

STURM - LIOUVILLE PROBLEMİ

Matematiksel fizikte karşılaşılan diff. denklemlerin çoğu

$$\frac{d}{dx} \left[p_0(x) \frac{dy}{dx} \right] + [p_1(x) + \lambda w(x)] y = 0 \quad (1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada λ x 'den bağımsız bir parametre olup diğerleri x 'in gerçel sürekli fonksiyonu olacaklardır. (1) denkleminin

$$A y(a) + B y'(a) = 0$$

$$C y(b) + D y'(b) = 0$$

sınır şartları altında çözümüne S-L problemi adı verilir.

$A, B, C, D : \rightarrow$ gerçel sayılar.

$$y(a) = 0$$

$$y'(a) = 0$$

ve

özel halleri çok önemlidir.

$$y(b) = 0$$

$$y'(b) = 0$$

⊕ S-L probleminin, açık olmayan (asıkır) çözümleri ancak λ parametresinin bazı özel değerleri için vardır. Bu değerlere S-L probleminin özdeğeri denir. Bu özel değerlere karşı gelen çözüm fonk. larına da problemin ilgili özdeğine karşı gelen öz fonk. lar denir.

(2)

Özellikler:

1. $S-L$ problemine ait λ_n özdeğerleri spektrum denilen, sayılabilir sonsuz bir küme oluşturlar. Ayrıca bunlar $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots \quad n \rightarrow \infty \Rightarrow \lambda_n \rightarrow \infty$ olacak şekilde monoton artan bir dizinin elemanlarıdır.

2. $a \leq x \leq b$ aralığında aynı λ_n özdeğerine karşı gelen iki öz fnk. lineer bağımsızdır.

3. λ_n, λ_m gibi farklı özdeğerlere karşılık gelen $y_n(x)$ $y_m(x)$ gibi iki fnk. $w(x)$ ^(ağırlık fnk. na) göre ortogonaldir'ler, yani,

$$\int_a^b y_n(x) y_m(x) w(x) dx = c_{nm} \delta_{nm}$$

İspat:

$$\frac{d}{dx} \left[p_0(x) \frac{dy_m}{dx} \right] + [p_1(x) + \lambda_m w(x)] y_m = 0 \quad / y_m$$

$$\frac{d}{dx} \left[p_0(x) \frac{dy_n}{dx} \right] + [p_1(x) + \lambda_n w(x)] y_n = 0 \quad / y_m$$

$$y_m \frac{d}{dx} (p_0 y_n') - y_n \frac{d}{dx} (p_0 y_m') + (\lambda_m - \lambda_n) w y_n y_m = 0$$

$$\frac{d}{dx} [p_0 (y_n y_m' - y_m y_n')] = (\lambda_n - \lambda_m) w y_n y_m$$

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b y_n(x) y_m(x) w(x) dx = \rho(x) [y_n y_m' - y_m y_n']_a^b$$

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b y_n(x) y_m(x) w(x) dx = 0$$

$n \neq m$ için $\lambda_n \neq \lambda_m$ ise

$$\int_a^b y_n(x) y_m(x) w(x) dx = 0$$

En genel :

$$\int_a^b y_n(x) y_m(x) w(x) dx = c_{nm} \delta_{nm}$$

40) S-L öz fonk. ları , kendileri ile aynı sınır koşullarını sağlayan bir $A(x)$ fonk.unun bu öz fonk. ları yardımı ile aynı seri gösteriminde kullanılabilirler, yani

$$A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k y_k(x)$$

Bu seri ortalama kararsızlıkta yakınsaktır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left[A(x) - \sum_{k=1}^n a_k y_k(x) \right]^2 w(x) dx = 0$$

(4)

	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$w(x)$	Diff. Denke.	λ
Legendre	$1-x^2$	0	1	$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda+1)y = 0$	$\lambda(\lambda+1)$
Associated Legendre	$1-x^2$	$-m^2/(1-x^2)$	1	$(1-x^2)y'' - 2xy' + [\lambda(\lambda+1) - \frac{m^2}{1-x^2}]y = 0$	$\lambda(\lambda+1)$
Bessel	x	$-n^2/x$	x	$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$	n^2
Laguerre	$x e^{-x}$	0	e^{-x}	$xy'' + (1-x)y' + \alpha y = 0$	α
Associated Laguerre	$x^{k+1} e^{-x}$	0	$x^k e^{-x}$	$xy'' + (k+1-x)y' + \alpha y = 0$	$\alpha - k$
Hermite	e^{-x^2}	0	e^{-x^2}	$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0$	2α

STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

S-L denklemi,

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \lambda r(x)] y = 0 \quad (*)$$

λ : ayarlanma sbt.

p, q, r ; x 'in gerçel değişkenli fonk. ları (p her yerde pozitif.)

$y(x)$: $[a, b]$ ya da (a, b) aralığında tanımlı.

Sınır koşulları: $y(a) = y(b) = 0$ $(**)$

Cözümler: Özfonk. lar ve özdeğerler

$(*)$ ve $(**)$ 'lerin cözümlerinin belirlenmesi ve özellikle y 'nin λ 'ya bağımlılığı S-L problemi adını alır.

Özellikler:

1. Özdeğerler kesiktir.

Sbt bir λ için $(*)$ denkleminin lineer bağımsız çözümleri $u(x; \lambda)$ ve $v(x; \lambda)$ olsun. Herhangi bir çözüm

$$y(x; \lambda) = A u(x; \lambda) + B v(x; \lambda)$$

ile verilir. A ve B 'ler $(**)$ 'i sağlayacak şekilde seçilir.

$$y(a; \lambda) = A u(a; \lambda) + B v(a; \lambda) = 0$$

$$y(b; \lambda) = A u(b; \lambda) + B v(b; \lambda) = 0$$

$$\begin{pmatrix} u(a; \lambda) & v(a; \lambda) \\ u(b; \lambda) & v(b; \lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} u(a; \lambda) & v(a; \lambda) \\ u(b; \lambda) & v(b; \lambda) \end{vmatrix} = u(a; \lambda)v(b; \lambda) - u(b; \lambda)v(a; \lambda) = 0$$

$u(x; \lambda)$ ve $v(x; \lambda)$ 'lar λ 'nın analitik fonksiyonları ise, determinanın kendisi λ 'nın analitik fonk.-u olur. Bu nedenle determinanın sıfırları (ayrık) (isolated) olmalıdır. Bu determinanın sıfırları S-L probleminin izin verilmiş çözümlerine karşı geldiğinden, özdeğerlerin kesikli olduğunu görürüz.

2.) Özfonk. lar ortogonaldır.

(Farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonk. lar ağırlıklı fonk. uo göre diktiler.)

3.) Özdeğerler gereldir:

λ_i özdeğerli y_i özfonk.-u olsun.

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy_i}{dx} \right] + [q(x) + \lambda_i \sigma(x)] y_i = 0 \quad / \quad y_i^*$$

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy_i^*}{dx} \right] + [q(x) + \lambda_i^* \sigma(x)] y_i^* = 0 \quad / \quad y_i$$

$$(\lambda_i^* - \lambda_i) \int_a^b r y_i y_i^* dx = \int_a^b \left\{ y_i^* \frac{d}{dx} [p y_i'] - y_i \frac{d}{dx} [p y_i^*] \right\} dx$$

$$= \left[y_i^* p \frac{dy_i}{dx} - y_i p \frac{dy_i^*}{dx} \right]_a^b - \int_a^b [p y_i'^* y_i - p y_i' y_i^*] dx$$

→ 0 sınır koşullarından.

$$(\lambda_i^* - \lambda_i) \int_a^b r(x) |y_i(x)|^2 dx$$

$\lambda_i^* \neq \lambda_i \Rightarrow r > 0$ olduğundan $y_i(x) = 0$ olmalı.

Aksi takdirde $\lambda_i^* = \lambda_i$

4.

$$y'' + k^2 y = 0$$

$$\lambda = k^2 \quad r(x) = 1 \quad p(x) = 1 \quad q(x) = 0$$

$$y(a) = 0 \quad y(b) = 0$$

Dirichlet

$$u(x; k) = \cos(kx) \quad v(x; k) = \sin(kx)$$

$$\begin{vmatrix} \cos ka & \sin ka \\ \cos kb & \sin kb \end{vmatrix} = \cos ka \sin kb - \cos kb \sin ka = 0$$

$$\sin[k(b-a)] = 0$$

$$k_n = \frac{n}{b-a} \pi$$

$$y_n(x) \propto \sin\left(n\pi \frac{x-a}{b-a}\right)$$

oder: $y'(a) = 0 \quad y'(b) = 0$ ist ein Randwertproblem 2. Art

Neumann.

$$P(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + Q(x) \frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x q(x) \frac{dy}{dx} + r(x)y = 0$$

$$q(x) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m x^m \quad r(x) = \sum_{m=0}^{\infty} r_m x^m$$

Yahnsch: $x=0$ ist eine reguläre Stelle.

Frobenius 1.

$$Z(x, s) = x^s (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}$$

$$Z(x, s) \rightarrow x^2 \frac{d^2 Z}{dx^2} + x q(x) \frac{dZ}{dx} + r(x)Z = 0 \quad \text{denn in der Gleichung.}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (s+n)(s+n-1) x^{s+n} + q(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s+n) x^{n+s} + r(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (s+n)(s+n-1) x^{s+n} + \sum_{n,m} a_n q_m (s+n) x^{n+s+m} + \sum_{n,m} a_n r_m x^{n+s+m} = 0$$

(2)

x in der konstanten Kette auf schreiben;

$$\underline{x^0} \quad a_0 s(s-1) + a_0 q_0 s + a_0 r_0 = 0 \quad n=0, m=0.$$

$$\underline{x^1} \quad 1. \text{ Teil } n=1 \quad 2. \text{ und } 3. \text{ Teil } n+m=1 \quad \left\{ \begin{array}{l} (m=0, n=1) \\ (n=1, m=0) \end{array} \right\}$$

$$a_1 s(s+1) + \{ a_1 q_0 (s+1) + a_0 a_1 s \} + \{ a_1 r_0 + a_0 r_1 \} = 0$$

$$\underline{x^i} \quad 1. \text{ Teil } n=i \quad 2. \text{ und } 3. \text{ Teil } n+m=i \quad \left\{ \begin{array}{l} (n=i, m=0) \\ n=i-1, m=1 \\ n=i-2, m=2 \\ \vdots \end{array} \right\}$$

$$a_i (s+i)(s+i-1) + \{ \underline{a_i q_0} (s+i) + a_{i-1} q_1 (s+i-1) + \dots + a_0 q_i s \}$$

$$+ \{ \underline{a_i r_0} + a_{i-1} r_1 + \dots + a_0 r_i \} = 0$$

$i \geq 1$

$$a_i f(s+i) + \{ a_{i-1} q_1 (s+i-1) + \dots + a_0 q_i s \}$$

$$+ \{ a_{i-1} r_1 + \dots + a_0 r_i \} = 0$$

$$\boxed{f(s+i) = (s+i)(s+i-1) + q_0 (s+i) + r_0}$$

x^0 'nn katsayısı : $q_0 \{s^2 + (q_0 - 1)s + r_0\} = 0$

$$a_0 \neq 0 \Rightarrow s^2 + (q_0 - 1)s + r_0 = 0$$

İki kök bulunur

Genel olarak s_1, s_2 kökleri $s_2 \geq s_1$ olsun.

$$f(s+i) = (s+i)(s+i-1) + q_0(s+i) + r_0$$

$$f(s) = s(s-1) + q_0 s + r_0 \quad s \leftrightarrow s-i$$

$$= s^2 + (q_0 - 1)s + r_0$$

$$= (s - s_1)(s - s_2)$$

(s_1, s_2) def. denkleminin kökleri olarak gösterilir.

a) $s_1 = s_2$

b) İki kök bir tam sayı kadar farklıdır (dışarıya açılır)

a_i 'leri de belirlemek için

$i=1$

$$a_1 f(s+1) + a_0 q_1 s + a_0 r_1 = 0$$

$$q_1 = - \frac{a_0 (q_1 s + r_1)}{f(s+1)} = \frac{a_0 h(s)}{f(s+1)}$$

(4)
i=2

$$a_2 f(s+2) + \{a_1 q_1(s+1) + a_0 q_2 s\} + \{a_1 r_1 + a_0 r_2\} = 0$$

$$a_2 f(s+2) + \left\{ \frac{a_0 h_1}{f(s+1)} q_1(s+1) + a_0 q_2 s \right\} + \left\{ a_0 \frac{h_1}{f(s+1)} r_1 + a_0 r_2 \right\} = 0$$

$$a_2 = \frac{-a_0 \{ q_1(s+1) h_1 + q_2 s \overset{f(s+1)}{+ h_1 r_1 + r_2 f(s+1)} \}}{f(s+2) f(s+1)}$$

$$i = a_0 \frac{h_2(s)}{f(s+1) f(s+2)}$$

$$a_i = a_0 \frac{h_i(s)}{f(s+1) \dots f(s+i)}$$

$$s = s_1$$

ayn cürdeler.

$$s = s_2$$

$$f(s_1+i) \neq 0$$

doğru.

$$f(s_2+i) \neq 0$$

i = tam sayı.

$$f(s) = (s-s_1)(s-s_2)$$

$$f(s+i) = (s-s_1+i)(s-s_2+i)$$

$$\left[\begin{array}{l} f(s_1+i) = i(s_1-s_2+i) \\ f(s_2+i) = i(s_2-s_1+i) \end{array} \right]$$

$s_2 - s_1$ bir tamsayı değilse splanacak.

hâller bir tamsayı kadar farklıdır.

$$s_2 - s_1 = r$$

$$\left. \begin{array}{l} f(s_1+i) = i(r+i) \\ f(s_2+i) = i(r+i) \end{array} \right\} i=r \Rightarrow \frac{f(s_1+i)=0}{f(s_2+i) \neq 0}$$

Şimdi $s=s_1$ ile çalışır ($s=s_1$ hariç.)

2. kök nasıl bulunur?

$$Z(x,s) = a_0 x^s \left\{ 1 + \frac{h_1}{f(s+1)} x^1 + \dots + \frac{h_i}{f(s+1) \dots f(1+i)} x^i + \dots \right\}$$

$$x^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + x q(x) \frac{dz}{dx} + r(x) z = \underline{a_0 f(s) x^s}$$

her bir terim için tanımlıdır.

$$(s=s_1 \text{ hariç})$$

6

$z(x, s)$ $f(s+r)$ ile karşılık $s=s_1$ de referans fonksiyonu olarak.

$$f(s+r) = (s+r-s_1)(s+r-s_2) = (s+s_2-2s_1)(s-s_1)$$

sağ tarafta $(s-s_1)$ ile de karşılaştırılır.

$$\begin{cases} (s-s_1) z(x, s) = a(s-s_1) f(s) x^s \\ = a(s-s_1)^2 (s-s_2) x^s. \end{cases}$$

$s=s_2$ de $\begin{cases} (s-s_2) z(x, s) = 0. \end{cases}$

$z(x, s_2)$ bir çözüm

Benzar şekilde $s=s_1$ de.

$$\left[(s-s_1) z(x, s) \right]_{s_1} \text{ çözümü elde edilir.}$$

$$\begin{cases} \left[\frac{d}{ds} \{ (s-s_1) z(x, s) \} = \dots \right. \\ \text{denklemler çözümü..} \end{cases}$$

→ Dize ki durum. $s_2 - s_1 = r$. $s = s_1$ ve $i = r$ için

$f(s+i) = 0$ idi ki $h_i(s_1) = 0$ olarak a_i ler verilir.

→ Son durum. $s_2 = s_1 = s$ $s = s_1$ olur.

$$f(s) = (s - s_1)^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z(x, s) = a_0 (s - s_1)^2 x^s \end{array} \right.$$

$s = s_1$ için $RHS = 0 \Rightarrow z(x, s)$ çözüm.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{ds} z(x, s) = a_0 z (s - s_1) x^s + a_0 (s - s_1)^2 s x^{s-1} \end{array} \right.$$

$s = s_1$ için $RHS = 0$

teğansı.

c) $\left(\frac{d}{ds} z(x, s) \right) \Big|_{s_1}$ de bir çözüm.

