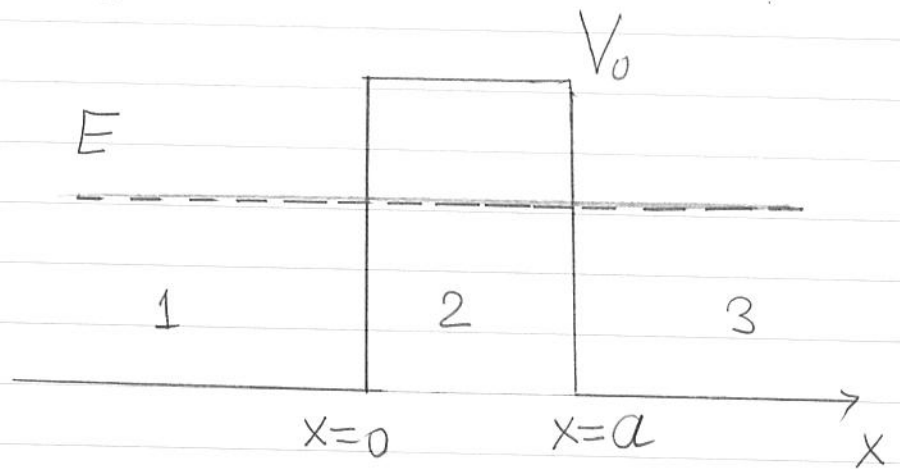


Bölüm-4

1-Boyutta Saçılma

Kuantum Fizikinin En Popüler Model Problemleri:

Tünel olayı



1. Bölgede Schrödinger denkleminin

çözümleri:

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = -\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right) \phi(x)$$

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\Phi_1(x) = A e^{ikx} + R e^{-ikx}$$

2. Bölgede çözümler:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \left[(V_0 - E) \frac{2m}{\hbar^2} \right] \phi$$

$$\phi_2(x) = B e^{-\alpha x} + C e^{\alpha x}$$

3. Bölgede çözümler: $\phi_3 = T e^{ikx}$

Sınır koşulları: Sınırlarda dalga fonksiyonları ve birinci türevleri (Eğimleri) sürekli olmalı.

$$x=0 \quad \Phi_1(x=0) = \Phi_2(x=0) \quad \text{dalga fonk.}$$

$$\left. \Phi_1' \right|_{x=0} = \left. \Phi_2' \right|_{x=0} \quad \text{türevleri}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A+R=B+C \\ ik(A-R)=\alpha(C-B) \end{array} \right\} \quad A: \text{Bilinmiyor}$$

— 0 —

$$x=a \quad \Phi_2(x=a) = \Phi_3(x=a)$$

$$\left. \Phi_2'(x) \right|_{x=a} = \left. \Phi_3'(x) \right|_{x=a}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B e^{-\alpha a} + C e^{\alpha a} = T e^{ika} \\ -\alpha B e^{-\alpha a} + \alpha C e^{\alpha a} = ik T e^{ika} \end{array} \right\}$$

R, B, C, T : Bilinmeyenler

$$R - B - C + 0 \times T = -1$$

$A=1$ olsun

$$R(-ik) + B(\alpha) + C(-\alpha) + 0 \times T = -ik$$

$$0 \times R + B(e^{-\alpha a}) + C(e^{\alpha a}) + T(-e^{ika}) = 0$$

$$0 \times R + B(-\alpha e^{-\alpha a}) + C(\alpha e^{\alpha a}) + T(-ik e^{ika}) = 0$$

Matris Formu:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -ik & \alpha & -\alpha & 0 \\ 0 & e^{-\alpha a} & e^{\alpha a} & -e^{ika} \\ 0 & -\alpha e^{-\alpha a} & \alpha e^{\alpha a} & -ik e^{ika} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ B \\ C \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -ik \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. ve 3. denklemleri α ile çarpalım

$$\begin{cases} \alpha R - \alpha B - \alpha C = -\alpha \\ R(-ik) + \alpha B - \alpha C = -ik \end{cases}$$

$$\begin{cases} B(\alpha e^{-\alpha a}) + C(\alpha e^{\alpha a}) + T(-\alpha e^{ika}) = 0 \\ B(-\alpha e^{-\alpha a}) + C(\alpha e^{\alpha a}) + T(-ik e^{ika}) = 0 \end{cases}$$

$$R(\alpha - ik) - 2\alpha C = -(\alpha + ik) \quad \leftarrow (1+2)$$

$$R(\alpha + ik) - 2\alpha B = -(\alpha - ik) \quad \leftarrow (1-2)$$

$$C(2\alpha e^{\alpha a}) - T e^{ika} (\alpha + ik) = 0 \quad (3+4)$$

$$B(2\alpha e^{-\alpha a}) - T e^{ika} (\alpha - ik) = 0 \quad (3-4)$$

Son iki denklemden B ve C yi getirip ilk 2 denklemden yerine koyalım

$$B = \frac{T e^{ika} (\alpha - ik)}{2\alpha} e^{-\alpha a}$$

$$C = \frac{T e^{ika} (\alpha + ik)}{2\alpha} e^{-\alpha a}$$

$$R(\alpha - ik) - T e^{ika - \alpha a} (\alpha + ik) = -(\alpha + ik)$$

$$R(\alpha + ik) - T e^{ika + \alpha a} (\alpha - ik) = -(\alpha - ik)$$

$$R(\alpha^2 + k^2) - T (\alpha + ik)^2 e^{-a(\alpha - ik)} = -(\alpha + ik)^2$$

$$R(\alpha^2 + k^2) - T (\alpha - ik)^2 e^{a(\alpha + ik)} = -(\alpha - ik)^2$$

$$-T \left[(\alpha + ik)^2 e^{-a(\alpha - ik)} - (\alpha - ik)^2 e^{a(\alpha + ik)} \right] = -(\alpha + ik)^2 + (\alpha - ik)^2$$

$$T = \frac{4ik\alpha e^{-ika}}{4ik\alpha \cosh \alpha a - 2(\alpha^2 - k^2) \sinh \alpha a}$$

$$R = \frac{2(\alpha^2 + k^2) \sinh \alpha a}{4ik\alpha \cosh \alpha a + 2(k^2 - \alpha^2) \sinh \alpha a}$$

$$|R|^2 = \frac{4(\alpha^2 + k^2)^2 \sinh^2(\alpha a)}{(4k\alpha)^2 + 4(k^2 - \alpha^2)^2 \sinh^2(\alpha a)}$$

$$|T|^2 = \frac{(4k\alpha)^2}{(4k\alpha)^2 + 4(k^2 - \alpha^2)^2 \sinh^2(\alpha a)}$$

$$\cosh \alpha a = \frac{1}{2}(e^{\alpha a} + e^{-\alpha a}) \sim \frac{1}{2} e^{\alpha a}$$

$$\sinh \alpha a \sim \frac{1}{2} e^{\alpha a}$$

$$|T|^2 \sim \frac{(4k\alpha)^2 e^{-2\alpha a}}{(k^2 + \alpha^2)^2}$$

$$P_T = P_0 e^{-2\alpha \Delta x}$$

Tünelleme olasılığı

EK:

$$(4k\alpha)^2 \cosh^2 \alpha a + 4(k^2 - \alpha^2)^2 \sinh^2 \alpha a$$

$$= (4k\alpha)^2 + 4(k^2 + \alpha^2)^2 \sinh^2 \alpha a$$

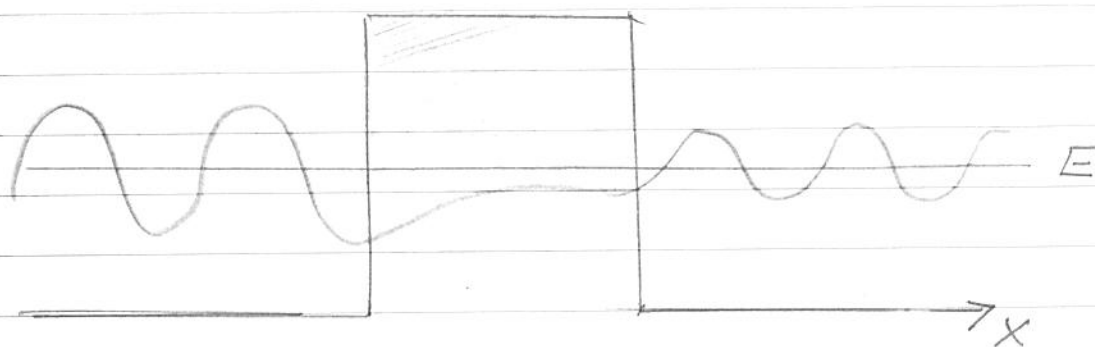
$$|R|^2 = \frac{4(\alpha^2 + k^2)^2 \sinh^2 \alpha a}{(4k\alpha)^2 + 4(k^2 + \alpha^2)^2 \sinh^2 \alpha a}$$

$$|T|^2 = \frac{(4k\alpha)^2}{(4k\alpha)^2 + 4(k^2 + \alpha^2)^2 \sinh^2 \alpha a}$$

$$|R|^2 + |T|^2 = \frac{(4k\alpha)^2 + 4(\alpha^2 + k^2)^2 \sinh^2 \alpha a}{(4k\alpha)^2 + 4(k^2 + \alpha^2)^2 \sinh^2 \alpha a}$$

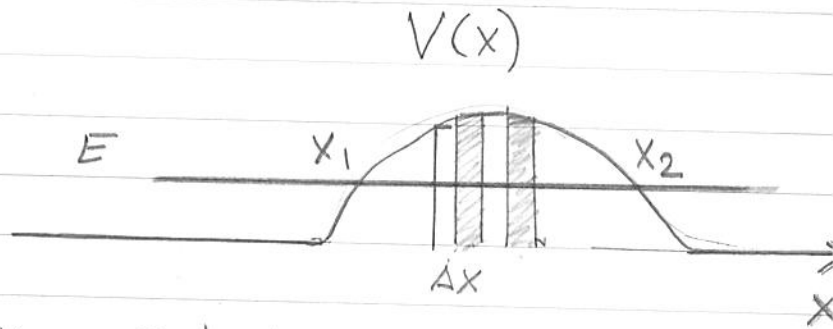
$$= 1$$

ER:



1

WKB Yöntemi



$$P_{\perp} \rightarrow e^{-2\alpha_1 \Delta x} e^{-2\alpha_2 \Delta x} \dots$$

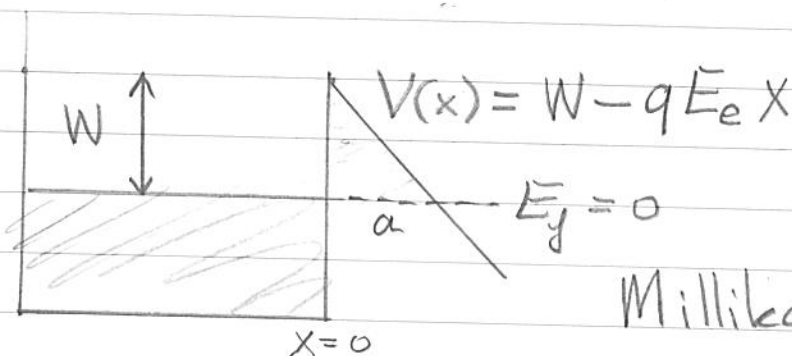
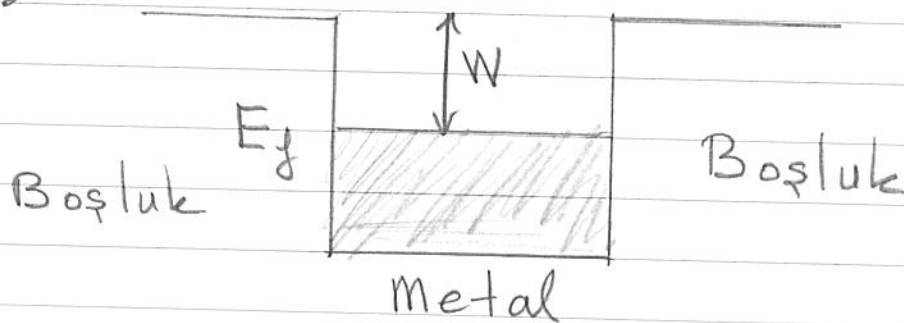
$$P_{\perp} \rightarrow e^{-2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta x} \rightarrow e^{-2 \int_{x_1}^{x_2} \alpha(x) dx}$$

$$P_{\perp} = P_0 e^{-2 \int_1^2 \alpha(x) dx}$$

$$\alpha(x) = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E)}$$

WKB yöntemi

Örnek :



1926
Millikan - Eyring

$$P_L = e^{-2 \int_0^a dx \sqrt{(W - qE_e x)} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}}$$

$$E_f = 0 = W - qE_e a \quad x = a$$

$$a = \frac{W}{qE_e}$$

Integral için değişkeni değiştirelim

$$W - qE_e x = y \quad dx = -\frac{dy}{qE_e}$$

$$+ \frac{1}{qE_e} \int_W^0 dy y^{1/2}$$

$$\begin{array}{ll} x=0 & y=W \\ x=a & y=0 \end{array}$$

$$= -\frac{2}{qE_e} \int_0^W dy y^{1/2} = -\frac{2}{qE_e} \left[\frac{2}{3} y^{3/2} \right]_0^W$$

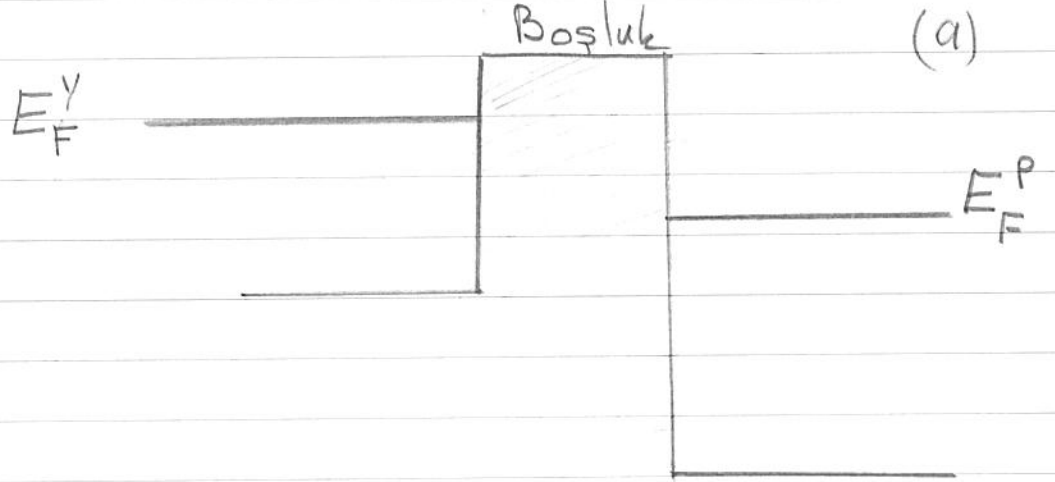
$$= -\frac{4 W^{3/2}}{3 qE_e}$$

$$P_L = e^{-\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \left(\frac{4}{3} \frac{W^{3/2}}{qE_e} \right)}$$

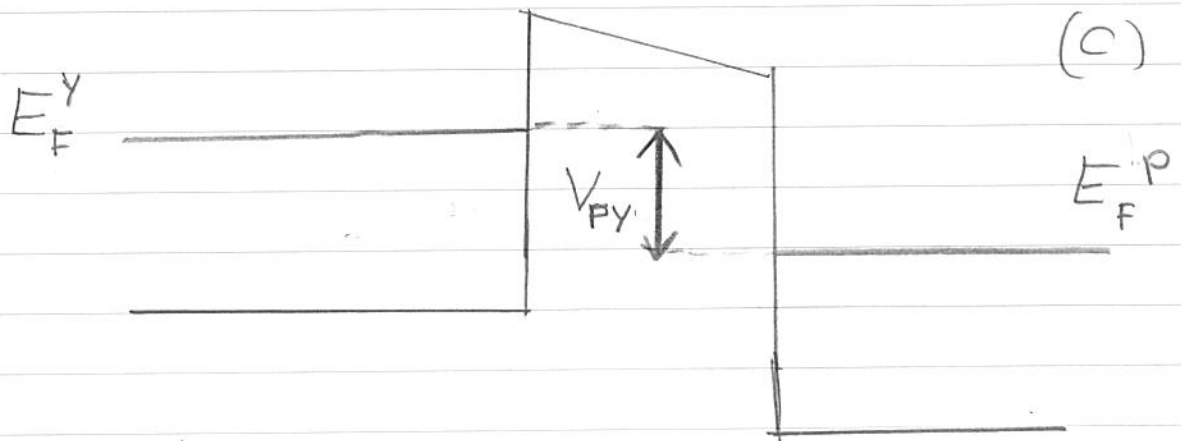
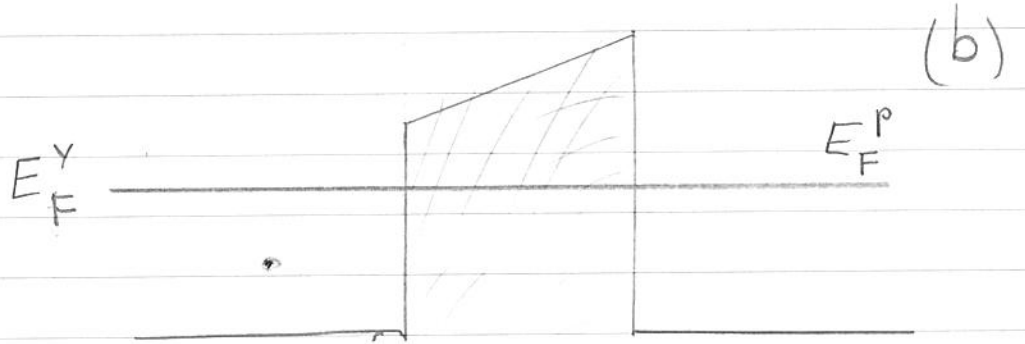
FIM : Field Ion Microscope
Metal yüzeyleri atom boyutlarında görüntülemek için kullanılır.

STM: Scanning Tunneling Microscope

Taramalı Tünelleme Mikroskobu



y = yüzey
p = prob



V_{PY} : Yüzey ile prob arasına uygulanan potansiye farkı

EK:

E. Ruska

Gerd Binnig - H. Rohrer (IBM)

Nobel 1986

STM

V_{py} : Dışardan uygulanan potansiyel farkı sürekli olarak yüzeyden prob üzerine tünelleme ile elektron akışını sağlar.

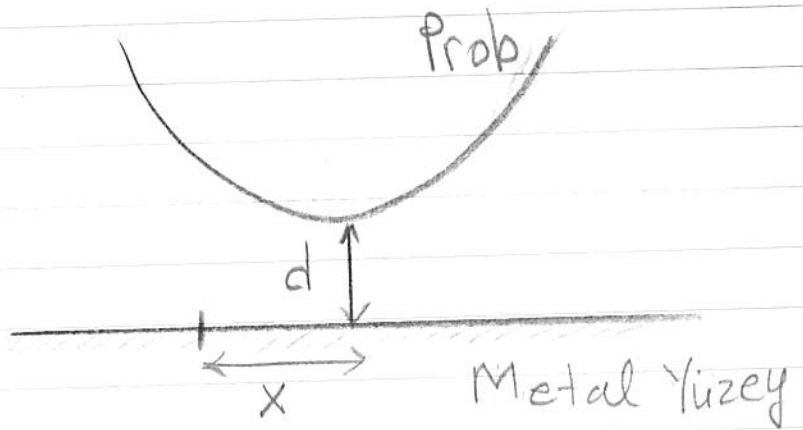
- Probin yüzeye yaklaştırıldığı ilk an
- Yüzeyden prob üzerine tünelleme ile kendiliğinden elektronlar geser ve (Fermi) enerji düzeyleri eşit olunca akış durur.
- Akışı tekrar sağlamak için bias (potansiyel farkı) uygulanır.

Tünelleme akımı:

$$I(x) \propto e^{-2d\alpha}$$

$$\alpha \approx \sqrt{\frac{2m\phi}{\hbar^2}} \approx 1 \text{Å}^{-1}$$

$$d \approx 1 \text{Å}$$



Tünel Diode

1957 L. Esaki
Sony

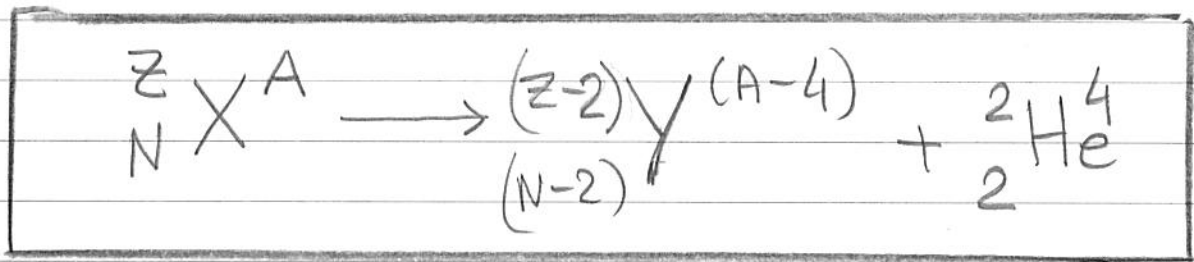
Nobel 1973

L. Esaki - B. Josephson

(Tsushin Kogyo → SONY)

Flash Memory

Çekirdeklerde α (${}^4_2\text{He}$) Bozunumu

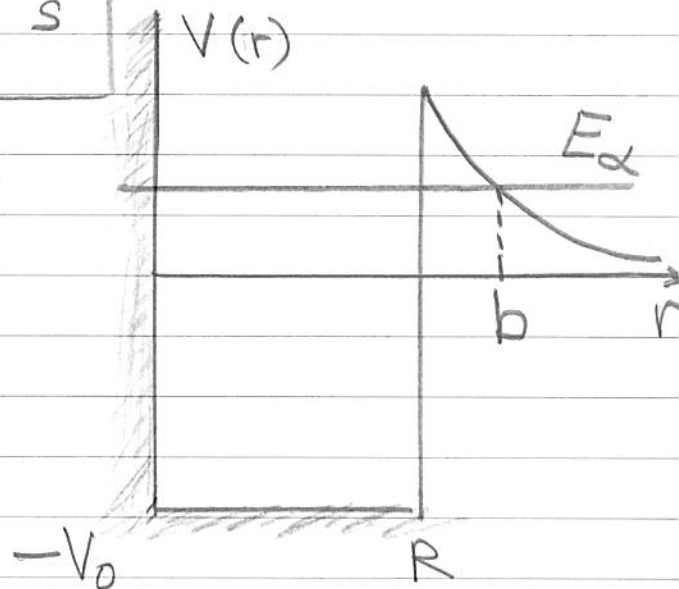


$$R \sim 2-4 \text{ F}, \quad E_\alpha \sim 2-8 \text{ MeV} \quad Z \sim 50-100$$

$$\tau \sim (10^{17} - 10^{-12}) \text{ s}$$

α -parçacığının gördüğü etkin potansiyel.

α -parçacığı ürün çekirdeğin etkin potansiyelini görür:



$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < R \\ \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} & r > R \end{cases}$$

$$Z_1 = Z_2, \quad Z_2 = Z - 2$$

$$P_T = e^{-2 \int_a^b dr \left[\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - E \right]^{1/2} \left[\frac{2\mu}{\hbar^2} \right]^{1/2}}$$

$$a=R \quad b=\frac{Z_1 Z_2 e^2}{E_\alpha}$$

μ : indirgenmiş
kütle
 $\approx m_\alpha$

$$P_T = e^{-2G}$$

$$\frac{b}{R} \ll 1 \text{ için}$$

$$G \approx \frac{2(Z-2)}{\sqrt{E_\alpha (\text{MeV})}}$$

α -parçacığı engele her geldiğinde
bozunma olasılığı (tünelleme ile)

e^{-2G} ile bulunabilir.

α -parçacığının çekirdek içinde $2R$
uzaklığını dolama süresi

$$T_0 \approx \frac{2R}{V_\alpha}$$

$$E_\alpha = \frac{1}{2} m V_\alpha^2$$

$$V_\alpha \approx \sqrt{\frac{2E_\alpha}{m_\alpha}}$$

$$R \approx 5-8 \text{ F}$$

$$T_0 \approx 10^{-21} \text{ s} \quad \tau = T_0 e^{+2G} \quad \text{ömürü}$$

$$\tau \approx T_0 e^{\frac{4(Z-2)}{\sqrt{E_\alpha (\text{MeV})}}} !$$

$$\ln \tau = \ln T_0 + \frac{4(Z-2)}{\sqrt{E_\alpha}}$$

EK:

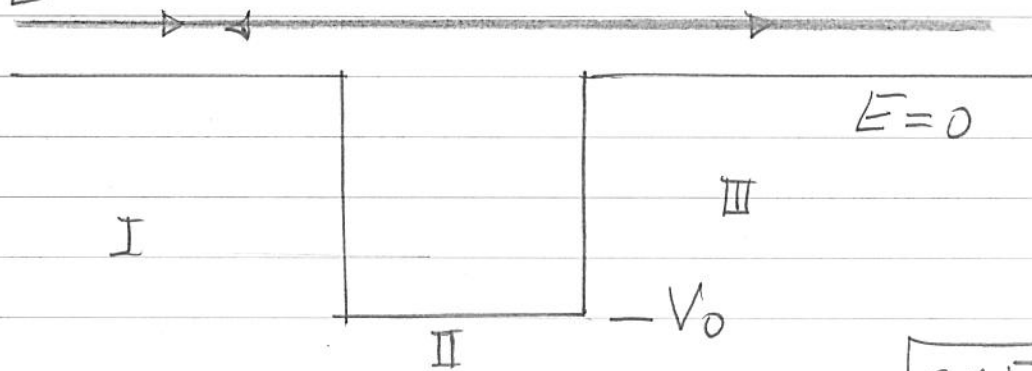
$$P_T = e^{-2G} \quad \text{ifadesinin } 1 (\% 100)$$

verebilmesi için α parçasının
kuyu isinde $+2G$

duvarına $n = e^{+2G}$ defa kuyunun
sarması gereklidir.

Buradan $\tau = T_0 e^{2G}$ elde edilir.

Örnek:



$$\Phi_I(x) = e^{ikx} + R e^{-ikx}$$

$$\Phi_{II}(x) = B e^{-ikx} + C e^{ikx}$$

$$\Phi_{III}(x) = T e^{ikx}$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 + E)}$$

Bir önceki  örneğinde

$$\alpha = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)} \text{ idi}$$

Burada α yerine $\alpha = ik$ koyarak daha önce bulunan R, T, B, C katsayıları kullanılabilir,

$$T = \frac{4kK e^{-ika}}{4kK \cos Ka + 2i(K^2 + k^2) \sin Ka}$$

$$|T|^2 = \frac{(4kK)^2}{(4kK)^2 \cos^2 Ka + 4(K^2 + k^2)^2 \sin^2 Ka}$$

$$R = \frac{2i(k^2 - k'^2) \sin ka}{4kk' \cos ka + 2i(k^2 + k'^2) \sin ka}$$

$$|R|^2 = \frac{4(k^2 - k'^2)^2 \sin^2 ka}{(4kk')^2 \cos^2 ka + 4(k^2 + k'^2)^2 \sin^2 ka}$$

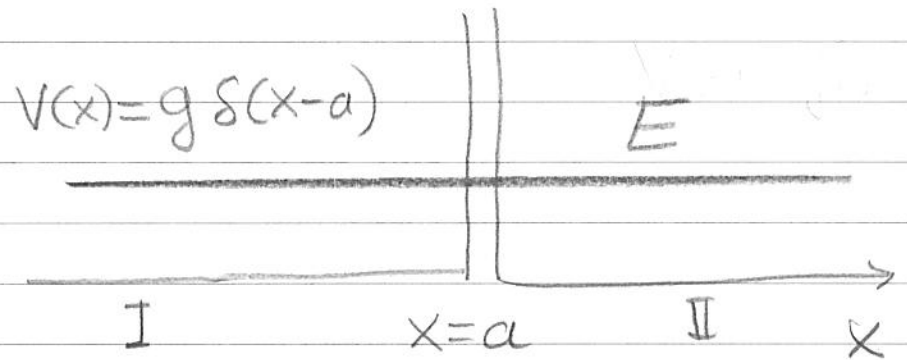
$ka = 0$ veren $k = \frac{n\pi}{a}$ değerlerinde

$ R ^2 = 0$	$ T ^2 = 1$	verir.
-------------	-------------	--------

Yani $E = -V_0 + \frac{\hbar^2}{2m} k^2 = -V_0 + \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2m a^2}$

enerji değerlerinde dalga yansımadan geçer. Bu olaya REZONANS geçişi adı verilir. Ramsauer-Townsend tarafından düşük enerjili elektronların ($E = 0,1 \text{ eV}$) (Argon ve Neon gibi) asal gazlardan saçılmasında gözlenmiştir.

δ -Fonksiyonu Potansiyellerinden Saqılma



$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + g\delta(x-a) \right] \phi(x) = E \phi(x)$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2} (g\delta(x-a) - E) \phi(x)$$

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} dx \left(\frac{d^2\phi}{dx^2} \right) = \phi'(a+\epsilon) - \phi'(a-\epsilon) \quad \text{sol}$$

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} dx \frac{2m}{\hbar^2} (g\delta(x-a) - E) \phi(x) = \frac{2m}{\hbar^2} g \phi(a) \quad \text{sag}$$

$$\boxed{\phi'(a+\epsilon) - \phi'(a-\epsilon) = \frac{2m}{\hbar^2} g \phi(a)}$$

Birinci türev süreksizdir

$$\phi_I(x) = e^{ikx} + R e^{-ikx}$$

$$\phi_{II} = T e^{ikx}$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$V(x) = g \delta(x) \text{ olsun}$$

Sınır koşulları: $x=0$

$$1 + R = T$$

dalga fonk. sürekli

$$\left(\frac{d\phi_{II}}{dx} \Big|_E - \frac{d\phi_I}{dx} \Big|_{-E} \right)_{E \rightarrow 0} = g \frac{2m}{\hbar^2} \phi_{II}(0)$$

Türev süreksiz

$$ikT - (ik - ikR) = g \frac{2m}{\hbar^2} T$$

$$R = \frac{g \frac{2m}{\hbar^2}}{2ik - \frac{g2m}{\hbar^2}}$$

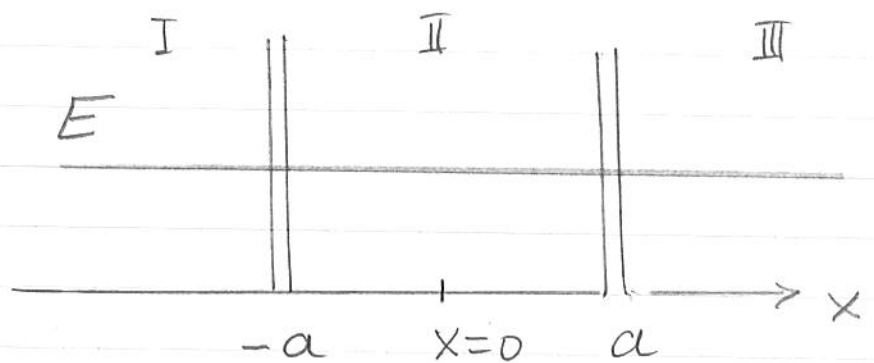
$$|R|^2 = \frac{\left(\frac{g2m}{\hbar^2} \right)^2}{4k^2 + \left(\frac{g2m}{\hbar^2} \right)^2}$$

$$T = \frac{2ik}{2ik - \frac{g2m}{\hbar^2}}$$

$$|T|^2 = \frac{4k^2}{4k^2 + \left(\frac{g2m}{\hbar^2} \right)^2}$$

$$|T|^2 + |R|^2 = 1$$

Gift Delta Fonksiyonu



$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\Phi_I = e^{ikx} + R e^{-ikx}, \quad \Phi_{II} = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

$$\Phi_{III} = T e^{ikx}$$

$$V(x) = V_0 (\delta(x+a) + \delta(x-a))$$

Sınır koşulları:

$$e^{-ika} + R e^{ika} = A e^{-ika} + B e^{ika} \quad (x = -a)$$

$$ik(A e^{-ika} - B e^{ika}) - ik(e^{-ika} - R e^{ika}) = \frac{2mV_0}{\hbar^2} \Phi_I(-a)$$

$$A e^{ika} + B e^{-ika} = T e^{ika} \quad (x = a)$$

$$ikT e^{ika} - ik(A e^{ika} - B e^{-ika}) = \frac{2mV_0}{\hbar^2} \Phi_{II}(a)$$

American J. Phys. 50 (1982) 663

Lapidus, "Resonance scattering from Double δ -function Potential"

$$R = - \frac{i V_0' [4k \cos(2ka) + 2V_0' \sin(2ka)]}{\Delta}$$

$$A = \frac{2k(2k + iV_0')}{\Delta}$$

$$B = - \frac{2ikV_0' e^{2ika}}{\Delta}$$

$$T = \frac{4k^2}{\Delta}$$

$$V_0' = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$$

$$\Delta = V_0'^2 (e^{4ika} - 1) + 4k^2 + 4V_0' i k$$

$$|R|^2 = \frac{16k^2 V_0'^2 \cos^2 2ka + 4V_0'^4 \sin^2(2ka) + 16kV_0'^3 \sin 4ka}{|\Delta|^2}$$

$$|\Delta|^2 = 16k^4 + 16k^2 V_0'^2 \cos^2 2ka + 4V_0'^4 \sin^2(2ka) + 16kV_0'^3 \sin 4ka$$

$$|R|^2 + |T|^2 = 1 \quad \text{sağlanır}$$

$$2\sqrt{\frac{E}{V_0}} = -\tan 2ka \quad \text{koşulu ile}$$

resonans sağlanması
oluşur

EK

$$\Delta = e^{2ika} \left\{ i \left[(2V_0^2 - 4k^2) \sin 2ka + 4V_0' k \cos 2ka \right] + \left[4k^2 \cos 2ka + 4kV_0' \sin 2ka \right] \right\}$$

Rezonans koşulu:

$$4k \cos 2ka + 2V_0' \sin 2ka = 0 = R$$

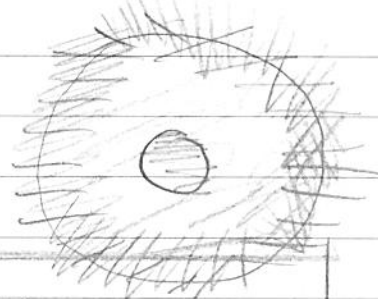
BÖLÜM-5

Atom ve Molekül Modelleri

Hidrojen Atomu

$$V = -\frac{e^2}{r}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 \Phi(\vec{r}) - \frac{e^2}{r} \Phi(\vec{r}) = E \Phi(r)$$

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{mc^2 \alpha_e^2}{n^2}$$

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

1-Boyutlu Atom Modelleri

$$V(x) = -V_0 \delta(x)$$

$$x=0$$

$$E = -|E|$$

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} + \frac{2mV_0}{\hbar^2} \delta(x) \Phi = \frac{2m|E|}{\hbar^2} \Phi$$

$$\Phi_I(x) = A e^{\alpha x}$$

$$x < 0$$

$$\Phi_{II}(x) = B e^{-\alpha x}$$

$$x > 0$$

$$\alpha^2 = \frac{2m|E|}{\hbar^2}$$

Sınır Koşulları

$$\Phi_I'(x) = \Phi_{II}'(x) \quad x=0 \rightarrow A=B \text{ olur}$$

$$\Phi_{II}'(x) - \Phi_I'(x) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2} \Phi_I(x) \quad x=0$$

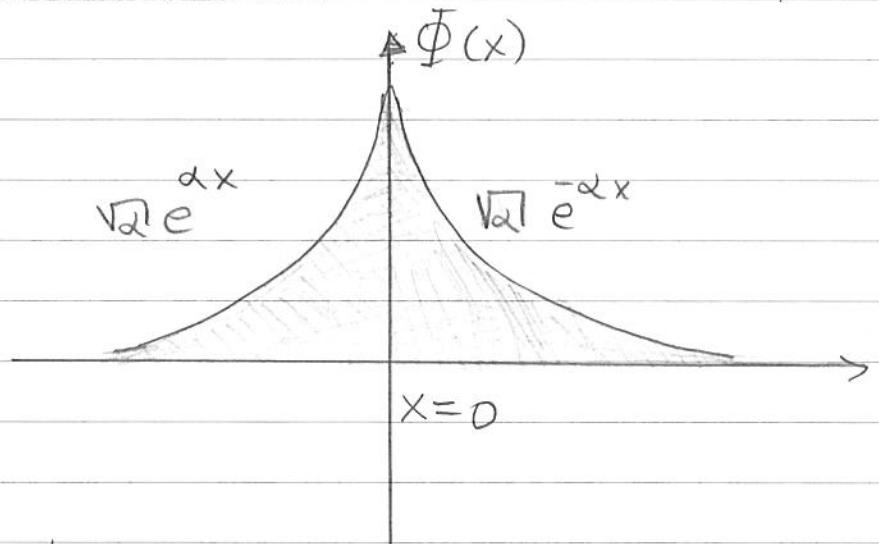
$$(-\alpha - \alpha)A = -\frac{2mV_0}{\hbar^2} A$$

$$\downarrow \quad \alpha = \frac{mV_0}{\hbar^2}$$

$$\frac{2m|E|}{\hbar^2} = \frac{m^2 V_0^2}{(\hbar^2)^2}$$

$$E = -|E| = -\frac{mV_0^2}{2\hbar^2}$$

sadece tek bağlı durum var.



Boylandırma ile A katsayısını bulalım

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x)|^2 dx = 1$$

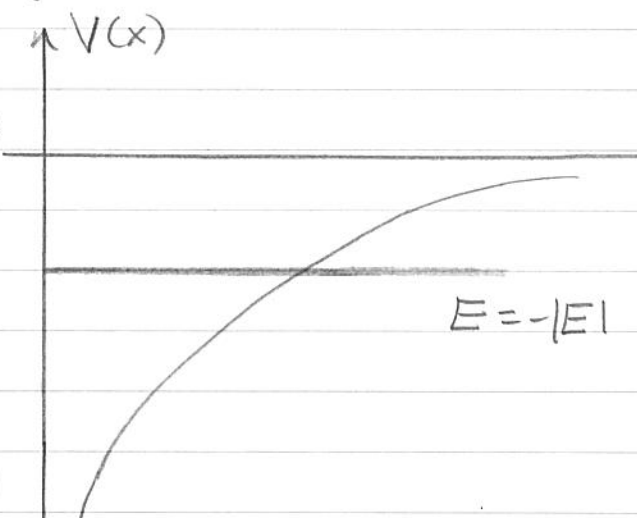
$$|A|^2 \left\{ \int_{-\infty}^0 2\alpha e^{2\alpha x} dx + \int_0^{\infty} 2\alpha e^{-2\alpha x} dx \right\} = 1$$

$$A = \sqrt{\alpha}$$

$$\Phi(x) = \sqrt{\alpha} e^{-\alpha|x|}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} V(x) = -\frac{e^2}{4x} & x > 0 \\ = \infty & x \leq 0 \end{array} \right\}$$

Potansiyeli içindeki elektron için temel durum enerjisini bulalım:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{2me^2}{\hbar^2} \frac{1}{4x} = + \frac{2m|E|}{\hbar^2} \phi$$


I. $x \rightarrow \infty$ civarındaki çözüm?

II. $x \rightarrow 0$ civarındaki çözüm?

I. $x \rightarrow \infty$ $\frac{d^2\phi_\infty}{dx^2} = \alpha^2 \phi_\infty$ $\phi_\infty = A e^{-\alpha x}$

II. $x \rightarrow 0$ $\Phi(x) = f(x) e^{-\alpha x}$ ($f(x) \rightarrow 0$ $x \rightarrow 0$)

$$(f''(x) - 2\alpha f'(x) + \alpha^2 f) + \frac{2me^2}{4\hbar^2} \frac{f(x)}{x} - \frac{2m|E|}{\hbar^2} f(x) = 0$$

$$f''(x) - 2\alpha f'(x) + \frac{2me^2}{4\hbar^2} \frac{f(x)}{x} \approx 0$$

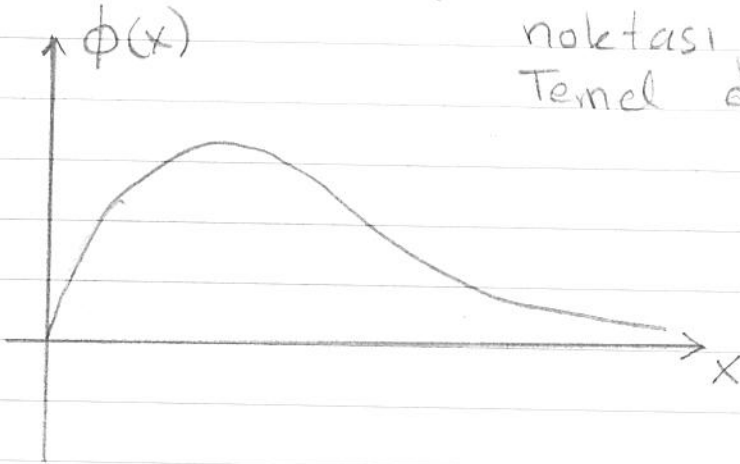
$f(x) = x$ deneyelim $\rightarrow \alpha = \frac{me^2}{4\hbar^2}$ olmalı

$$E = -|E| = -\frac{m e^4}{32 \hbar^2} = -\frac{m c^2 (\alpha_e)^2}{32}$$

$$\alpha_e = \frac{e^2}{\hbar c}$$

$$\phi(x) = A x e^{-\alpha x}$$

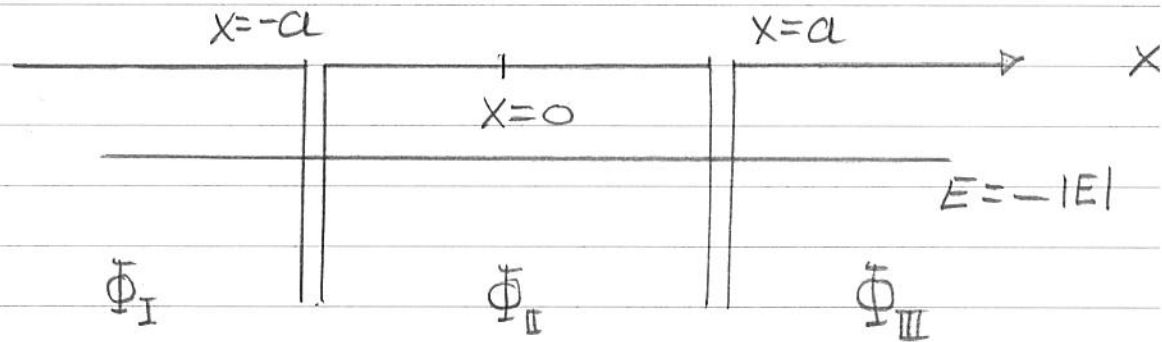
bu çözümde dönüm noktaları arasında düğüm noktası yoktur.
Temel duruma karşılık gelir.



Boylandırma: $\int_0^{\infty} |\phi|^2 dx = 1 \rightarrow A = 2\alpha^{3/2}$
(Bu işlem daha önce yapılmıştı.)

İki Atomlu Molekül Modeli

$$V(x) = -V_0 (\delta(x+a) + \delta(x-a))$$



$$\Phi_I = A e^{\alpha x} \quad x < -a$$

$$\Phi_{III} = B e^{-\alpha x} \quad x > a$$

$$\Phi_{II} = C e^{-\alpha x} + D e^{\alpha x} \quad -a \leq x \leq a$$

Potansiyel simetrik olduğundan

$$|\Phi_I(x)|^2_{x=-a} = |\Phi_{III}(x)|^2_{x=a} \quad \text{veya} \quad \int_{-\infty}^{-a} |\Phi_I|^2 dx = \int_a^{\infty} |\Phi_{III}|^2 dx$$

olmalı. Bu koşul $A^2 = B^2$ yani $B = \pm A$ ver

Sınır koşulları: ($B = A$ isin)

$$\textcircled{1} A e^{-\alpha a} = C e^{\alpha a} + D e^{-\alpha a} \quad x = -a$$

$$\textcircled{2} \alpha (-C e^{\alpha a} + D e^{-\alpha a}) - \alpha A e^{-\alpha a} = -\frac{2mV_0}{\hbar^2} A e^{-\alpha a}$$

$$\textcircled{3} A e^{-\alpha a} = C e^{-\alpha a} + D e^{\alpha a} \quad x = a$$

$$\textcircled{4} -\alpha A e^{-\alpha a} - \alpha [-C e^{-\alpha a} + D e^{\alpha a}] = -\frac{2mV_0}{\hbar^2} A e^{-\alpha a}$$

$$(1-3) \quad (D-C) \left(e^{\alpha a} + e^{-\alpha a} \right) = 0 \rightarrow D=C$$

$$(3) \quad A e^{-\alpha a} = 2C \cosh \alpha a$$

$$(4) \quad A e^{-\alpha a} \left(-\alpha + \frac{2mV_0}{\hbar^2} \right) = 2\alpha C \sinh \alpha a$$

$$\left(\frac{4}{3} \right) \quad \left(-\alpha + \frac{2mV_0}{\hbar^2} \right) = \alpha \tanh \alpha a$$

$$\frac{2mV_0}{\hbar^2} = \alpha (1 + \tanh \alpha a)$$

$$\frac{2mV_0 a}{\hbar^2} = (\alpha a) (1 + \tanh \alpha a)$$

$$\Phi_{II} = 2C \cosh \alpha x \quad \text{çift fonksiyon}$$

Sınır Koşulları : $B = -A$ için

$$\textcircled{1} \quad A e^{-\alpha a} = C e^{\alpha a} + D e^{-\alpha a} \quad \left. \vphantom{\textcircled{1}} \right\} x = -a$$

$$\textcircled{2} \quad \alpha (-C e^{\alpha a} + D e^{-\alpha a}) - \alpha A e^{-\alpha a} = -\frac{2mV_0}{\hbar^2} A e^{-\alpha a} \quad \left. \vphantom{\textcircled{2}} \right\} x = -a$$

$$\textcircled{3} \quad -A e^{-\alpha a} = C e^{\alpha a} + D e^{-\alpha a} \quad \left. \vphantom{\textcircled{3}} \right\} x = a$$

$$\textcircled{4} \quad \alpha A e^{-\alpha a} - \alpha (-C e^{\alpha a} + D e^{-\alpha a}) = \frac{2mV_0}{\hbar^2} A e^{-\alpha a} \quad \left. \vphantom{\textcircled{4}} \right\} x = a$$

$$(1+3) \quad (C+D)(e^{\alpha a} + e^{-\alpha a}) = 0 \quad D = -C$$

$$(3) \quad -A e^{-\alpha a} = -2C \sinh \alpha a$$

$$(4) \quad A e^{-\alpha a} \left(\alpha - \frac{2mV_0}{\hbar^2} \right) = -2C \alpha \cosh \alpha a$$

$$\left(\frac{4}{3} \right) \quad \left(\alpha - \frac{2mV_0}{\hbar^2} \right) = -\alpha \coth \alpha a$$

$$\frac{2mV_0 \alpha}{\hbar^2} = (\alpha a)(1 + \coth \alpha a)$$

$$\Phi_{II} = 2D \sinh \alpha x$$

tek fonksiyon

Energy özdeğerleri

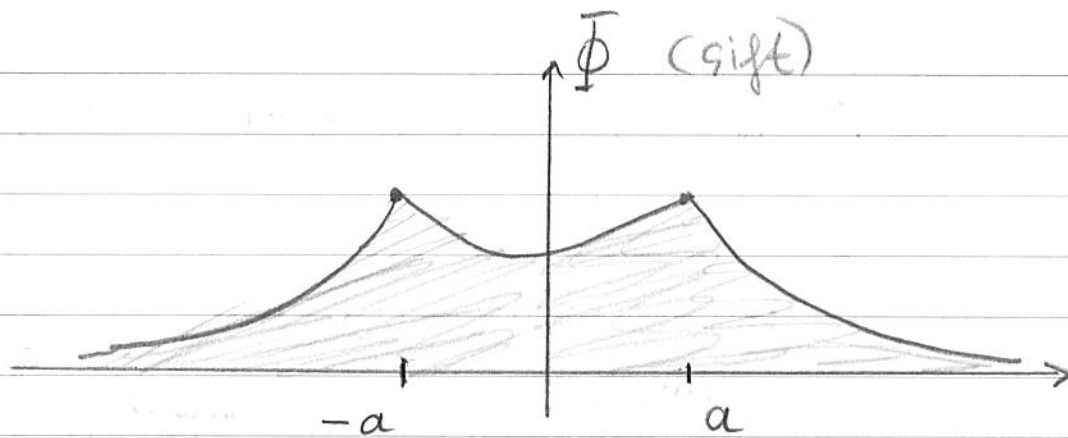
Çift fonksiyon çözümleri.

$$\Phi_I = A e^{\alpha x}$$

$$\Phi_{II} = C_1 \cosh \alpha x$$

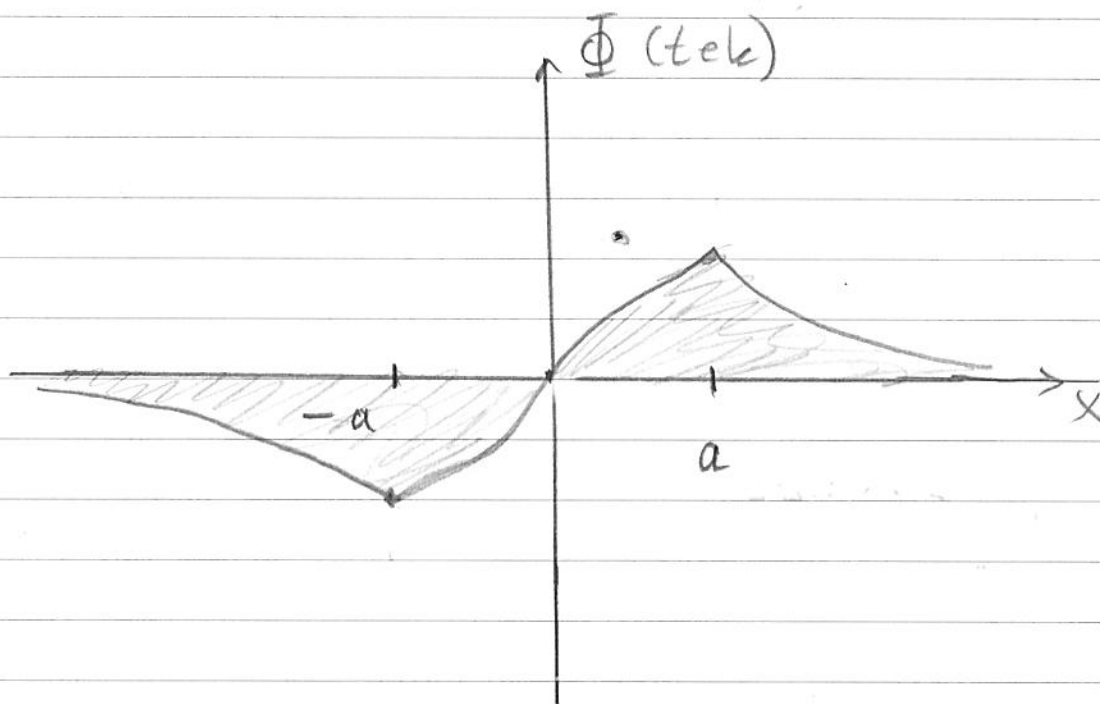
$$\Phi_{III} = A e^{-\alpha x}$$

$$C_1 = \frac{A e^{-\alpha a}}{\cosh \alpha a}$$



$$\frac{a}{a_0} \approx 1.02$$

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{2mV_0}$$



EK

$$\frac{a}{a_0} \frac{1}{y} = (1 + \tanh y)$$

$$y = \alpha a$$

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{2mV_0}$$

çift fonksiyon
çözümü için
özdeğer denklemi

$$\frac{a}{a_0} \frac{1}{y} = (1 + \coth y)$$

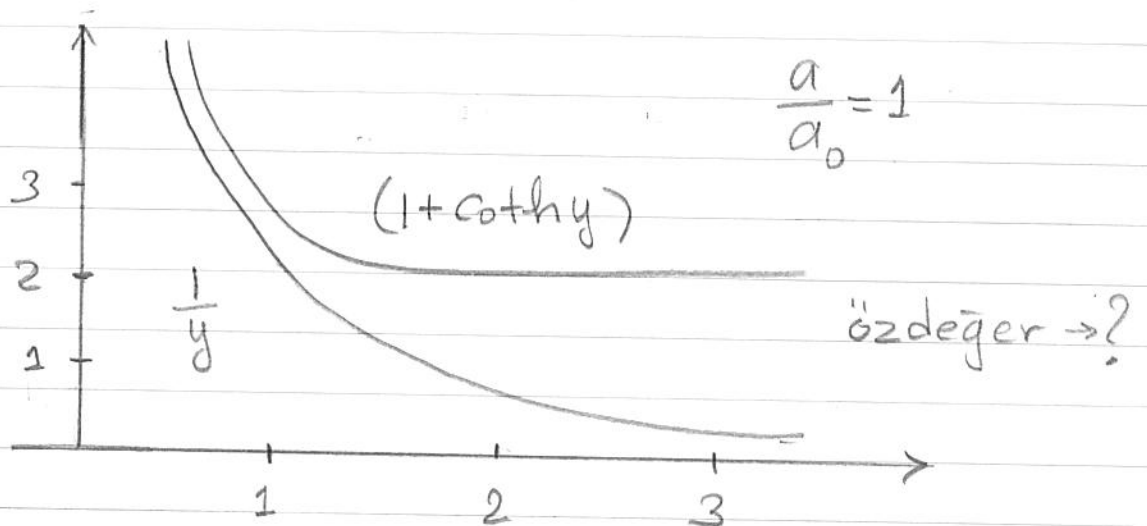
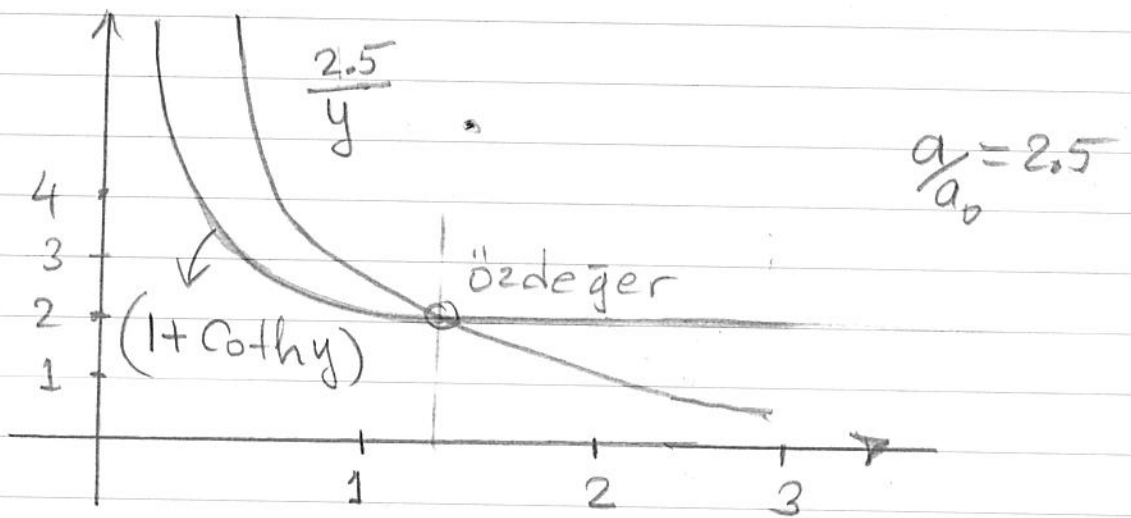
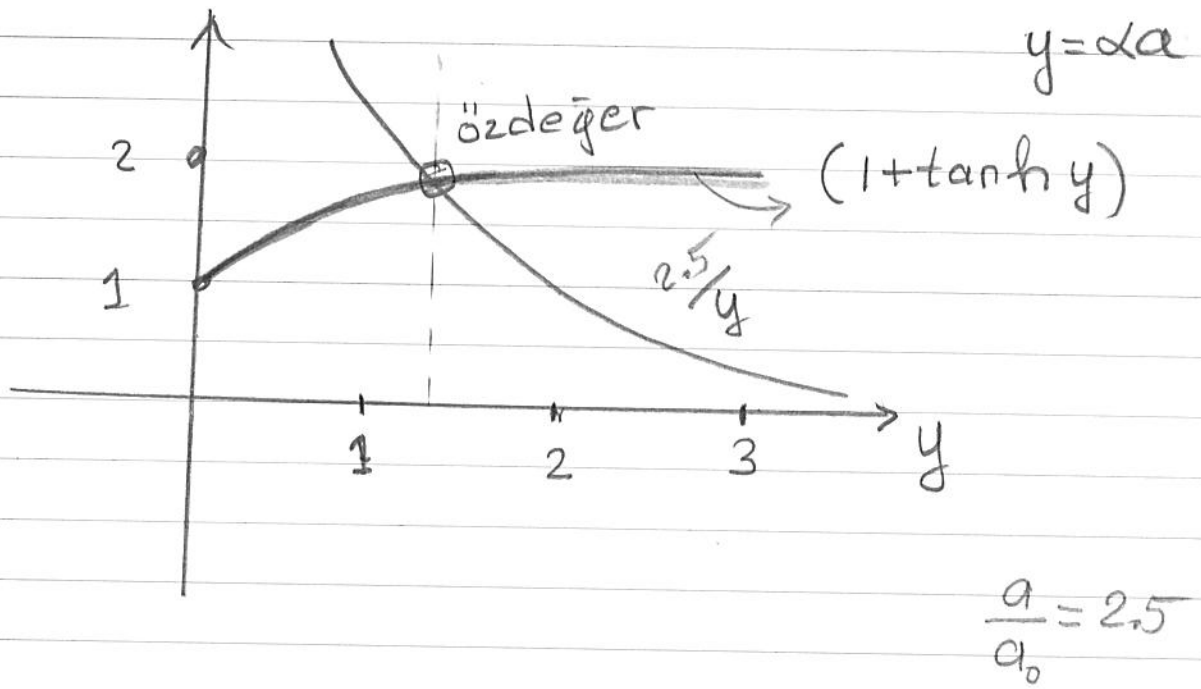
tek fonksiyon çözümü için
özdeğer denklemi

$$\Phi_I(x) = A_1 e^{\alpha x}$$

$$\Phi_{II}(x) = D_1 \sinh \alpha x$$

$$\Phi_{III}(x) = -A_1 e^{-\alpha x}$$

$$D_1 = \frac{-A_1 e^{-\alpha a}}{\sinh \alpha a}$$



Boylandırma :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi|^2 dx = 1$$

Çift fonksiyon çözümü

$$A^{\pm} = \frac{\alpha e^{2\alpha a}}{2} \left[\frac{\cosh 2\alpha a + 1}{\cosh 2\alpha a + \alpha a} \right] = A$$

Tek fonksiyon çözümü

$$A^{\mp} = \frac{\alpha e^{2\alpha a}}{2} \left[\frac{\cosh 2\alpha a - 1}{\sinh 2\alpha a - \alpha a} \right] = A_1$$

Bölüm-6

Spin; Fermiyonlar ve Bozonlar

Klasik fizikte açısal momentum

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (3\text{-boyutta tanımlı})$$

Atomların elektronlarında
açısal momentum (Yörüngesel kısım)
kuantumludur. 3-Boyutta:

$$|\vec{L}| = \sqrt{l(l+1)} \hbar \quad l=0, 1, 2, 3, \dots$$

l : Yörüngesel açısal momentum kuantum sayısı

$\hbar$: (enerji - zaman): açısal momentum boyutu

Yörüngesel açısal momentum uzaya bağlıdır.

İç Açısal Momentum: Spin

Uzaydan bağımsız



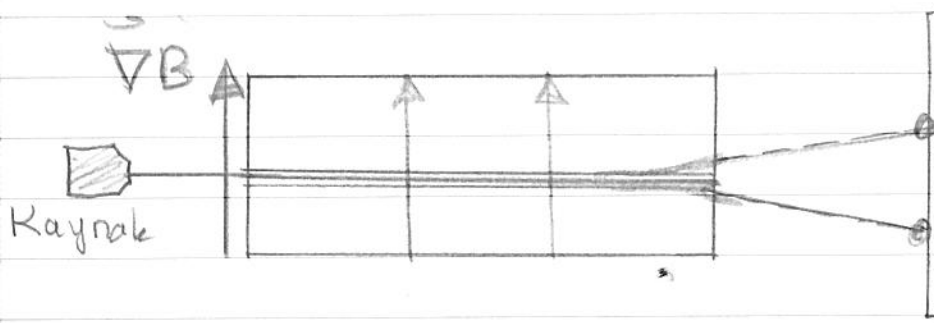
$$|\vec{S}| = \sqrt{s(s+1)} \hbar$$

s : spin kuantum sayısı

Durgun sistemde
parçacık

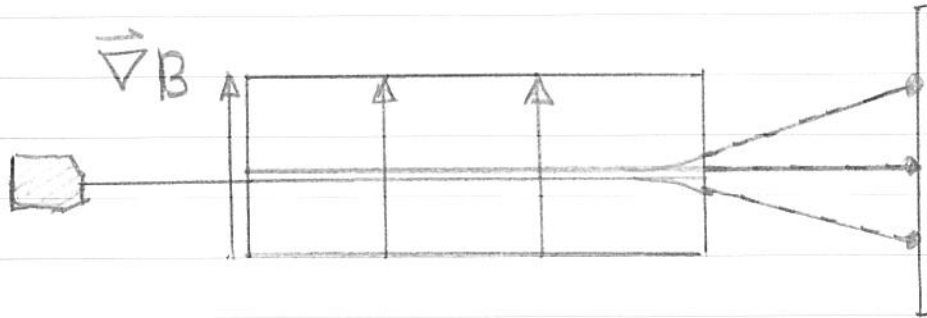
Spin	parçacık
0, 1, 2 .	Bozonlar
$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$	Fermiyonlar

Stern - Gerlach Deneyi



Elektronlar
spin = $\frac{1}{2}$

$$|\vec{S}| = \sqrt{\frac{3}{4}} \hbar$$



Bozonlar
spin = 1

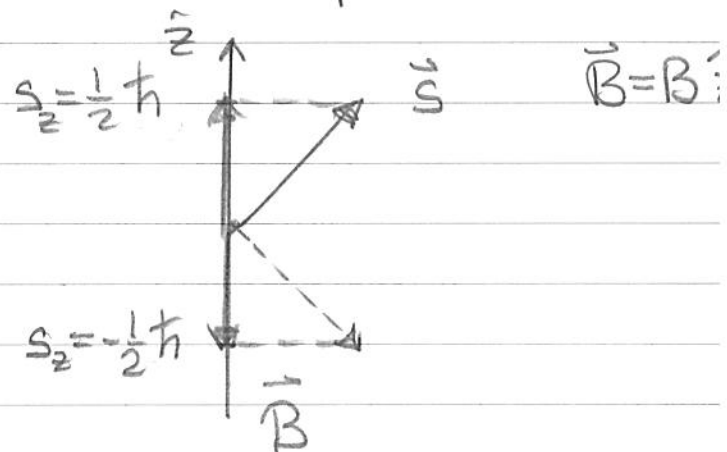
- Spinin klasik fizikte karşılığı yoktur. Sadece kuantum fizikine özgüdür.
- Her parçacığın sadece bir tane spin kuantum sayısı vardır.

Manyetik alan içinde Spin

$$s = \frac{1}{2}$$

$$S_z = m_s \hbar$$

$$m_s = \pm \frac{1}{2}$$



m_s : manyetik kuantum sayısı

$$s = \frac{3}{2}$$

$$m_s = \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{1}{2}$$

$$|\vec{S}| = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{5}{2}\right)} \hbar$$

$$s = 1$$

$$m_s = \pm 1, 0$$

$$|\vec{S}| = \sqrt{2} \hbar$$

Fermiyonlar : elektron, proton, nötron

Pauli Dışarlama İlkesi

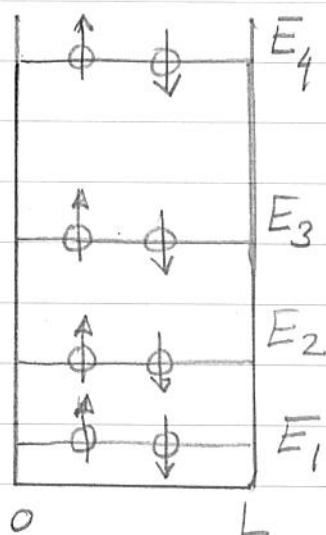
Birden fazla fermiyon (elektron) aynı kuantum durumunda bulunamaz

Pauli ilkesi Evrenin Yapısını Nasıl Etkiler?

Bir Boyutlu Sonsuz Kuyu:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2mL^2}$$

Kuyuda N_e tane elektron olsun.



Elektronların toplam enerjisi:

$$E_{\text{top}} = \left(\frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \right) N_e$$

Dışarlama ilkesi dikkate alınmaz ise tüm elektronlar temel durumda olur

$$E_{\text{top}} = 2 \sum_{n=1}^{N_{\text{max}}} E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{mL^2} \sum_{n=1}^{N_{\text{max}}} n^2, \quad N_{\text{max}} = \frac{N_e}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{N_{\text{max}}} n^2 = \frac{N_{\text{max}}(N_{\text{max}}+1)(2N_{\text{max}}+1)}{6} \approx \frac{N_{\text{max}}^3}{3} \quad N_{\text{max}} \gg 1$$

$$E_{top} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{mL^2} \left(\frac{N_{mx}^3}{3} \right) = \boxed{\frac{\hbar^2 \pi^2}{24 mL^2} N_e^3} \quad \text{Dışarlama ilkesi ile}$$

Elektron başına ortalama enerji

$$\bar{E} = \frac{E_{top}}{N_e} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{24 mL^2} N_e^2$$

Dolu olan son düzeyin enerjisi

$$E_F = \frac{\hbar^2 \pi^2 N_{mx}^2}{2 mL^2} = \boxed{\frac{\hbar^2 \pi^2}{8 mL^2} N_e^2} \quad (\text{Fermi enerjisi})$$

$$\bar{E} = \frac{E_F}{3}$$

PDI: Pauli Dışarlama İlkesi

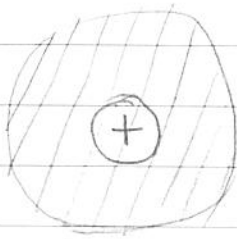
$$\frac{E_{top}(\text{PDI ile})}{E_{top}(\text{PDI yok})} \sim \frac{N_e^2}{12}$$

3-B için toplam enerji

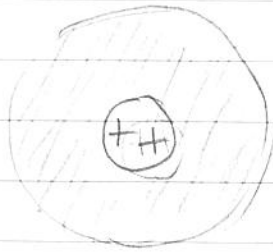
$$E_{top} = \frac{\hbar^2 \pi^3}{10 m V^{2/3}} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{5/3} N_e^{5/3}$$

$$\frac{E_{top}(\text{PDI ile})}{E_{top}(\text{PDI yok})} \sim \boxed{N_e^{2/3}}$$

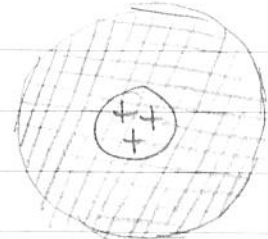
Atomların Kabuk Yapısı:



1 elektronlu Atom

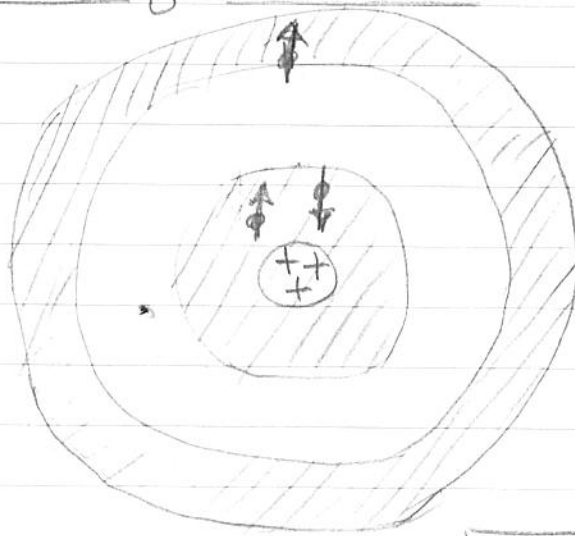


2 elektronlu Atom



3 elektronlu Atom

PDI Yoksa



3-elektronlu Atom

PDI ile

Metallerde Elektron Basıncı

$$P(V) = - \frac{\partial E_{top}}{\partial V} \quad \frac{P_e(PDI)}{P_e(PDI)} \approx N_e^{\frac{2}{3}} \approx 10^{15} \text{ V}$$

$$n_e = 2,6 \times 10^{22} \frac{1}{\text{cm}^3} \quad (\text{Na - isin})$$

$$B = V \frac{\partial P_e}{\partial V} = \frac{5}{3} P_e \quad (\text{Bulk Modülüs})$$

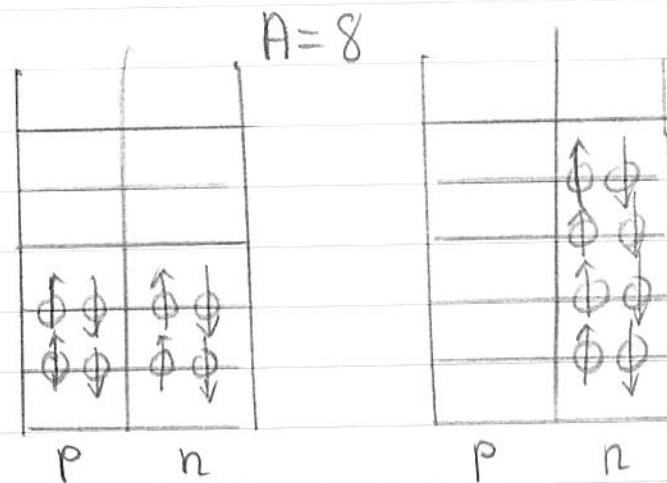
Sıkıştırılabilirlik / sertlik

— o —

Atom Çekirdeklerinde Toplam Enerji ve Kararlılık

$$A = Z + N$$

$Z \approx N$ durumu
en düşük toplam
enerjiye sahip.



Astrofizik

Beyaz Cüce

Bir yıldızın kütle çekim öz enerjisi

$$V_G = -\frac{3}{5} \frac{GM_*^2}{R}$$

Kütle çekimi nedeni ile gökmeyi engelleyen basınç termo-nükleer füzyon ile oluşan sıcak gazların termal basıncıdır. Dışarıya EM ışıma ve nötrinolar yayılır.

Termo-nükleer füzyon sona erdiğinde (Yıldızın yakıtı biterse) yıldız isine gökmeye başlar.

Yıldızın gökme basıncı kütle çekimi kuvveti veya potansiyel enerjisinden hesaplanır:

$$P_G = \frac{F_G}{A} = \frac{-dV_G/dR}{4\pi R^2} = -\frac{dV_G}{d\Omega}$$

$$\Omega = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$P_G = -\frac{1}{5} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \frac{GM_*^2}{\Omega^{4/3}}$$

Bu gökmeye karşı serbest elektronların oluşturduğu basıncı elektronların toplam enerjisinden (PDI ile) hesaplayalım:

$$E_{\text{top}} = \frac{\hbar^2 \pi^3}{10m_e} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{5/3} \frac{N_e^{5/3}}{\Omega^{2/3}}$$

$$P_E = - \frac{dE_{top}}{d\Omega} = \frac{\hbar^2 \pi^3}{15 m_e} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{5/3} \frac{N_e^{5/3}}{\Omega^{5/3}}$$

Elektron basıncı dışarıya doğru olduğundan çökmeyi durdurabilir.

$P_G + P_E = 0$ olduğunda çökme durur.

Bu koşul ile çökmenin durduğu yıldızın yarıçapı bulunur.

$$R = \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2 N_e^{5/3}}{m_e G M_*^2}$$

Yıldızın hidrojenden oluştuğunu varsayalım. Proton sayısı elektron sayısına eşit olacak

$$N_e = N_p$$

$$M_* = N_p m_p$$

$$N_p = N_e = \frac{M_*}{m_p}$$

$$R = \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m_e m_p^{5/3} G M_*^{1/3}}$$

$$M_* = 2 M_\odot \text{ olsun}$$

$$M_\odot = \text{Güneş Kütlesi}$$

$$M_\odot \approx 2 \times 10^{30} \text{ kg} \rightarrow N_p = \frac{M_*}{m_p} = 2.5 \times 10^{57}$$

$$R_{WD} \approx 1.8 \times 10^4 \text{ km}$$

$$R_E = 0.6 \times 10^4 \text{ km}$$

Dünya yarıçapı

Kütle yoğunluğu

$$\rho_{WD} \approx 2 \times 10^5 \text{ gr/cm}^3 = 200 \text{ kg/cm}^3$$

Eğer PDI kullanılmıyaydı

$$\frac{P_e(\text{PDI})}{P_e(\text{PDI})} \approx N_e^{2/3} \approx 2 \times 10^{38}$$

$$R_{\text{WD}} \approx 10^{-34} \text{ cm} \quad \text{olurdu.}$$