

I. DİFERENSİYAL DENKLEMLERİN SERİ ÇÖZÜMÜ

1.1. Frobenius Yöntemi :

Bir çok özel fonk.

$$P(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + Q(x) \frac{dy}{dx} + R(x) y = 0 \quad 1.1$$

denk. inin çözümlerinin incelenmesinde ortaya çıkar. Bir kendinizi

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x q(x) \frac{dy}{dx} + r(x) y = 0 \quad 1.2$$

tipi denklemlere kısıtlayacağız. ($q(x)$ ve $r(x)$ x 'in kuvvet serisine açılabilir olsun)

$$q(x) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m x^m \quad 1.3$$

$$r(x) = \sum_{m=0}^{\infty} r_m x^m \quad 1.4$$

Ve bu seriler $x=0$ ile x 'in bazı bölgeleri için yakınsaın. Frobenius yönteminin temeli 1.2 denk. ve görün şeklindedir :

$$Z(x, s) = x^s (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{s+n} \quad 1.5$$

$$a_0 \neq 0$$

$$\frac{dz}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s+n) x^{s+n-1}$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s+n)(s+n-1) x^{s+n-2}$$

z 'nin 1.2 'yi sağlanmasını istiyoruz.

$$x^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + x q(x) \frac{dz}{dx} + r(x) z = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s+n)(s+n-1) x^{s+n} + q(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s+n) x^{s+n} + r(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{s+n} = 0$$

$q(x)$ ve $r(x)$ serileri yekine kamlı ise,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (s+n)(s+n-1) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n q_m (s+n) x^{n+m} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n r_m x^{n+m} = 0$$

1.6

" x 'in her kuvvetinin katsayısı sıfır olmalıdır".

x^0 $m=0$ ve $n=0$ 'dan gelir

$$a_0 s(s-1) + a_0 q_0 s + a_0 r_0 = 0$$

1.7.

x^1 1. terimde $n=1$ 2. ve 3. de $n+m=1$ [$n=0, m=1$ veya $n=1, m=0$.]

$$a_1 (s+1)s + \{a_1 q_0 (s+1) + a_0 q_1 s\} + \{a_1 r_0 + a_0 r_1\} = 0$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \quad (1. \text{ terimde } n=i \quad \text{ve} \quad 3. \text{ de } n+m=i) \quad \begin{cases} n=i & m=0 \\ n=i-1 & m=1 \\ \vdots & \vdots \\ n=0 & m=i \end{cases}$$

$$a_i (s+i) (s+i-1) + \{ a_i q_0 (s+i) + a_{i-1} d_1 (s+i-1) + a_{i-2} q_2 (s+i-2) + \dots + a_0 q_i s \}$$

$$+ \{ a_i r_0 + a_{i-1} r_1 + \dots + a_0 r_i \} = 0 \quad i \geq 1 \quad 1.9$$

$$a_i f(s+i) + \{ a_{i-1} q_1 (s+i-1) + a_{i-2} q_2 (s+i-2) + \dots + a_0 q_i s \}$$

$$+ \{ a_{i-1} r_1 + \dots + a_0 r_i \} = 0 \quad i \geq 1 \quad 1.10$$

$$f(s+i) = r_0 + q_0 (s+i) + (s+i) (s+i-1) \quad 1.11$$

1.7. den

$$a_0 \{ s^2 + (q_0 - 1)s + r_0 \} = 0$$

$$a_0 \neq 0 \Rightarrow s^2 + (q_0 - 1)s + r_0 = 0 \quad \text{inadisel denklemin.} \quad 1.12$$

Köhleni: s_1 ve s_2 olam. Bunlar genelde gerçektir ve

$$s_2 \geq s_1 \text{ olam.}$$

$$f(s+i) = (s+i)(s+i-1) + a_0(s+i) + r_0$$

$$\Rightarrow f(s) = s(s-1) + a_0 s + r_0$$

$$= s^2 + (a_0 - 1)s + r_0$$

$$= (s - s_1)(s - s_2)$$

1.13.

s_1 ve $s_2 \rightarrow$ dif. denklemin bağımsız iki çözümüne götürür.

Bazı özel durumlar hariç bu doğrudur. Bu özel durumlar;

a) indirgenmiş denklemin iki kökü eşitse $s_1 = s_2$

b) " " " " " bir katsayı kadar farklı ise

1.10'dan a_i 'leri a_0 cinsinden bulalım.

$i=1$ için

$$a_1 f(s+1) + a_0 q_1 s + a_0 r_1 = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{-a_0(q_1 s + r_1)}{f(s+1)} = \frac{a_0 h_1(s)}{f(s+1)} \quad 1.14.$$

$$h_1(s) = -(q_1 s + r_1)$$

s 'ye göre 1. dereceden bir polinom.

$i=2$ için,

$$a_2 f(s+2) + \{a_1 q_1(s+1) + a_0 q_2 s\} + \{a_1 r_1 + a_0 r_2\} = 0$$

$$a_2 f(s+2) + \left\{ a_0 \frac{h_1(s)}{f(s+1)} q_1(s+1) + a_0 q_2 s \right\} + \left\{ a_0 \frac{h_1(s)}{f(s+1)} + a_0 r_2 \right\} = 0$$

$$a_2 = \frac{-a_0 \{q_1(s+1)h_1(s) + q_2 s f(s+1) + r_1 h_1(s) + r_2 f(s+1)\}}{f(s+1) f(s+2)}$$

$$= a_0 \frac{h_2(s)}{f(s+1) f(s+2)}$$

$$h_2(s) = \{q_1(s+1)h_1(s) + q_2 s f(s+1) + r_1 h_1(s) + r_2 f(s+1)\}$$

genel olarak

$$a_i = a_0 \frac{h_i(s)}{f(s+1) f(s+1) \dots f(s+i)} \quad \text{1.16.}$$

→ s 'ye göre bir polinom.

1.16. 'da $s=s_1$ koyarsak a_i 'ler a_0 'ler alınarak elde edilir. ve a_0 keyfi bir sbr olarak kalır. Benzer şekilde $s=s_2$ koyarsak ikinci görünülür. Bu ancak 1.16. nın paydan sıfırdan farklı ise doğrudur.

$$f(s_1+i) \neq 0$$

$$f(s_2+i) \neq 0$$

i : tam sayı.

1.17.

$$f(s) = (s-s_1)(s-s_2)$$

$$f(s+i) = (s-s_1+i)(s-s_2+i)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(s_1+i) = i(s_1-s_2+i) \\ f(s_2+i) = i(s_2-s_1+i) \end{cases} \quad 1.18.$$

$s_2 - s_1$ pozitif tamsayı değil ise (1.17) geçerli olur.

Kökler bir tamsayı kadar farklı ise ; yukarıdaki yöntem büyük kök için geçerlidir : $s_2 - s_1 = r$ (r : pozitif tamsayı)

$$f(s_1+i) = i(-r+i) \quad 1.19$$

$$f(s_2+i) = i(r+i) \quad 1.20$$

olur ve $i=r$ için

$$f(s_1+r) = 0$$

$$f(s_2+r) \neq 0 \quad \text{her pozitif tam } i \text{ için}$$

Sürec $s = s_2$ için gelişir ($s = s_1$ için değil.)

2. kök nasıl bulunur?

s' 'nin değeri sabitleştirmeden önce 1.16'ya kullanarak

$$Z(x,s) = a_0 x^s \left\{ 1 + \frac{h_1(s)}{f(s+1)} x + \frac{h_2(s)}{f(s+1)f(s+1)} x^2 + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{h_i(s)}{f(s+1) \dots f(s+i)} x^i + \dots \right\} \quad 1.21.$$

Her terim iyi tanımlı ise, $\ln z(x, s)$

$$x^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + x q(x) \frac{dz}{dx} + r(x) z = a_0 f(s) x^s \quad 1.22.$$

denklemini sağlamalıdır.

$$\left\{ x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x q(x) \frac{d}{dx} + r(x) \right\} z(x, s) = a_0 f(s) x^s \quad 1.22.$$

1.21. 'in RHS'daki bütün terimler $s = s_1$ için iyi tanımlı değildir zira, $i \geq r$ için payda sıfır olan terimler vardır. Ancak, $z(x, s)$ 'yi $f(s+r)$ ile çarparak $s = s_1$ de sıfır olan terimleri yok ederiz.

$$f(s+r) = (s+r-s_1)(s+r-s_2) = (s+s_2-2s_1)(s-s_1)$$

Sadece $s-s_1$ ile de çarpabiliriz. Bu çarpım x den bağımsız olduğundan, 1.22 denklemini

$$\begin{aligned} \left\{ x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x q(x) \frac{d}{dx} + r(x) \right\} (s-s_1) z(x, s) &= a_0 (s-s_1) f(s) x^s \\ &= a_0 (s-s_1)^2 (s-s_2) x^s \end{aligned} \quad 1.23.$$

$s = s_2$ koyarsak

$$\left\{ x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x q(x) \frac{d}{dx} + r(x) \right\} (s_2-s_1) z(x, s_2) = 0$$

Ölür ki bu da $z(x, s_2)$ 'nin bir görünüm olduğunu gösterir. Benzer şekilde, $s = s_1$ koyarak $[(s-s_1)z(x, s)]_{s_1}$ görünümünü elde eder ki bu $z(x, s_2)$ den bağımsız değil, onun bir katıdır.

1.23. 'ün her iki yanını s 'ye göre türettirsek

$$\left\{ x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x(q(x)) \frac{d}{dx} + r(x) \right\} \left[\frac{d}{ds} \{ (s-s_1) z(x,s) \} \right] \\ = a_0 \left[(s-s_1)^2 \frac{d}{ds} \{ (s-s_2) x^s \} + 2(s-s_1)(s-s_2) x^s \right] \quad 1.24$$

$s = s_1$ olduğunda denk. in sağ yan sıfır'dır. Böylece

$$\frac{d}{ds} \{ (s-s_1) z(x,s) \} \Big|_{s=s_1}$$

diff. denk. in bir çözümüdür. Bu çözüm ilkelde bağımsızdır.

Böylece bağımsız çözümler;

$$\left[(s-s_1) z(x,s) \right]_{s=s_1} \quad 1.25.$$

$$\left[\frac{d}{ds} \{ (s-s_1) z(x,s) \} \right]_{s=s_1} \quad 1.26.$$

Diğer bir durum, indisel denklemin köhleri tam sayı kadar

farklı olduğunda sıkar. $s = s_1$ ve $i=r$ için $f(s+i)=0$,

$h_r(s_1)=0$ olabilir. Bu durumda ar belirsizdir. Bunun diğer

keyfi sbt olarak kullanabiliriz, böylece bir seriden iki bağımsız çözüm elde ederiz.

Geri kalan durum, indirijel denklemin köhleri eşit olduğunda ortaya çıkar: $S = S_1$ diyelim. $f(s) = (s - s_1)^2$ olsun. 1.27'yi kullanarak

$$\left\{ x^2 \frac{d^2}{dx^2} + xq(x) \frac{d}{dx} + r(x) \right\} z(x, s) = a_0 (s - s_1)^2 x^s \quad 1.27.$$

$S = S_1$ koyarsak $RHS = 0$ olur ve $z(x, s_1)$ bir çözümdür. Ancak her iki yan s' 'ye göre türetilir ise,

$$\left\{ x^2 \frac{d^2}{dx^2} + xq(x) \frac{d}{dx} + r(x) \right\} \left[\frac{d}{ds} z(x, s) \right] = a_0 \left\{ z(s - s_1) x^s + (s - s_1)^2 \frac{d}{ds} x^s \right\} \quad 1.28.$$

Çünkü $S = S_1$ için sağ yan sıfırdır. ve böylece

$$\left\{ \frac{d}{ds} z(x, s) \right\}_{s=s_1}$$

bir çözümdür. Bu $z(x, s_1)$ 'den bağımsız olarak gösterilebilir.

Böylece bağımsız iki çözüm elde etmiş oluruz.

$$z(x, s_1)$$

1.29.

$$\left[\frac{d}{ds} z(x, s) \right]_{s=s_1}$$

ÖZET:

1.10 bağıntısı ile $Z(x, s)$ serisini oluştururuz. O zaman 4 farklı durum vardır.

- (1) İndisel denk. in s_1 ve s_2 kökleri farklı ve farklı tam sayı değİLse, iki bağımsız çözüm

$$Z(x, s_1), Z(x, s_2)$$

- (2) Eğer s_1 ve s_2 ($s_2 > s_1$) kökleri bir tam sayı kadar farklı ise $Z(x, s)$ için seradaki katsayılarından biri $s = s_1$ olduğunda sıfır ise, iki bağımsız çözüm

$$[(s - s_1) Z(x, s)]_{s_1} \text{ ve } \left[\frac{d}{ds} \{ (s - s_1) Z(x, s) \} \right]_{s_1}$$

- (3) Eğer s_1 ve s_2 ($s_2 > s_1$) kökleri bir tam sayı kadar farklı ve $Z(x, s)$ için seradaki katsayılarından biri, or. d. belirlen $s = s_1$ için belirsiz ise; $Z(x, s_1)$ den q_0 ve r_1 lerini keyfi s.b.t. ler olarak tutarak iki bağımsız çözüm elde edilir.

- (4) İndisel denklemin kökleri eşit ise, $s = s_1$ d. belirlen, İki bağımsız çözüm

$$Z(x, s_1)$$

$$\left[\frac{d}{ds} Z(x, s) \right]_{s_1}$$

ile verilir.

~~Örnek 4~~

$$x^2 y'' + (x^3 - 2x) y' + 2xy = 0$$

(1)

$$q(x) = x^2 - 2 \quad r(x) = +2$$

$$\begin{cases} a_0 (s-2)(s-1) = 0 \\ a_1 (s-1)s = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$-i_n (s+n-2)(s+n-1) + a_{n-2}(s+n-2) = 0 \quad n \geq 2$$

$s_1 = 1 \quad s_2 = 2 \quad s_1 = 1$ için (*) denklemini a_1 ne olarak olsun sağlanır, aynı $a_1 \rightarrow$ belirsiz. İki bağımsız çözüm $s_1 = 1$ den bulunabilir.

$$a_n = - \frac{a_{n-2}}{(s+n-1)} \quad n \geq 2$$

$$s_1 = 1 \text{ için,}$$

$$s_2 = -\frac{a_0}{2}, \quad a_4 = -\frac{a_2}{4} = -\frac{a_0}{2 \cdot 4}, \dots$$

$$a_3 = -\frac{a_1}{3}, \quad a_5 = -\frac{a_3}{5} = \frac{a_1}{3 \cdot 5}, \dots$$

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}$$

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{a_1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}$$

$$Z(x, s) = a_0 x^s \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + a_1 x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} \quad (2)$$

$$\cancel{Z(x, 1)} = x \left\{ a_0 \right\}$$

$$Z(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{n+s+1}$$

$$= x^s \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} \right\}$$

$$Z(x, 1) = x \left\{ a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} x^{2n} \right] \right.$$

$$\left. + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)} \right\}$$

$$y(x) = A y_1(x) + B y_2(x)$$

$$y_1(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}$$

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}$$

(3)

Örnek 5. $(x^2-1)y'' + 3xy' + xy = 0$

$$q(x) = \frac{3x^2}{x^2-1} \quad r(x) = x^3 \quad |x| < 1$$

$\sum_{n=2}^{\infty} a_n s(s-1) = 0$ } $s=0$ için a_1 belirsiz.

$$a_1 s(s+1) = 0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \underline{\underline{X}}$$

$$\rightarrow a_0 s(s+1) - a_2 (s+2)(s+1) = 0 \Rightarrow a_2 = 0 \quad \underline{\underline{X}}$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_{n-2} (n+s-2)(n+s-3) - a_n (n+s)(n+s-1) + 3a_{n-2} (n+s-1) \\ + a_{n-3} = 0 \end{aligned} \right.$$

$$a_{n-3} + a_{n-2} (n+s-2)(n+s-3) - a_n (n+s)(n+s-1) = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s)(n+s-1) X^{n+s} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s)(n+s-1) X^{n+s-2}$$

$$+ 3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s) X^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^{n+s+1} = 0$$

$$\underline{\underline{X}} \rightarrow n-2$$

$$\underline{\underline{X}} \rightarrow n-3$$

$$\rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} (n+s-2)(n+s-3) X^{n+s-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s)(n+s-1) X^{n+s-2}$$

$$+ 3 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} (n+s-2) X^{n+s-2} + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3} X^{n+s-2} = 0$$

(4)

$$X \cdot a_0 s(s+1) - a_0 s(s-1) X^{-2} - a_1 (s+1) s X^{-1}$$

$$- a_2 (s+2)(s+1) X^0 + 3 a_0 (s-2) X^{-2}$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty} [a_{n-2} (n+s-2)(n+s-3) - a_n (n+s)(n+s-1) + 3 a_{n-2} (n+s-2) + a_{n-3}] X^{n-2} = 0$$

$$a_0 s(s-1) + a_2 (s+1)(s+2) = 0 \quad \underline{\underline{X}}$$

$$a_1 s(s+1) = 0 \quad \underline{\underline{X}}$$

$$a_0 s(s-1) = 0 \quad \underline{\underline{X}}$$

$$a_n = \frac{a_{n-3} + n(n-2) a_{n-2}}{n(n-1)}$$

$$a_3 = \frac{a_0 + 3a_1}{6} = \frac{1}{6} a_0 + \frac{1}{2} a_1$$

$$a_4 = \frac{a_1 + 8a_2}{12} = \frac{1}{12} a_1$$

$$a_5 = \frac{a_2 + 15a_3}{20} = \frac{1}{8} a_0 + \frac{3}{8} a_1$$

$$y = a_0 + a_1 X + \left(\frac{1}{6} a_0 + \frac{1}{2} a_1 \right) X^3 + \frac{1}{12} a_1 X^4$$

$$+ \left(\frac{1}{8} a_0 + \frac{3}{8} a_1 \right) X^5$$

$$= a_0 \left\{ 1 + \frac{1}{6} X^3 + \frac{1}{8} X^5 + \dots \right\} + a_1 \left\{ X + \frac{X^3}{2} + \frac{1}{12} X^4 + \dots \right\}$$

ÖRNEK 10) $2x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{x}{2} \frac{dy}{dx} + \frac{x}{2} y = 0$$

$$q(x) = \frac{1}{2} \quad r(x) = \frac{1}{2} x$$

$$z = x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{s+n}$$

$$z' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s+n) x^{s+n-1}; \quad z'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s+n)(s+n-1) x^{s+n-2}$$

$$\Rightarrow 2x \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{dz}{dx} + z = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n (s+n)(s+n-1) x^{s+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s+n) x^{s+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{s+n} = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{s+n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{s+n-1} = 0 \quad (1.30)$$

$$(*) \quad 2a_0 s(s-1) + a_0 s = 0 \quad n=0 \quad (1.31)$$

$$(*) \quad 2a_n (s+n)(s+n-1) + a_n (s+n) + a_{n-1} = 0 \quad n \geq 1 \quad (1.32)$$

$$a_0 s [2(s-1) + 1] = 0$$

$$\boxed{a_0 s (2s-1) = 0} \quad (1.33)$$

$$a_0 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} s=0 \\ s=1/2 \end{cases}$$

$$a_n (s+n) [2(s+n-1)+1] + a_{n-1} = 0$$

$$a_n (s+n) [2(s+n) - 1] + a_{n-1} = 0$$

$$a_n = - \frac{a_{n-1}}{(s+n)[2(s+n)-1]} \quad n \geq 1 \quad 1.35.$$

$$\Rightarrow a_1 = - \frac{a_0}{(s+1)(2s+1)}; \quad a_2 = - \frac{a_1}{(s+2)(2s+3)} = \frac{a_0}{(s+1)(s+1)(2s+1)(2s+3)}$$

$$a_3 = - \frac{a_2}{(s+3)(2s+5)} = - \frac{a_0}{(s+1)(s+2)(s+3)(2s+1)(2s+3)(2s+5)}$$

$$a_n = (-1)^n \frac{a_0}{(s+1)(s+2)\dots(s+n)(2s+1)\dots(2s+2n-1)}$$

$$Z(x, s) = a_0 x^s \left\{ 1 - \frac{1}{(s+1)(2s+1)} x + \dots + (-1)^n \frac{1}{(s+1)(s+2)\dots(2s+1)\dots(2s+2n-1)} x^n + \dots \right\} \quad 1.36.$$

$$Z(x, 0) = a_0 \left\{ 1 - \frac{x}{1 \cdot 1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} \right\}$$

$$Z(x, \frac{1}{2}) = a_0 x^{1/2} \left\{ 1 - \frac{x}{\frac{3}{2} \cdot 2} + \frac{x^2}{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 2 \cdot 4} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \dots \frac{2n+1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} + \dots \right\}$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n!$$

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (2n-1) \cdot 2n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} = \frac{2n!}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot 2^n n!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \dots \frac{2n+1}{2} = \frac{1}{2^n} 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1) = \frac{1}{2^n} \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots \overset{2n}{(2n+1)}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}$$

$$= \frac{1}{2^n} \frac{(2n+1)!}{2^n n!} = \frac{(2n+1)!}{2^{2n} n!}$$

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n = 2^n n!$$

$$z(x, 0) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n! \left\{ (2n)! / 2^n n! \right\}} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^n}{(2n)!} \quad 1.43.$$

$$z(x, \frac{1}{2}) = a_0 x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\left\{ (2n+1)! / (2^{2n} n!) \right\} 2^n n!}$$

$$= a_0 x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^n}{(2n+1)!}$$

$$y = A \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^n}{(2n)!} + B x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^n}{(2n+1)!}$$

7

Örnek 2.

$$x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + (1-x) \frac{dy}{dx} - y = 0$$

$$x^2 y'' + x y' - \frac{x}{1-x} y = 0 \quad q(x) = 1 \quad r(x) = -\frac{x}{1-x} \quad |x| < 1 \text{ için yakınsak}$$

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{s+n} \quad z' = \sum_n a_n (s+n) x^{s+n-1} \quad z'' = \sum_n a_n (s+n)(n+s-1) x^{s+n-2}$$

$$(x-x^2)z'' + (1-x)z' - z = 0$$

$$= \sum_n a_n (s+n)(s+n-1) x^{s+n-1} - \sum_n a_n (s+n)(s+n-1) x^{s+n}$$

$$+ \sum_n a_n (s+n) x^{s+n-1} - \sum_n a_n (s+n) x^{s+n} - \sum_n a_n x^{s+n}$$

~~z = 0~~

$$= \sum_n a_n (s+n)(s+n-1) x^{s+n-1} + \sum_n a_n (s+n) x^{s+n-1}$$

$$- \sum_{n=1} a_{n-1} (s+n-1)(s+n-2) x^{s+n-1} - \sum_{n=1} a_{n-1} (s+n-1) x^{s+n-1} - \sum_{n=1} a_{n-1} x^{s+n-1}$$

$$= a_0(s)(s-1)x^{s-1} + a_0(s)x^{s-1}$$

$$+ \sum_{n=1} \left\{ a_n (s+n)(s+n-1) + a_n (s+n) - a_{n-1} (s+n-1)(s+n-2) - a_{n-1} (s+n-1) - a_{n-1} \right\} x^{s+n-1} = 0$$

$$a_0 s(s-1) + a_0 s = 0$$

$$a_n (s+n)(s+n-1) - a_{n-1} (s+n-1)(s+n-2) + a_n (s+n) - a_{n-1} (s+n-1) - a_{n-1} = 0 \quad n \geq 1$$

$$a_0 s^2 = 0 \Rightarrow s_1 = s_2 = s = 0$$

$$a_n = a_{n-1} \frac{[(s+n-1)^2 + 1]}{(s+n)^2}$$

köşer eşit ilü bağımsız görünüm $z(x, s) \left[\frac{d}{ds} (z(x, s)) \right]_{s=0}$

$$a_1 = a_0 \frac{(s^2+1)}{(s+1)^2} \quad a_2 = a_1 \frac{[(s+1)^2+1]}{(s+2)^2} = \frac{(s^2+1)[(s+1)^2+1]}{(s+1)^2(s+2)^2} a_0$$

$$a_n = a_0 \frac{(s^2+1)[(s+1)^2+1][(s+2)^2+1] \dots [(s+n-1)^2+1]}{(s+1)^2(s+2)^2 \dots (s+n)^2}$$

$$z(x, s) = a_0 x^s \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s^2+1)[(s+1)^2+1] \dots [(s+n-1)^2+1]}{(s+1)^2 \dots (s+n)^2} x^n \right]$$

$$z(x, 0) = a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot (1^2+1)(2^2+1) \dots ((n-1)^2+1)}{1^2 \cdot 2^2 \dots n^2} x^n \right]$$

$$= a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \dots [(n-1)^2+1]}{(n!)^2} x^n \right] = a_0 y_1(x)$$

$$\frac{d}{ds} z(x, s) = a_0 \left(\frac{dx^s}{ds} \right) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s^2+1) \dots [(s+n-1)^2+1]}{(s+1)^2 \dots (s+n)^2} \right]$$

$$+ a_0 x^s \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{ds} \frac{(s^2+1) \dots [(s+n-1)^2+1]}{(s+1)^2 \dots (s+n)^2} \right]$$

$$\frac{d}{ds} x^s = \frac{d}{ds} e^{s \ln x} = \ln x \cdot x^s$$

$$\frac{d}{ds} \ln f_n(s) = \frac{1}{f_n(s)} \frac{d}{ds} f_n(s) \Rightarrow \frac{d}{ds} f_n(s) = f_n(s) \frac{d}{ds} \ln f_n(s)$$

$$\ln f_n(s) = \ln(s^2+1) + \ln[(s+1)^2+1] + \dots + \ln[(s+n-1)^2+1] \\ - \ln(s+1)^2 + \ln(s+2)^2 - \dots - \ln(s+n)^2$$

$$\frac{d}{ds} \ln f_n(s) = \sum_{m=1}^n \left\{ \ln[(s+m-1)^2+1] - \ln(s+m)^2 \right\}$$

$$\frac{d}{ds} \ln f_n(s) = \sum_{m=1}^n \frac{2(s+m-1)}{(s+m-1)^2+1} - \sum_{m=1}^n \frac{2}{s+m}$$

$$= 2 \sum_{m=1}^n \left\{ \frac{s+m-1}{(s+m-1)^2+1} - \frac{1}{s+m} \right\}$$

$$\left[\frac{d}{ds} f_n(s) \right] = \frac{2[s^2+1] \dots [(s+n-1)^2+1]}{(s+1)^2 \dots (s+n)^2} \sum_{m=1}^n \left\{ \frac{s+m-1}{(s+m-1)^2+1} - \frac{1}{s+m} \right\}$$

$$\Bigg]_{s=0} = \frac{2[1][1^2+1] \dots [(n-1)^2+1]}{1^2 \dots n^2} \sum_{m=1}^n \left[\frac{m-1}{(m-1)^2+1} - \frac{1}{m} \right] = c_n$$

$$\Rightarrow \left[\frac{d}{ds} z(x, s) \right]_0 = a_0 \ln x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \{1^2+1\} \{2^2+1\} \dots [(n-1)^2+1] x^n}{1^2 \cdot 1^2 \dots n^2} \right] \\ + a_0 \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = a_0 y_1(x) \ln x + a_0 \sum c_n x^n = a_0 y_2(x)$$

$$y = A y_1(x) + B y_2(x)$$

Örnek 3.

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + (3-x)y = 0$$

$$q(x) = -3 \quad r(x) = 3-x \quad (x \text{ 'in bütün değerleri için seri görünümü var.})$$

$$Z(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}$$

$$a_0 (s-1) (s-3) = 0$$

$$a_n (s+n-1) (s+n-3) - a_{n-1} = 0$$

$$s_1 = 1 \quad s_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad s_2 - s_1 = 2 = \text{tam sayı.} \quad s_2 > s_1$$

$$\left[(s-s_1) Z(x, s) \right]_{s_1} \quad \left[\frac{d}{ds} \left\{ (s-s_1) Z(x, s) \right\} \right]_{s_1}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{(s+n-1) (s+n-3)}$$

$$a_1 = \frac{a_0}{s(s-2)}; \quad a_2 = \frac{a_1}{(s+1)(s-1)} = \frac{a_0}{s(s+1)(s-2)(s-1)}$$

$$a_n = \frac{a_0}{s(s+1)(s+2) \dots (s+n-1) (s-2)(s-1) \dots (s+n-3)}$$

$s=1$ için bütün a_n ($n \geq 2$) 'ler 0 olur.

$$Z(x, s) = a_0 x^s \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{s(s+1) \dots (s+n-1) (s-2)(s-1) \dots (s+n-3)} \right\}$$

$$(s-1) Z(x, s) = a_0 x^s \left\{ (s-1) + \frac{(s-1)}{s(s-2)} x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{s(s+1) \dots (s-2)(s)(s+1) \dots} \right\}$$

$$[(s-1)Z(x,s)]_1 = a_0 \times \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n! (n-2)! \cdot 1 \cdot 2 \dots n (\dots) \cdot 1 \cdot 2 \dots (n-2)}$$

$$= a_0 y_1(x) = a_0 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n! (n-2)!}$$

2. Gözüm $\frac{d}{ds} [(s-1)Z(x,s)]_1$ ile bulunur.

$$= a_0 \left(\frac{d}{ds} x^s \right) \left\{ (s-1) + \frac{(s-1)}{s(s-2)} + \sum_{n=2}^{\infty} x^n f_n(s) \right\}$$

$$+ a_0 x^s \left\{ 1 + \frac{d}{ds} \left(\frac{(s-1)}{s(s-2)} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} x^n \underbrace{\frac{d}{ds} f_n(s)}_{f_n(s) \frac{d}{ds} \ln f_n(s)} \right\}$$

$$\ln f_n(s) = -\ln s - \ln(s+1) - \dots - \ln(s+n-1)$$

$$- \ln(s-2) - \ln s - \ln(s+1) - \dots - \ln(s+n-3)$$

$$\frac{d}{ds} \ln f_n(s) = -\left\{ \frac{2}{s} + \frac{2}{s+1} + \dots + \frac{2}{s+n-3} + \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+n-2} + \frac{1}{s+n-1} \right\}$$

$$f_n(s) \Big|_{s=1} = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n (-1) 1 \cdot 2 \dots (n-4)} = -\frac{1}{n! (n-2)!}$$

$$\frac{d}{ds} f_n(s) \Big|_{s=1} = \frac{1}{n! (n-2)!} \left\{ 2 \sum_{m=1}^{n-2} \frac{1}{m} - 1 + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right\}$$

$$\frac{d}{ds} \frac{(s-1)}{s(s-2)} \Big|_{s=1} = -1$$

$$\frac{d}{ds} [(s-1)Z(x,s)] \Big|_{s=1} = a_0 \ln x y_1(x) + a_0 x \left\{ 1 - x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n \right\} = a_0 y_2(x)$$

$$y = A y_1 + B y_2$$

Örnek 4.

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (x^3 - 2x) \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

$$q(x) = x^2 - 2 \quad r(x) = -2 \quad x \text{ 'in bütün değerleri için görülmüş.}$$

$$a_0 (s-2) (s-1) = 0 \quad a_1 (s-1) s = 0 \quad (*)$$

$$a_n (s+n-2) (s+n-1) + a_{n-2} (s+n-2) = 0 \quad n \geq 2$$

$$s_1 = 1, s_2 = 2 \quad s_1 = 1 \text{ için } (*) \text{ denklemi } a_1 \text{ ne olursa olsun}$$

sağlanır. Yani a_1 belirsiz. Bu bağımsız görün $s_1 = 1$ 'den bulunabilir.

$$a_n = - \frac{a_{n-2}}{(s+n-1)} \quad n \geq 2$$

$$s=1 \text{ için } a_n = - \frac{a_{n-2}}{n+1}$$

$$a_2 = - \frac{a_0}{2} ; a_4 = - \frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{2 \cdot 4}$$

$$a_3 = - \frac{a_1}{3} ; a_5 = - \frac{a_3}{5} = \frac{a_1}{3 \cdot 5}$$

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}$$

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{a_1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}$$

$$z(x, 1) = x \left[a_0 \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2 \cdot 4 \dots 2n} \right\} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)} \right]$$

$$y = A y_1(x) + B y_2(x)$$

$$y_1(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$$

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$$

Örnek 5 $(x^2-1)y'' + 3xy' + xy = 0$

$$x^2 y'' + x \underbrace{\frac{3x^2}{x^2-1}}_{|x|<1 \text{ için gelmez.}} y' + \underbrace{\frac{x^3}{x^2-1}}_{|x|<1 \text{ için gelmez.}} y = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} a_0 s(s-1) = 0 \\ a_1 s(s+1) = 0 \end{array} \right\} s=0 \text{ için } a_1 \text{ belirsiz.}$$

$$a_0 s(s+2) - a_2 (s+2)(s+1) = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$

$$a_{n-2} (n+s-2)(n+s-3) - a_n (n+s)(n+s-1) + 3a_{n-1} (n+s-2) + a_{n-3} = 0$$

$$s=0 \Rightarrow a_{n-3} + n(n-2)a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0$$

$$a_n = \frac{a_{n-3} + n(n-2)a_{n-2}}{n(n-1)} \quad n \geq 3$$

$$a_3 = \frac{a_0 + 3a_1}{6} = \frac{1}{6}a_0 + \frac{1}{2}a_1$$

$$a_4 = \frac{a_1 + 8a_2}{12} = \frac{1}{12}a_1$$

$$a_5 = \frac{a_2 + 15a_3}{20} = \frac{1}{8}a_0 + \frac{3}{8}a_1$$

$$y = a_0 + a_1 x + \left(\frac{1}{6} a_0 + \frac{1}{2} a_1 \right) x^3 + \frac{1}{12} a_1 x^4$$

$$+ \left(\frac{1}{8} a_0 + \frac{3}{8} a_1 \right) x^5 + \dots$$

$$= a_0 \left\{ 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{8} + \dots \right\} + a_1 \left\{ x + \frac{x^3}{2} + \dots \right\}$$