9 BÖLÜM

BÖLÜŞÜM FONKSİYONU'NUN GENEL ÖZELLİKLERİ

9.1. Darwin-Fowler Yöntemi (Eyer noktası yöntemi)

M tane özdeş sistem olsun. $M\to\infty$ aldığımızda bulacağımız ifadeler daha evvel bulduklarımıza özdeş. Sistem E_k enerjilerini almış olsun. $(k=0,1,2,\dots)$ Bunun gibi özdeş M sistem olsun. Bunu parçalara ayıralım.

$$\star\left[\begin{array}{ll} m_0 & E_0 \\ m_1 & E_1 \\ \vdots & \\ \sum_k^{\infty} m_k = M & \\ \sum_k m_k E_k = UM & \end{array}\right.$$

ort enerji

bağ koşulları

- birbirinden ayırt edilebilir
- etkileşmeyen sistemler
- ∴ Boltzmann dağılımı $e^{-\beta E_k}$

kuvantal dağılım [illegible]

U ları da tam sayı kabul ediyoruz.

En uygun $\{\bar{m}_k\}$ kümesini arıyoruz. Çok yolu var onun için tek değil. Bunun sayısı (★ ı sağlayan sistemin I gerçeklenme sayısı)

$$W\{m_k\} = \frac{M!}{m_0!\,m_1!\cdots}\, g_0^{m_0}\, g_1^{m_1}\cdots = I$$

$$\langle m_k \rangle = \frac{\sum' m_k W\{m_k\}}{\sum'_{\{m_i\}} W\{m_k\}}$$

$$\bar{m}_k \to \langle m_k \rangle$$

BS K

$$\boxed{\Gamma(M,U) \equiv \sum_{\{m_i\}}{}' W\{m_i\}}$$

$$\frac{M!}{m_0!\,m_1!\dots} g_0^{m_0}\dots$$

olsun. O zaman $\langle m_k \rangle = g_k \frac{\partial}{\partial g_k} \ln \Gamma$

$$\langle m_k^2 \rangle - \langle m_k \rangle^2 = g_k \partial_{g_k} (g_k \partial_k \ln \Gamma)$$

$$\Gamma \equiv \Gamma(M,U) = M! \sum_{m_0, m_1, m_2}{}' \left(\frac{g_0^{m_0}}{m_0!} \dots \right)$$

Γ- için doğurucu fonk:

$\underline{\underline{\varepsilon_0 m_0 + \varepsilon_1 m_1 + \dots}}$

$$G(M,z) \equiv \sum_{U=0}^{\infty} z^{MU} \Gamma(M,U)$$

$$= \underbrace{\sum_{U} \sum_{m_0, m_1, \dots}{}'}\, M! \frac{(z^{\varepsilon_0} g_0)^{m_0}}{m_0!} \dots$$

tek bir toplam'a indirgenebilir + $\sum m_k = M$ bağlayıcılık.

$$= \sum_{\substack{m_0, m_1, \dots \\ \sum m_k = M}} \frac{M!}{m_0! \dots} \left[(g_0 z^{\varepsilon_0})^{m_0} \dots \right]$$

$$= (\underbrace{g_0 z^{\varepsilon_0} + g_1 z^{\varepsilon_1} + \dots}_{\text{Multinomial exp.}})^M = (\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} g_k z^{\varepsilon_k}}_{\equiv f(z)})^M$$

$$G(M,z) \equiv f^M(z) = \sum_{U} z^{MU} \Gamma(M,U)$$

$$\oint_z \frac{f^M(z)}{z^{MU'+1}} dz = 2\pi i\, \Gamma(M,U')$$

$$= \oint \sum \frac{z^{MU}\, \Gamma(M,U)}{z^{MU'+1}} dz$$

$$= \sum \Gamma(M,U) \left(\oint \frac{z^{M(U-U')}}{z} dz \right) = 2\pi i\, \delta_{UU'}$$

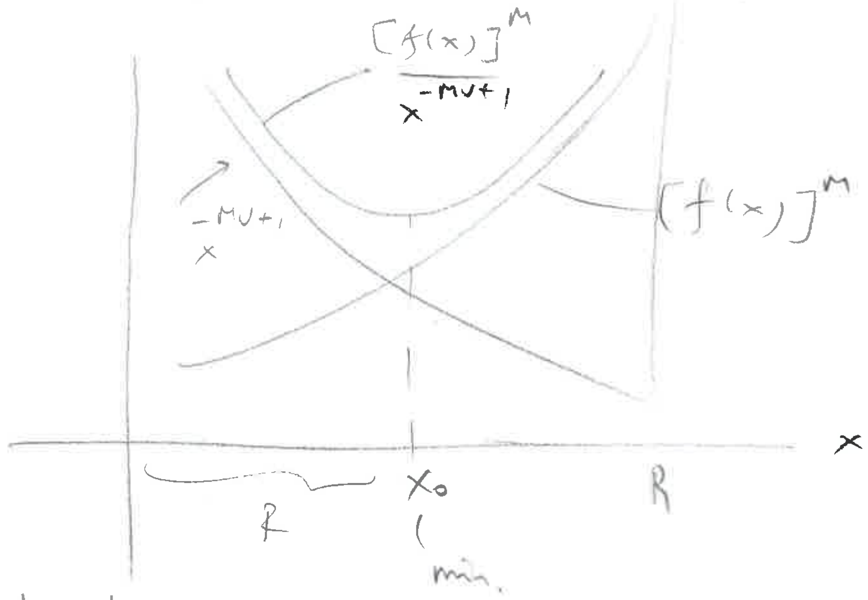
BS K

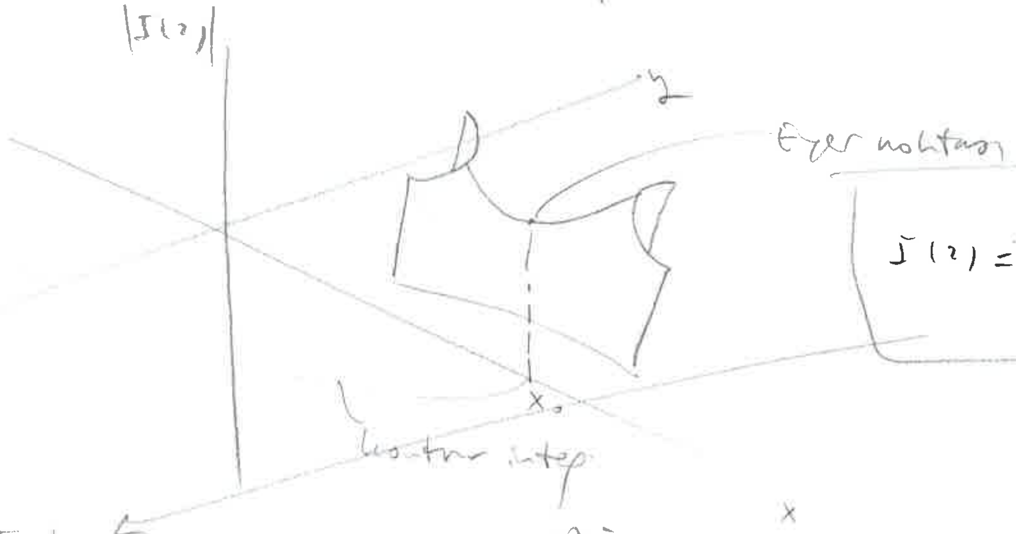
$$\Gamma(M,\nu) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{[f(z)]^M}{z^{M\nu+1}}$$

ispatı alalım. $f(z) = 1 + z^{E_1} + \cdots$

$E_1 \le E_2 \le \dots \le E_k$ herhangi ikisi ortak bölene

sahip olmasın. $f(x)$ monoton artan bir fonk. z reel ise





$$\boxed{J(z) = \frac{[f(z)]^M}{z^{M\nu+1}}}$$

$$\left.\frac{\partial J}{\partial z}\right|_{z=x_0} = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} > 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 J}{\partial y^2} < 0 \text{ olmalı}$$

BS K

$$I(z) = e^{Mg(z)} \quad \text{dsm} \quad = \frac{[f(z)]^M}{z^{MU+1}} \quad \left(= I(z) \right)$$

$$Mg(z) = M \ln f(z) - MU \ln z - \ln z$$

$$g(z) = \ln f(z) - U \ln z \quad \cancel{\frac{1}{M} \ln z} \ (M \to \infty)$$

$$g'(x_0) = 0 = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} - \frac{U}{x_0} \Rightarrow U = x_0 \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$$

$$f'(z) = E_1 z^{E_1 - 1} + E_2 z^{E_2 - 1} + \dots$$

$$x_0 f'(x_0) = E_1 x_0^{E_1} + E_2 x_0^{E_2} + \dots \Rightarrow$$

$$\boxed{U = \frac{\sum_k E_k x_0^{E_k}}{\sum_k x_0^{E_k}}} \qquad E_0 = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \right|_{x_0} = M f''(x_0) e^{Mg(x_0)} \Big|_{M \to \infty} \to \infty$$

$$I(M, U) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{[f(z)]^M}{z^{MU+1}} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint e^{Mg(z)} dz \qquad g' \text{ in } z = x_0 \text{ ricavando sempre e.c.}$$

$$g_0(z) = g(x_0) + \frac{1}{2} \underbrace{(z - x_0)}_{x+iy}{}^2 g''(x_0) + \dots$$

$$z - x_0 = iy$$

BS K

$$J(M,U) \simeq \frac{1}{2\pi i} i\, e^{M g(x_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{M}{2} g''(x_0) y^2} dy$$

$z - x_0 = iy$

$$\simeq \frac{e^{M g(x_0)}}{\sqrt{2\pi M g''(x_0)}}$$

$$\frac{1}{M} \ln J(M,U) \approx g(x_0) - \frac{1}{2M} \ln\left[2\pi M g''(x_0)\right]$$

$$\ln \Gamma \simeq M g - \frac{1}{2} \ln\left(2\pi M g''\right)$$

$M g(z) = M \ln f(z) - (MU+1) \ln z$

$$\frac{1}{M} \ln \Gamma \underset{M\to\infty}{=} g(x_0) \longrightarrow g(x_0) = \ln f(x_0) - U \ln x_0$$

$$g''(x_0) = \frac{f''(x_0)}{f(x_0)} - \frac{U(U-1)}{x_0^2}$$

$x_0 = e^{-\beta}$ alalım. $g(x_0) = \ln\left(\sum g_k e^{-\beta E_k}\right) + \beta U$

-1

$$g''(x_0) = e^{2\beta} \langle (E-U)^2 \rangle$$

$\boxed{f(z) = \sum_k g_k z^{E_k}}$ hatırlanırsa

$$\frac{1}{M} \ln \Gamma = \ln\left(\sum g_k e^{-\beta E_k}\right) + \beta U - \frac{1}{2M} \ln(\quad)$$

$$\langle m_k \rangle = g_k \partial_{g_k} \ln \Gamma$$

$$\frac{\langle m_k \rangle}{M} = \frac{e^{-\beta E_k}}{\sum_k e^{-\beta E_k}}$$

$$\frac{\langle m_k^2 \rangle - \langle m_k \rangle^2}{M^2} \to 0$$

BS K

8.2. BÖLÜŞÜM FONK.'NUN KLASİK LİMİTİ

$\mathcal{H} = K + \Omega$ N özdeş spinsiz parçacık olsun.

kin. pot

$K = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \nabla_i^2$ laplacian $\Omega = \sum_{i<j} v_{ij} \equiv v(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$

$K\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^{N} \nabla_i^2 \psi$

$\psi(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) \longrightarrow \psi(1, 2, \ldots, N)$ $\Omega\psi = \Omega\psi$

$\mathcal{H}\psi = E\psi$

$$Q_N = Tr\left(e^{-\beta\mathcal{H}}\right) = \sum_n \left(\Phi_n, e^{-\beta\mathcal{H}} \Phi_n\right)$$

Yüksek sıcaklıklarda, $\Downarrow$

$$Q_N \equiv \frac{1}{N!\, h^{3N}} \int d^{3N}p\, d^{3N}r\, e^{-\beta\mathcal{H}(p,r)}$$

$\mathcal{H}(p,r) \equiv \sum \frac{p_i^2}{2m} + \Omega(\vec{r}_1, \ldots \vec{r}_N)$ klasik Ham.

şeklinde yazılabileceğini iddia ediyoruz.

i) Serbest parçacıklar için $\Omega = 0$ $V = L^3$

$K\Phi_p(1, 2, \ldots, N) = K_p \Phi_p$ $p \equiv \{\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_N\}$ N momentum

$K_p = \frac{1}{2m}(p_1^2 + \cdots + p_N^2)$

V üzerine periyodik sınır koşulları empoze edelim

$$\vec{p}_i = \frac{2\pi}{V^{1/3}} \hbar \vec{n} \qquad \vec{n} \equiv (n_x, n_y, n_z)$$

$0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

BS K

$$\Phi_P(1,\ldots,N)=\frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_{P}\delta_P\left[u_{\vec{p}_1}(P1)\ldots u_{\vec{p}_N}(PN)\right]$$

A2

$$=\frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_{P}\delta_P\left[u_{P\vec{p}_1}(1)\ldots u_{P\vec{p}_N}(N)\right]$$

$$u_{\vec{p}}(\vec{r})=\frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}$$

Serbest parçacık çözümleri

$$\delta_P=\begin{cases}+1\\-1\end{cases}\ \text{Ferm}$$

$$\delta_P=1\quad \text{Boson}$$

$$\sum_p\to\frac{V}{h^3}\int d^3\vec{p}$$

$$\mathrm{Tr}\,(e^{-\beta K})=\sum_{\vec{p}}\left(\Phi_{\vec{p}},e^{-\beta K}\Phi_{\vec{p}}\right)$$

$$=\frac{V^N}{N!\,h^{3N}}\int d^{3N}r\,d^{3N}p\,|\Phi_p(1,2,\ldots,N)|^2e^{-\beta K_p}$$

A2

$$|\Phi_P|^2=\frac{1}{N!}\sum_{P}\sum_{P'}\delta_P\delta_{P'}\left[u^*_{\vec{p}_1}(P1)\,u_{P'\vec{p}_1}(1)\right]\ldots$$

$$\times\left[u^*_{\vec{p}_N}(PN)\,u_{P'\vec{p}_N}(N)\right]$$

$$=\sum_{P}\delta_P\left[u^*_{\vec{p}_1}(P1)\,u_{\vec{p}_1}(1)\right]\ldots$$

sonradan

$$=\frac{1}{V^N}\sum_{P}\delta_P\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\vec{p}_1\cdot(\vec{r}_1-P\vec{r}_1)+\cdots+\vec{p}_N\cdot(\vec{r}_N-P\vec{r}_N)\right\}$$

$$f(\vec{r}_1)=\frac{\int d^3\vec{p}_1\,e^{-\beta\vec{p}_1^2/2m+i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}}{\int d^3\vec{p}\,e^{-\beta\vec{p}_1^2/2m}}=e^{-\pi r^2/\lambda^2}$$

$$\lambda=\sqrt{2\pi\hbar^2/mkT}$$

tanımla

BS K

$$\int d^3\bar{p}\; e^{-\beta k_p} f(\bar{r}_1)\cdots f(\bar{r}_N) = \int d^3\bar{p}\; e^{-\beta k_p} e^{i\bar{p}_1\cdot\bar{r}_1/\hbar}\cdots$$

$$\mathrm{Tr}\,(e^{-\beta K}) = \frac{1}{N!\,h^{3N}} \int d^{3N}p\, d^{3N}r\, e^{-\beta k_p} \sum_P f(\bar{r}_1 - P\bar{r}_1)\cdots$$
$$\times f(\bar{r}_N - P\bar{r}_N)$$

$$f(\bar{r}_1) = e^{-\pi r^2/\lambda^2}$$

$$\sum_P \delta_P f(\bar{r}_1 - P\bar{r}_1)\cdots f(\bar{r}_N - P\bar{r}_N)$$
$$= 1 \pm \sum_{i<j} f_{ij}^2 + \sum f_{ij} f_{ik} f_{kj} + \cdots$$

$$f_{ij} = f(|\bar{r}_i - \bar{r}_j|)$$

$$|\bar{r}_i - \bar{r}_j| \gg \lambda$$ termal dalga boyu << parcacıklar arası mesafe

$$\mathrm{Tr}(e^{-\beta K}) = \frac{1}{N!\,h^{3N}} \int d^{3N}p\, d^{3N}q\, e^{-\beta k_p} \left[1 \pm \sum_{i<j} f_{ij} + \cdots\right]$$

yazılabilir

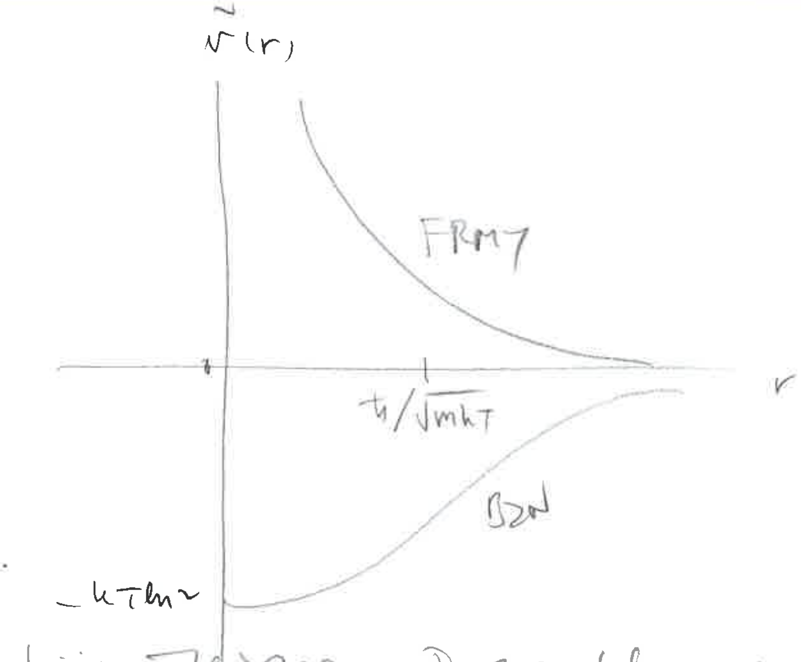
$$\cong \prod_{i<j} (1 \pm f_{ij}^2) \simeq e^{-\beta \sum_{i<j} \tilde{v}_{ij}}$$ burada $\tilde{v}_{ij}$

$$\Leftrightarrow \quad \tilde{v}_{ij} = -kT \ln(1 \pm f_{ij}^2)$$

$$\simeq \frac{1}{N!\,h^{3N}} \int d^{3N}r\, d^{3N}p\, e^{-\beta k_p - \beta \sum v_{ij}}$$

$$v_{ij} = -kT \ln\left[1 \pm e^{-(2\pi/\lambda^2)|\bar{r}_i - \bar{r}_j|^2}\right]$$

BS K



(ii) Etkileşen Parçacıklar

$\Omega \neq 0$ olduğunda $e^{-\beta\mathcal{H}}$ yı bakalım

$$e^{-\beta\mathcal{H}} = e^{-\beta(K+\Omega)} \neq e^{-\beta K} e^{-\beta\Omega}$$

BCH $\quad e^{-\beta\mathcal{H}} = e^{-\beta(K+\Omega)} = e^{-\beta K} e^{-\beta\Omega} e^{C_0} e^{\beta C_1} e^{\beta^2 C_2}$

$$\partial_\beta e^{-\beta\mathcal{H}} = -(K+\Omega)e^{-\beta(K+\Omega)} \quad \Rightarrow \quad \beta \ll 1$$

$$= -K e^{-\beta K} + \dots$$

$$+ e^{-\beta K}(-\Omega)e^{-\beta\Omega} \dots$$

$$+ e^{-\beta K} e^{-\beta\Omega} e^{C_0} C_1 e^{\beta C_1} + \dots$$

$$+ e^{-\beta K} e^{-\beta\Omega} e^{C_0} e^{\beta C_1} 2\beta C_2 e^{\beta^2 C_2} + \dots$$

$$\beta\to 0 \Rightarrow \quad -(K+\Omega) = -(K+\Omega) + C_1 \qquad C_1 = 0$$

bir kere daha türet $\beta\to 0$ limitine bak!

$$C_0 = 0 \qquad C_1 = 0 \qquad C_2 = \frac{1}{2}[K,\Omega]$$

BS K

$$e^{-\beta(K+\Omega)} \simeq e^{-\beta K} e^{-\beta\Omega} e^{-\frac{1}{2}\beta^2[K,\Omega]}$$

$$Q_N(V,T) = \mathrm{Tr}\left[e^{-\beta K} e^{-\beta\Omega} e^{-\frac{1}{2}\beta^2[K,\Omega]} \right] = \langle \Phi | \quad | \Phi \rangle$$

$$K = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}_i^2 \qquad \Omega = \Omega(1,2,\dots,N)$$

$$[K,\Omega] = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_i [\nabla_i^2, \Omega]$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_i \left(\nabla_i^2\Omega + 2(\nabla_i\Omega)\cdot\nabla_i \right)$$

$$W_{ij} = W(|r_i - r_j|) = W_{ji}$$

$$W(r) = \nabla^2 v(r) \qquad \Omega = \sum_{i<j} v(|r_i - r_j|)$$

$$\nabla_i\Omega = -\vec{F}_{ji} = \vec{F}_{ij}$$

$$Q_N(V,T) = \frac{V^N}{N!\,h^{3N}} \int d^{3N}\vec{r}\, d^{3N}\vec{p}\, |\Phi_p(1,\dots,N)|^2$$

$$\times \exp\left\{ -\beta\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{i\beta\hbar}{2m}\vec{G}_i\cdot\vec{p}_i \right) - \beta\sum_{i<j}\left(v_{ij} - \beta\frac{\hbar^2}{2m}W_{ij} \right) \right\}$$

$$\vec{G}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^{N} \vec{F}_{ji} \qquad \Omega' = \frac{\beta\hbar^2}{2m}\sum_{i<j} W_{ij} \qquad \vec{G}' = \frac{\beta\hbar^2}{2m}\vec{G}$$

$$= \frac{1}{N!\,h^{3N}} \int d^{3N}\vec{r}\, d^{3N}\vec{p}\; e^{-\beta H(p,r) + \beta\Omega'} \times X$$

point ygpuldn

$$X = \sum_P \delta_P \left[f(r_1 - P\vec{r}_1 + \vec{G}_1') \dots f(r_N - P\vec{r}_N + \vec{G}_N') \right]$$

BS K

$$X \simeq \prod_{i=1}^{N} f(\bar G_i') \prod_{i<j} \left[1 \pm \frac{f(\bar r_i - \bar r_j + \bar G_i')\, f(\bar r_j - \bar r_i + \bar G_j')}{f(G_i')\, f(G_j')} \right]$$

fermiyo

$$f \sim e^{-r^2/\lambda}$$

$$Q_N(V,T) = \frac{1}{N!\, h^{3N}} \int d^{3N}\bar r\, d^{3N}\bar p \; e^{-\beta \mathcal{H}_{eff}(r,p)}$$

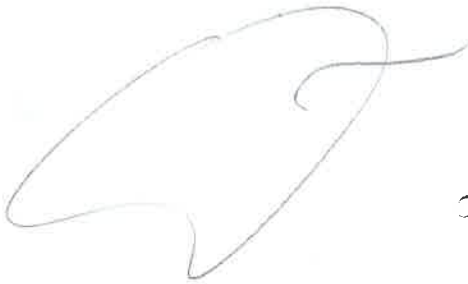
$$\mathcal{H}_{eff}(\bar p, \bar r) = \mathcal{H} + \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3$$

$$\Omega_1 = \sum_{i<j} v_{ij}$$

$$\Omega_2 = \frac{\lambda^2}{4\pi} \sum_{i<j} w_{ij}$$

$$\Omega_3 = \frac{\lambda^2}{16\pi} \sum_{ijk} F_{ji} F_{ik}$$

9.3. Faz Geçişleri ve Singülariteler



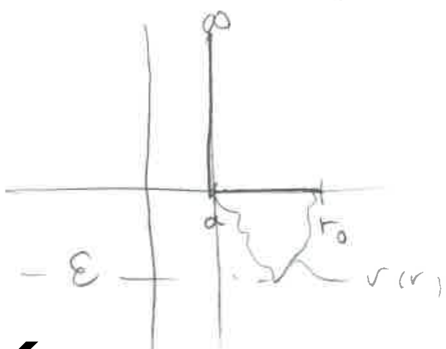
V hacminde N mol olsun.

$$\mathcal{H} = K + \Omega(1, 2, \ldots, N)$$

$$\Omega = \sum_{i<j} v(|\bar r_i - \bar r_j|)$$

moleküller arası pot. olsun.

$$v(r) = \infty \qquad r < a$$
$$= 0 \qquad r \geq r_0$$
$$0 < v < -\varepsilon \qquad a < r < r_0$$



$$Q_N(V,T) = \frac{1}{N!\, h^{3N}} \int d^{3N}p\, d^{3N}q\, e^{-\beta H(p,q)}$$

$$= \frac{1}{N!\, \lambda^{3N}} \int d^{3N}r\, e^{-\beta \Omega} \qquad \lambda = \left(2\pi\hbar^2/mkT\right)^{1/2}$$

$$\mathcal{Z}(z,V,T) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Q_N(V,T)$$

$$\left.\begin{aligned} \beta P &= \frac{1}{V} \ln \mathcal{Z} \\ \frac{1}{v} &= \frac{1}{V} z \frac{\partial}{\partial z} \ln \mathcal{Z} \end{aligned}\right\} \text{durum denklemi parametrik yazım.}$$

maksimum parçacık sayısı belli. $N_m(V)$ V ye konulabilecek maks. parçacık sayısı olsun.

$$N > N_m(V) \Rightarrow Q_N = 0$$

$\mathcal{Z}$ N_m. dereceden bir polinomdur. ✓

$$\mathcal{Z}(z,V,T) = 1 + z Q_1 + \dots z^{N_m} Q_{N_m}$$

tüm $Q_i > 0$ tır. Bu nedenle bu polinomun hiç bir gerçel kökü yoktur.

O zaman Q ye kompleks z-düzleminde bakılır.

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{V} \frac{z Q_1 + z^2 Q_2 + \dots}{1 + z Q_1 + \dots}$$

$$\beta P = \frac{1}{V} \ln \left[1 + z Q_1 + \dots\right]$$

BS K

(a) $P \geq 0$

(b) $\dfrac{V}{N_m} \leq v < \infty$

(c) $\dfrac{\partial P}{\partial v} \leq 0$ $\qquad \dfrac{\partial P}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{1}{vz(\partial v/\partial z)} = \dfrac{kT}{v^4[\langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2]} \leq 0$

$v \to \infty$ iken $\to$ 0 olur. v sbt olarak seçilirse V'yi ∞ a götüreceğiz.

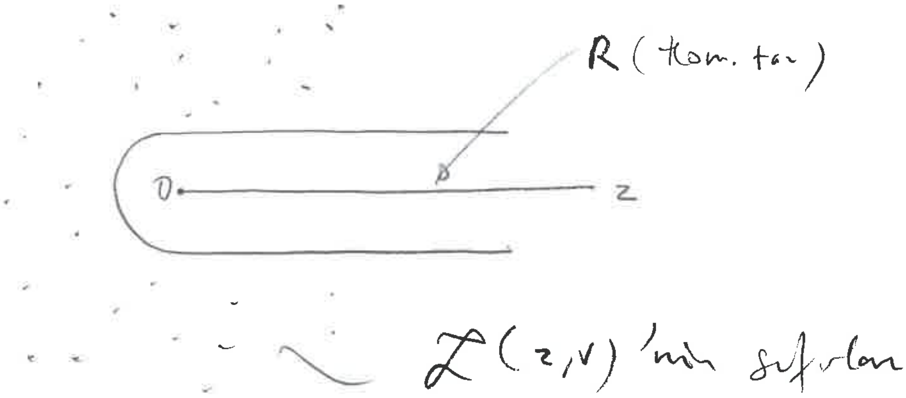
$$\beta P = \lim_{V\to\infty}\left[\frac{1}{V}\ln \mathcal{L}\right]$$

$$\frac{1}{v} = \lim_{V\to\infty}\left[\frac{1}{V} z\,\partial_z \ln \mathcal{L}\right]$$ $\mathcal{L}$ düzgün artan bir fonk. ise $[\lim, \partial_z] = 0$

Yang ve Lee teorisi:

Sonlu V için $\mathcal{L}(z,v,T)=0$'ın kökleri pozitif reel ekseni hariç kompleks z-düzleminde dağılmıştır. $\lim_{V\to\infty}$ halinde bunlardan bazısı z'ye düşerse faz geçişi vardır.

z düzleminde reel (+) z ekseninin bir parçasını içeren ve $\mathcal{L}$'nın sıfırları olmayan bir bölge sadece homojen tek bir faza karşılık gelir.



Teorem: (1)

$$F_\infty(z)=\lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}\ln\mathcal{Z}(z,V,T)$$

Limit tüm $z>0$'lar için vardır ve z'nin sürekli azalmayan bir fonk. udur. Yüzey alanı $V^{2/3}$ den hızlı artmaz ise limit hacimden bağımsızdır.

(2) Kompleks z düzleminde pozitif reel ekseni parçası içeren ve $\mathcal{Z}(z,V,T)=0$ köklerini içermeyen bir bölge (R) olsun. O zaman bu bölgede

$$\frac{1}{V}\ln\mathcal{Z}$$

niceliği $V\to\infty$ iken bir limite doğru düzgün olarak yakınsar. Bu lim R deki tüm z ler için z'nin analitik bir fonk. udur.

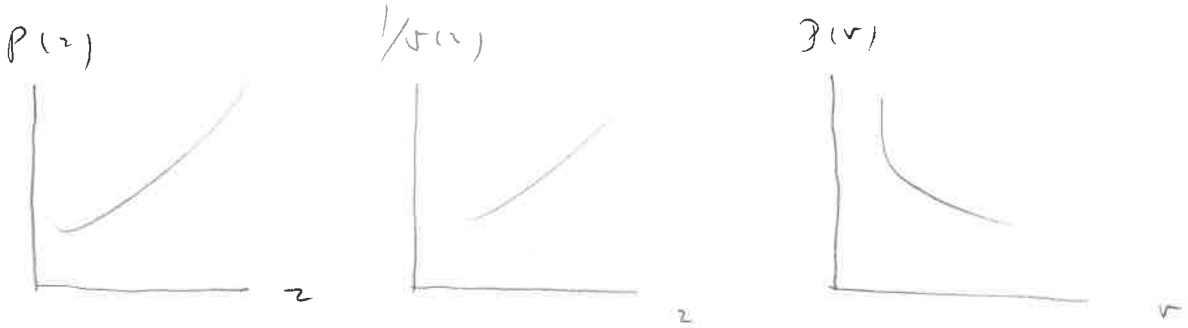
Durum Denk.:

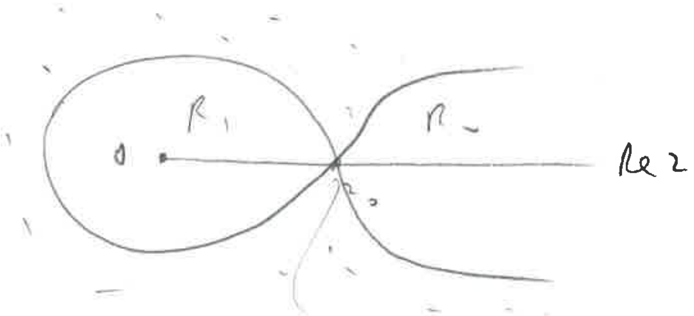
$$\beta P(z)=F_\infty(z)$$

$$\frac{1}{v(z)}=z\partial_z F_\infty(z)$$

$V\to\infty$ (a) (b), (c) ler geçerli tek bir faz geçişi

BS K

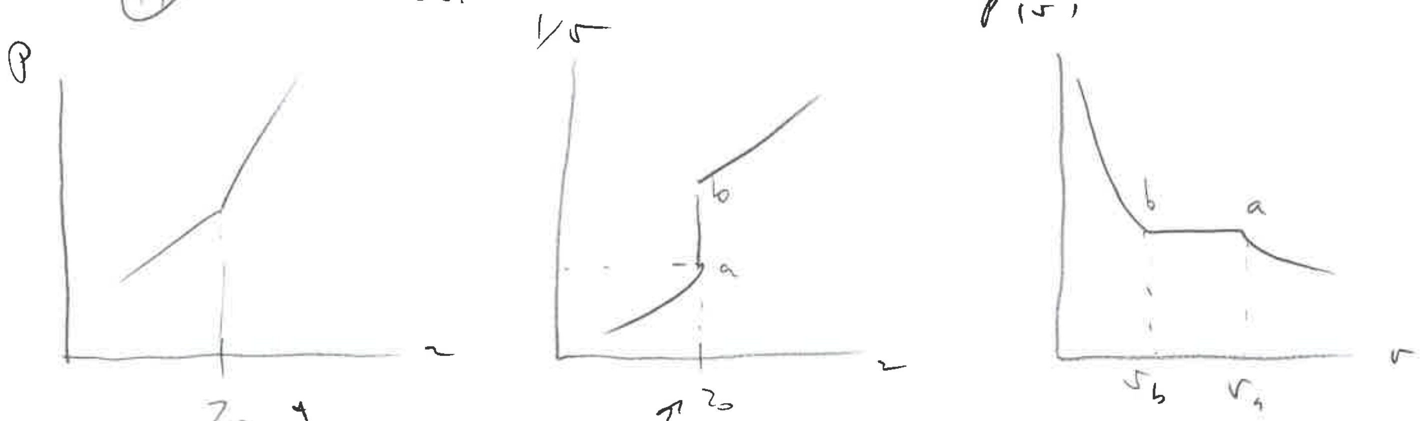




1. mertebeden

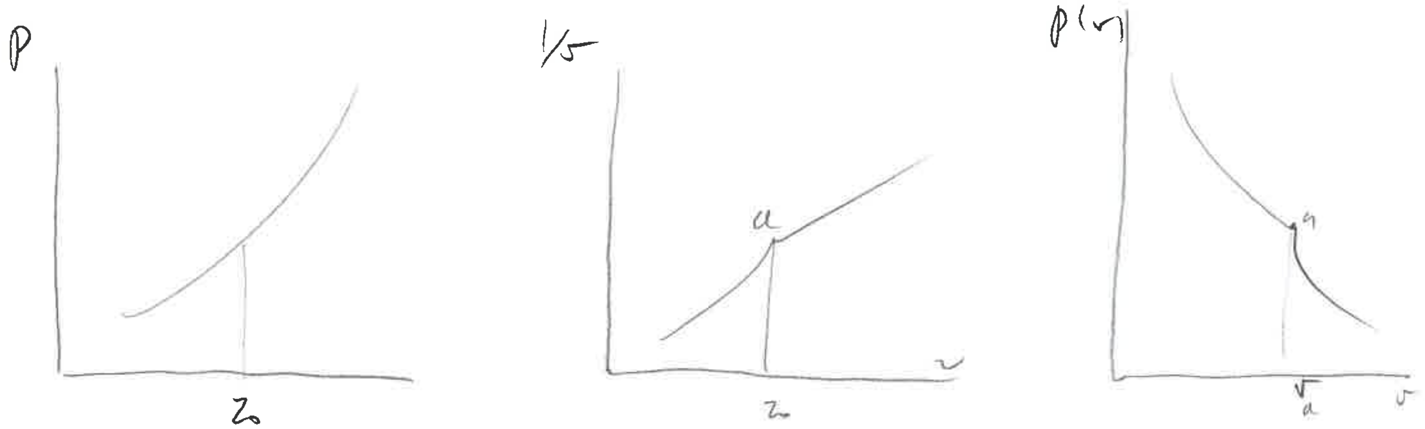
V→∞ iken hacimlerde böl.

⇓



$z = z_0$ da $P(z)$ sürekli türevi süreksiz

2. mertebeden



$\partial P / \partial z \big|_{z_0}$ da süreksiz

$\partial^2 P / \partial z^2 \big|_{z_0}$ kesikli

BS K

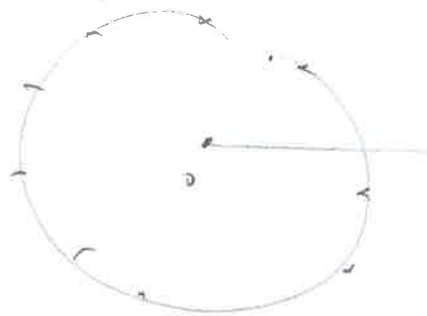
Çekici etkileşmeli örgü gazı (Yang-Lee çember teoremi)

potansiyel : $u = \begin{cases} \infty & \text{iki atom aynı yerde} \\ < 0 & \text{aksi takdirde} \end{cases}$

$Z(z,V)=0$ kökleri kompleks z düzlemi üzerinde birim çember üzerindedir. Sonlu V için kökler çember üzerinde kompleks eşlenik olarak yer alır. $V \to \infty$ alırsak köklerden birisi $z=1$ e yaklaşır.

$Z(z,V)=0$ kökleri z_k ise

$$Z = \prod_k \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \qquad z_k = \cancel{r_k}\, e^{i\theta_k}$$



$$Z(z,V) = \frac{\prod_k (z - e^{i\theta_k})}{\prod_k (-e^{i\theta_k})}$$

$$\frac{1}{V}\ln Z = \frac{1}{V}\sum_k \ln(z - e^{i\theta_k})$$

$$\frac{1}{V}\sum_k \to \int_0^{2\pi} d\theta\, g(\theta) \qquad g(\theta) = g(-\theta)$$

$$\frac{P}{kT} = \int_0^{\pi} d\theta\, g(\theta) \ln(z^2 - 2z\cos\theta + 1)$$

$$= 2z \int_0^{\pi} d\theta\, g(\theta) \frac{z - \cos\theta}{1 - 2z\cos\theta + z^2} \qquad z=1 \quad \theta=0 \text{ fark geçiyor}$$

BS K

$\theta = 0$ $\quad g(0) = 0$ $\quad$ fan geçişi yok

$\quad g(0) \neq 0$ $\quad$ " $\quad$ var.

$g(0) \neq 0$ $\quad z = 1$ de tekil nokta vardır

BS K