BÖLÜM 9

SEYRELTİK BİR GAZIN DENGE DURUMU

(i) Gazın dengede olduğu durum $f(\vec r,\vec p;t) \xrightarrow[t\to\infty]{} f_0(\vec p)$

$$\frac{\partial \overbrace{f}^{\equiv f(\vec p_1,t)}}{\partial t} \underset{=0}{=} \int d^3p_2\, d^3p_1'\, d^3p_2'\, \delta^4(P_f-P_i)\,|T_{fi}|^2\,(f_1'f_2'-f_2f_1)$$

idi (sol taraftaki diğer iki terim "0" denge + dış kuvvet yok!)

f_0 $\partial f/\partial t=0$'ın çözümü

$$\Rightarrow \quad f_0(\vec p_1')\,f_0(\vec p_2') - f_0(\vec p_1)\,f_0(\vec p_2)=0$$

$(\vec p_1,\vec p_2)\to(\vec p_1',\vec p_2')$ mümkün bir saçılmada

$H(t) \equiv \int d^3v\, f(\vec p,t)\ln f(\vec p,t)$ Boltzmann fonksiyoneli tanımla!

buradaki $f(\vec p,t)$ t anındaki dağ. fonk.'u

$$\frac{\partial f(p_1,t)}{\partial t} = \int d^3p_2\, d^3p_1'\, d^3p_2'\, \delta^4(P_f-P_i)\,|T_{fi}|^2\,(f_2'f_1'-f_1f_2).$$

$$\frac{dH}{dt} = \int d^3v \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}\ln f + f\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial t} \right\} = \int d^3v\, \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{=0}[\ln f+1]$$

$\frac{\partial f}{\partial t}=0 \Rightarrow \frac{dH}{dt}=0$ olmasını gerektirir

BS K

İspat: $$\frac{dH}{dt} = \int d^3r\, d^3p_2\, d^3p_2'\, d^3p_1'\, \delta^4(P_f - P_i)\, |T_{fi}|^2 \times (\ln f_1 + 1)\,(f_2' f_1' - f_1 f_2)$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3r\, d^3p_2\, d^3p_2'\, d^3p_1'\, \delta^4(P_f - P_i)\, |T_{fi}|^2 \times (\ln f_1 f_2 + 2)\,(f_2' f_1' - f_1 f_2)$$

$(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \to (\vec{p}_1', \vec{p}_2')$ ters saçılma.

$$\frac{dH}{dt} = \frac{-1}{2}\int d^3r\, d^3p_2\, d^3p_1'\, d^3p_2'\, \delta^4(P_f - P_i)\, |T_{fi}|^2 \, (f_1' f_2' - f_1 f_2)\,[\ln f_1' f_2' + 2]$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{4}\int d^3r\, d^3p_2\, d^3p_1'\, d^3p_2'\, \delta^4(P_f - P_i)\, |T_{fi}|^2 \times (f_1' f_2' - f_1 f_2)\,\underbrace{(\ln f_1 f_2 - \ln f_1' f_2')}_{\ln\left(\frac{f_1 f_2}{f_1' f_2'}\right)} \le 0$$

(ii) Denge durumunda f_0'ı bulalım.

$$\ln f_0(\vec{p}_1')\, f_0(\vec{p}_2') = \ln f_0(\vec{p}_1)\, f_0(\vec{p}_2)$$

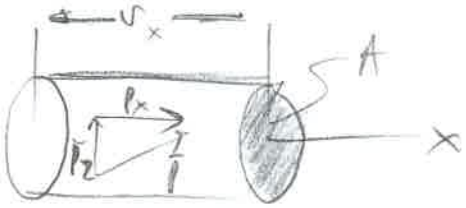
$$\ln f_0(\vec{p}_1') + \ln f_0(\vec{p}_2') = \ln f_0(\vec{p}_1) + \ln f_0(\vec{p}_2)$$

korunum yasası gibi.

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\int d^3\vec p \, \frac{\vec p^2}{2m} e^{-A\vec p^2}}{\int d^3\vec p \, e^{-A\vec p^2}} = \frac{3}{4Am} \Rightarrow A = \frac{3}{4\epsilon m}$$

$\langle \mathcal{E} \rangle = \epsilon$ olur.

$$f_0(\vec p) = \left(\frac{3}{4\pi m\epsilon}\right)^{3/2} n \, e^{-3p^2/4\epsilon m}$$



$A v_x t$: silindir hacmi $\equiv$ birim zamanda A ya çarpan molekül sayısı.

$$-mv_x - mv_x = \Delta p_x = -2mv_x = -2p_x$$

çarpışmadan sonra moleküllerin momentum değişimi.

$$\Rightarrow F = 2p_x A v_x t$$

$$\frac{F}{At} = 2p_x v_x = P$$

$$\vec p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = 3p_x^2$$

$$P = \int_{v_x>0} d^3p \; 2p_x v_x \, f(p) = \frac{2}{m}\int d^3p \; \underbrace{p_x^2}_{\frac{1}{3}\vec p^2} f(p)$$

$$= \frac{2}{3m} n\epsilon \Rightarrow \epsilon = \frac{3}{2}kT$$

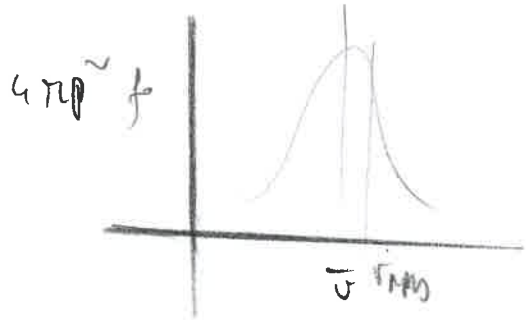
$$\boxed{P = nkT}$$

$$f_0(\vec p) = \frac{n}{(2\pi mkT)^{3/2}} e^{-(\vec p - \vec p_0)^2/2mkT}$$

Maxwell-Boltzmann dağ.

$\vec p_0 = \vec 0$ ile bir gaz da en olası hız $\bar v$, $4\pi p^2 f_0(\vec p)$ nin maksimumundan bulunur.

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \qquad v_{rms} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \left(\frac{\int d^3p\, v^2 f_0(p)}{\int d^3p\, f_0(p)} \right)$$



Eğer korunumlu bir kuvvet varsa,

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$$

o zaman, $f(\vec{p},\vec{r}) = f_0(\vec{r})\, e^{-\phi(\vec{r})/kT}$

ispatla:

$$\left(\frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{\nabla}_r + \vec{F} \cdot \vec{\nabla}_p \right) f(\vec{r},\vec{p}) = 0$$

$$f(\vec{r},\vec{p}) = \frac{n(\vec{r})}{\sqrt{(2\pi m kT)^3}}\, e^{-(\vec{p}-\vec{p}_0)^2/2mkT}$$

$$n(\vec{r}) = \int d^3\vec{p}\, f(\vec{r},\vec{p}) = n_0\, e^{-\phi(\vec{r})/kT}$$

Aldığımız seyreltik gazın iç enerjisi

$$U = N\epsilon = \frac{3}{2}NkT$$

$$H = -\frac{S}{Vk}$$ 2. yasa ile uyumlu

bunu sağlamak için

$$H = \int d^3v\, f \ln f$$

$$H_0 = \int d^3p\, f_0 \ln f_0 = n\left\{ \ln\left[n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \right] - \frac{3}{2} \right\}$$

S ideal gaz

$$-kVH_0 = \frac{3}{2}Nk \ln\left(PV^{5/3}\right) + \text{sbt}$$

$$\chi(\vec{p}_1)+\chi(\vec{p}_2)=\chi(\vec{p}_1')+\chi(\vec{p}_2')$$

$\chi \propto \epsilon$, $(\vec{p}-\vec{p}')$ olmalilar (spin yok, non-rel.)

$$\ln f_0(\vec{p}) \propto (\vec{p}-\vec{p}_0)^2$$

$$= -A(\vec{p}-\vec{p}_0)^2+\ln C$$

$$f_0 = C\exp\left(-A(\vec{p}-\vec{p}_0)^2\right)$$

$$\frac{N}{V}=\int d^3\vec{p}\; f_0(\vec{p}) = C\int e^{-A(\vec{p}-\vec{p}_0)^2}d^3p$$

$$= C\left(\frac{\pi}{A}\right)^{3/2} \Rightarrow C=\left(\frac{A}{\pi}\right)^{3/2}\frac{N}{V}$$

$$f(\vec{p})=\left(\frac{N}{V}\right)\left(\frac{A}{\pi}\right)^{3/2}e^{-A(\vec{p}-\vec{p}_0)^2}$$

Bir gaz moleküllerinin ort. mom. u

$$\langle p\rangle \equiv \frac{\int d^3\vec{p}\,\vec{p}\,f(\vec{p})}{\int d^3\vec{p}\,f_0(\vec{p})} = \frac{\int d^3\vec{p}\,\vec{p}\,e^{-A(\vec{p}-\vec{p}_0)^2}}{\int d^3\vec{p}\,e^{-A(\vec{p}-\vec{p}_0)^2}}$$

$$\vec{p}-\vec{p}_0=\vec{u} \Rightarrow \langle\vec{p}\rangle=\vec{p}_0+\cancel{\frac{\int d^3\vec{u}\,\vec{u}\,e^{-Au^2}}{\int d^3u\,e^{-Au^2}}}=\vec{p}_0=\vec{0}$$

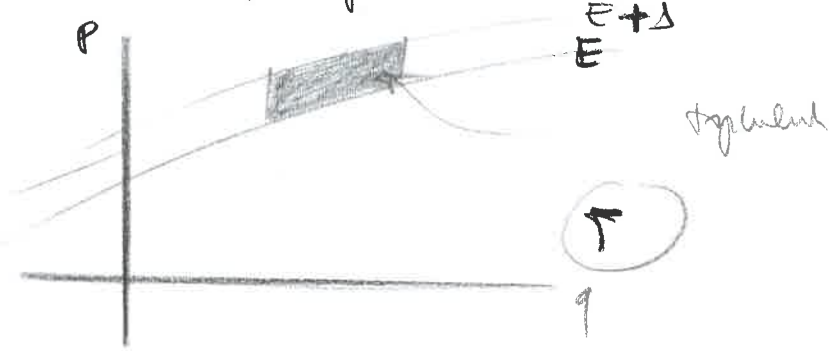
$$\boxed{f(\vec{p})=\left(\frac{A}{\pi}\right)^{3/2} n\, e^{-Ap^2}}$$

BS K

9.3. En Olası Dağılım Yöntemi :

V hacminde N adet gaz molekülü olsun. Enerjisi E ile E+ΔE = E+Δ arasında bulunan moleküller faz uzayında gözlenebilir durumlar.

$\Delta \ll E \longrightarrow$ topluluk adını alır.



μ-uzayında hacim elemanı: $d^3p\, d^3q = \omega$ hacimli hücrelere bölelim.

bunları → i ile indisleyelim. $i = 1, 2, \ldots, k$.

herbir hücredeki parçacık sayısı $n_i = n_1, \ldots, n_k$ olsun. (işgal sayısı)

$$\sum n_i = N \qquad \sum n_i \epsilon_i = E \qquad \epsilon_i = \frac{p_i^2}{2m}$$

$$f_i = \frac{n_i}{\omega} \qquad \bar{f}_i = \frac{\langle n_i \rangle}{\omega}$$ bunun hesabı zor. Bunun yerine;

Gazın durumu verilince f tek bir şekilde belirlenir. Bunun aksi doğru değildir. Γ-uzayında iki molekülü değiştirirsek Γ'daki temsilci noktalar hareket eder, ancak bu dağılım fonk.unu değiştirmez. Γ-daki bir hacme denge dağ. fonk.u → bu f'ye karşılık gelen mikrosum hacmi arıyorum. Dağılım fonk.u Γ-uzayında en büyük hacmi veren "en olası dağılım" fonk.udur.

i-hücredeki işgal sayısı $\{n_i\}$ ve karşılık gelen dağılım fonk.u tarafından doldurulan Γ-daki hacim $\Omega\{n_i\}$ olsun. N adet parça ayrı k-tane hücreye dağıttığımızdaki $\{n_i\}$'ye karşılık gelen molekül dağılım sayısıdır. Yani;

$$\Omega\{n_i\} \propto \frac{N!}{\underbrace{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}_{\prod_i^k n_i}}\, \underbrace{g_1^{n_1} \cdots g_k^{n_k}}_{\prod g_i^{n_i}}$$

g_i hesabın sonunda 1 alınacak bir sayı.

$$\ln \Omega\{n_i\} = \ln N! - \sum_i \ln n_i! + \sum_i n_i \ln g_i + \text{sbt}.$$

Stirling formülü $\ln N! = N\ln N - N$

$$\ln \Omega \doteq N\ln N - \cancel{N} - \sum_i n_i \ln n_i + \cancel{\sum n_i} + \sum_i n_i \ln g_i + \text{sbt}$$

$$\underbrace{\delta(\ln \Omega)}_{0} = \delta\Big(\alpha \underbrace{\sum n_i}_{N} + \beta \underbrace{\sum n_i \epsilon_i}_{E}\Big)$$ Lagrange çarpanları. $n_i = \bar{n}_i$

E sartları sağlanacak şekilde $\ln \Omega$'yı maksimize edelim!

$$\sum_i \delta n_i \left[-(\ln n_i + 1) + \ln g_i - \alpha - \beta \epsilon_i\right] = 0$$

$$\ln n_i - \ln g_i = -1 - \alpha - \beta \epsilon_i$$

$$\boxed{\bar{n}_i = g_i\, e^{-1-\alpha-\beta\epsilon_i}}$$

$$f_i = C\, e^{-\beta \epsilon_i} \qquad - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n_i} (\delta n_i)^2 < 0$$

yukarıdakinin 2. varyasyonu.

$$f_i = \frac{n_i}{\omega}$$

$$P\{n_i\} = \frac{\Omega\{n_i\}}{\sum_{\{n_j\}} \Omega\{n_j\}}$$

MB dağılımının ne kadar olası olduğunu gösteren olasılık (sist i MB dağılımında bulunma olasılığı)

$$\langle n_i \rangle = \frac{\sum n_i \Omega\{n_i\}}{\sum_{n_j} \Omega\{n_j\}} = g_i \frac{\partial}{\partial g_i} \ln\left[\sum_{n_j} \Omega\{n_j\}\right]$$

$$\frac{g_i}{\sum \Omega\{n_j\}} \frac{\partial}{\partial g_i} \sum_{n} \Omega\{n_i\}$$

$g_i \to 1$ olmasını isteriz

ort. kare dalgalanma $= \langle n_i^2 \rangle - \langle n_i \rangle^2$

$$\langle n_i^2 \rangle = \frac{\sum n_i^2 \Omega}{\sum \Omega} = \frac{g_i}{\sum \Omega} \frac{\partial}{\partial g_i}\left(g_i \frac{\partial}{\partial g_i} \sum \Omega\right)$$

$$= g_i \frac{\partial}{\partial g_i}\left(\frac{1}{\sum \Omega} g_i \frac{\partial}{\partial g_i} \sum \Omega\right) - g_i \left(\frac{\partial}{\partial g_i} \frac{1}{\sum \Omega}\right) g_i \frac{\partial}{\partial g_i} \sum \Omega$$

$$g_i \frac{\partial}{\partial g_i} \sum \Omega \Big/ (\sum \Omega)^2 = \left(\frac{g_i \partial_{g_i} \sum \Omega}{(\sum \Omega)^2}\right)$$

$$\langle n_i^2 \rangle - \langle n_i \rangle^2 = g_i \partial_{g_i}\left(\frac{1}{\sum \Omega} g_i \partial_{g_i} \sum \Omega\right)$$

$$= g_i \partial_{g_i} \langle n_i \rangle \qquad g_i = 1$$

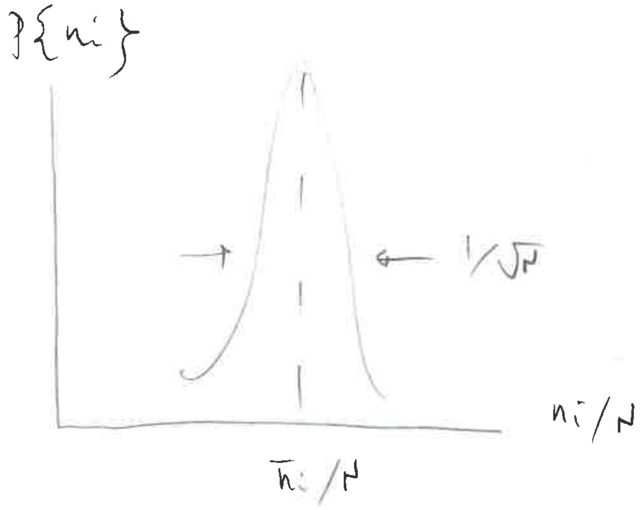
KO Dalgalanma $\gg \langle n_i \rangle^2 \Rightarrow \langle n_i \rangle$, $\bar{n}_i$ çok küçükse

$\ll \langle n_i \rangle^2 \Rightarrow \langle n_i \rangle \simeq \bar{n}_i \to$ normalde bu.

$$\langle n_i^2 \rangle - \langle n_i \rangle^2 \cong \bar{n}_i$$

$$\sqrt{\left\langle \left(\frac{n_i}{N}\right)^2 \right\rangle - \left\langle \frac{n_i}{N} \right\rangle^2} \simeq \sqrt{\frac{n_i/N}{N}}$$

BS K



4.4. H-teoreminin anlamı

$$H(t) = \int d^3p \, f(p,t) \ln f(p,t)$$

teorem: verilen bir t anında gaz durumu moleküler kaos varsayımını sağlar ise $t+\epsilon$ $(\epsilon \to 0)$ anında,

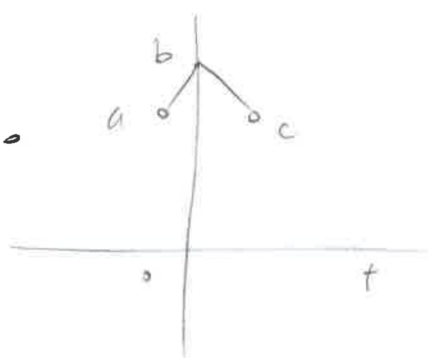
(a) $\frac{dH}{dt} \leq 0$ (b) $\frac{dH}{dt} = 0$ sadece f MB dağılımı ise.

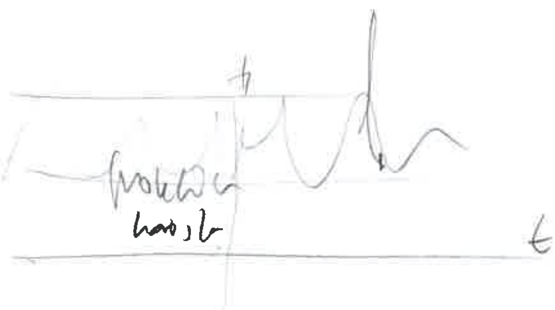
t anında mol. kaos var $\Rightarrow$ $t+\epsilon$ da da $\frac{dH}{dt} \leq 0$

$t-\epsilon$ " " $\frac{dH}{dt} > 0$ olmalı.

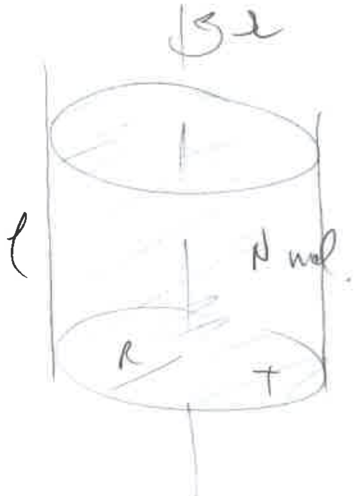
$t = 0^+$ $\frac{dH}{dt} < 0$

$t = 0^-$ $\frac{dH}{dt} > 0$





4.2 Denge dağılım fonk.unu bul.



silindirin dönmesi $-\frac{1}{2}m\Omega^2 r^2$ pot enerjili bir dış alanın varlığına özdeştir.

$$f(r) = A\exp\left(-m\Omega^2 r^2/2kT\right)$$

$$n = \int f(r)\, d^3r \quad r\,dr\,d\phi\,dz$$

$$= 2\pi\ell \int_0^r A\exp\left(-m\Omega^2 r^2/2kT\right) dr \qquad \int_0^\ell dz$$

$$\frac{m\Omega^2}{2kT}r^2 = u \qquad r\,dr = \frac{kT}{m\Omega^2}du$$

$$A\,2\pi\ell\,\frac{kT}{m\Omega^2}\int_0^r du\, e^{-u} = n$$

$$2\pi A\ell\left(-\frac{kT}{m\Omega^2}\right)\left(e^{-u}\right)\Big|_0^R = n$$

$$2\pi A\ell\,\frac{kT}{m\Omega^2}\left(1-e^{-R}\right)$$

$$\Rightarrow f(r) = \frac{N m\Omega^2\, e^{m\Omega^2 r^2/2kT}}{2\pi kT\ell\left(e^{m\Omega^2 r^2/2kT}-1\right)}$$

4.4. relativistik din. kullanarak seyreltik bir gaz için (toplam mom. kn) (a) Denge dağ. fonk.. (b) durum denk.ini bul.

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \qquad p \gg mc$$

$$f(p) = A\, e^{-\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}/kT}$$

$$n = \int f(p)\, d^3p = 4\pi A\int e^{-\frac{c}{kT}\sqrt{p^2+m^2c^2}}\, p^2\, dp$$

$$p = mc\sinh t \Rightarrow dp = mc\cosh t\, dt$$

$$= 4\pi A\,(mc)^3 \int e^{-mc^2\cosh t/kT}\sinh^2 t\cosh t\, dt$$

$$= 4\pi A\,(mc)^3 \int_0^\infty e^{-z\cosh t}\sinh^2 t\cosh t\, dt$$

BS K

$$\int e^{-z\,\mathrm{Ch}\,t}\,\mathrm{Sh}^2 t\,dt = \frac{K_1(z)}{z}$$

$$\int e^{-z\,\mathrm{Ch}\,t}\,\mathrm{Sh}^2 t\,\mathrm{Ch}\,t\,dt = -\frac{K_1'(z)}{z} + \frac{K_1}{z^2}$$

$$K_1' = -\frac{K_1}{z} + K_0 = \frac{2K_1}{z^2} + \frac{K_0}{z} = \frac{2K_1 + K_0 z}{z^2}$$

$$n = 4\pi A\,(mc^2)^3\,\frac{2K_1 + K_0 z}{z^2}$$

$$f(p) = \frac{\exp\left[-c\left(\sqrt{m^2c^2+p^2}/kT\right)\right]}{2\left(\frac{kT}{mc^2}\right)^2 K_1\left(\frac{mc^2}{kT}\right) + \left(\frac{kT}{mc^2}\right)K_0\left(\frac{mc^2}{kT}\right)}$$

$$P = \int 2 p_x v_x f_0(p)\,d^3p \qquad v_x = \frac{p_x c^2}{E} \qquad p_x^2 = \frac{p^2}{3}$$

$$= \frac{2c^2}{3}\int \frac{p^2}{E} f_0(p)\,d^3p \quad 4\pi p^2 dp \qquad \propto kT$$

4.5. $H = \int d^3p\, f(\bar{p},t)\ln f(\bar{p},t)$ keyfi mesh $\left(\begin{array}{l} \int d^3p\, f(\bar{p}\,t) = n \\ \frac{1}{n}\int d^3p\,\frac{p^2}{2m} f(\bar{p},t) = \epsilon \end{array}\right.$

f : MB dağılımı $\Rightarrow$ H min.

$$\delta\left[H + \alpha n + \beta n \epsilon\right] = 0$$

$$\Rightarrow \int d^3p\,\delta f\left[\ln f + 1 + \alpha + \beta\frac{p^2}{2m}\right] = 0$$

$$f \propto e^{-\beta p^2/2m}$$

BS K