} \xrightarrow{FD} \left[-\frac{p^2}{\hbar^2} \varphi(p)\right]$$

—— o ——

$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx \, e^{-ipx/\hbar} \, \psi(x)$$

$$\frac{d\varphi(p)}{dp} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx \, e^{-ipx/\hbar} \left(\frac{-ix}{\hbar} \psi(x) \right)$$

$$\frac{d\varphi(p)}{dp} \xrightarrow{FD} \left[\frac{-ix}{\hbar} \psi(x) \right]$$

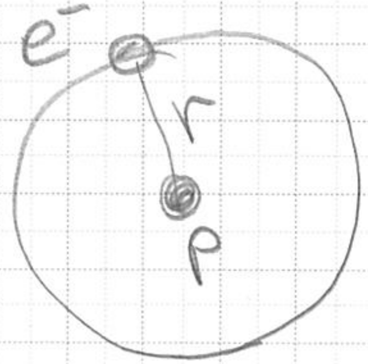
—— o ——

$$\frac{d^2\varphi(p)}{dp^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx \, e^{\frac{-ipx}{\hbar}} \left(-\frac{x^2}{\hbar} \psi(x) \right)$$

$$\frac{d^2\varphi(p)}{dp^2} \xrightarrow{FD} \left[-\frac{x^2}{\hbar} \psi(x) \right]$$

—— o ——

Newton Atomu (Klasik Fizik)



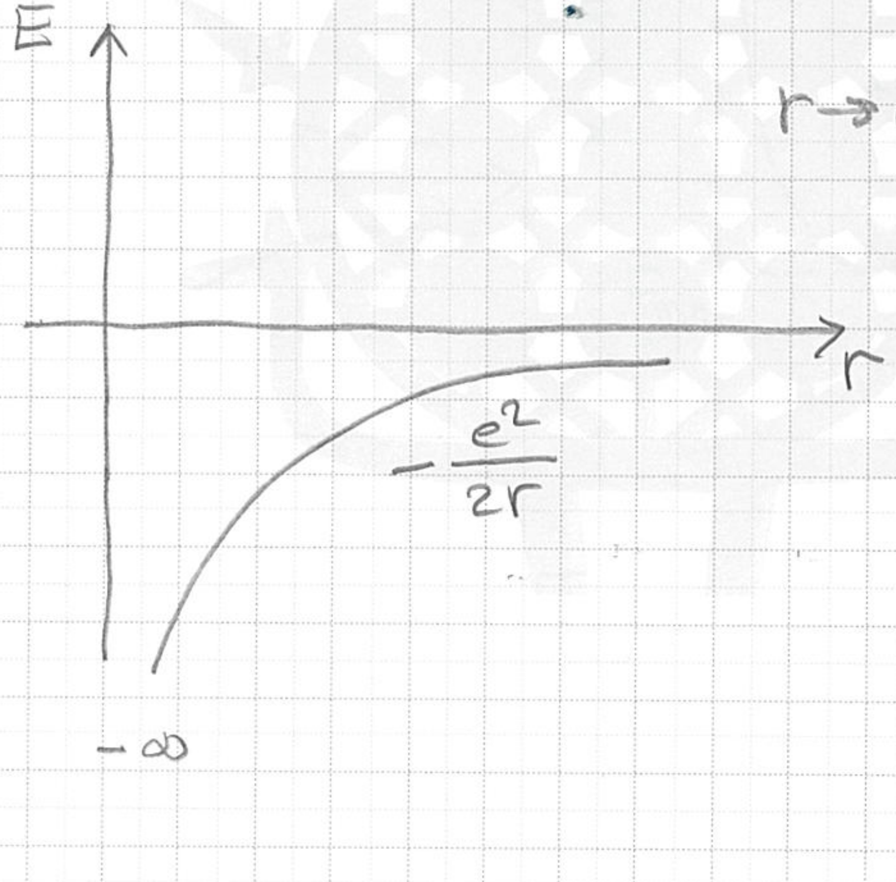
$$-\frac{e^2}{r^2}\hat{r} = m\omega^2 r\,(-\hat{r})$$

$$v = \omega r$$

$$\frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$mv^2 = \frac{e^2}{r}$$

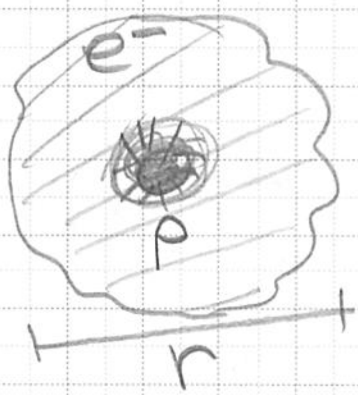
$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{r} = \frac{e^2}{2r} - \frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{2r}$$



$r \to 0 \quad E \to -\infty$

Heisenberg Atomu (Kuantum Fiziği)

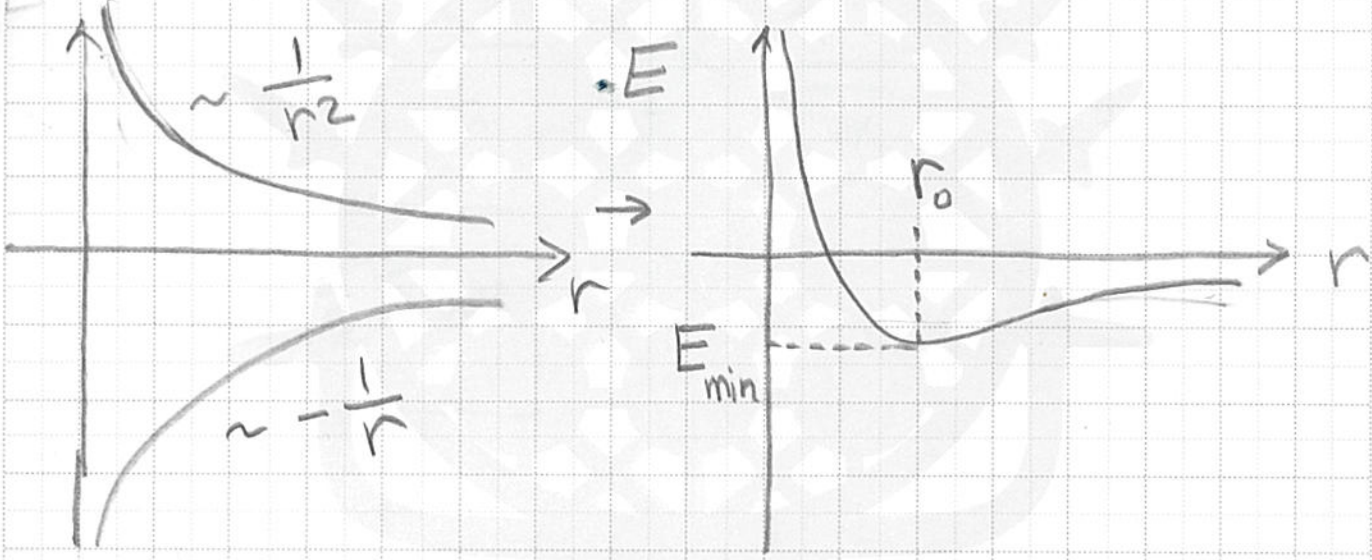
$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$$



$$\Delta p \, \Delta r = \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta p \sim p \ , \quad \Delta r \sim r$$

$$p^2 = \frac{\hbar^2}{4r^2} \rightarrow E = \frac{\hbar^2}{8mr^2} - \frac{e^2}{r}$$



$$r_0 = \frac{\hbar^2}{4me^2} \qquad E_{min}(r_0) = -\frac{2me^4}{\hbar^2}$$

Harmonik Salınıcı için

Minimum (zero point) Enerji [Belirsizlik ilkesi]

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}Kx^2$$

$$px \simeq \frac{\hbar}{2}$$

$$p = \frac{\hbar}{2x}$$

$$E = \frac{\hbar^2}{8mx^2} + \frac{1}{2}Kx^2$$

$$\frac{dE}{dx} = 0 \qquad x_0^2 = \frac{\hbar}{2\sqrt{mK}}$$

$$E_{min} = \frac{\hbar^2}{8m}\frac{2\sqrt{mK}}{\hbar} + \frac{1}{2}K\frac{\hbar}{2\sqrt{mK}} \qquad \sqrt{\frac{K}{m}} = \omega$$

$$\boxed{E_{min} = \frac{1}{2}\hbar\omega}$$