

TEMEL OLASILIK KAVRAMLARI

Çok parçacıktan meydana gelen makroskobik sistemlerin anlaşılmasında olasılık tartışmalarının temel bir önem taşıdığını gördük. Bu nedenle olasılığın en temel kavramlarını gözden geçirip, bazı basit fakat önemli problemlere nasıl uygulanabileceğini görelim.

2.1. İstatistik Topluluklar:

Üzerinde deneyler veya gözlemler yapabileceğimiz bir A sistemi alalım. Tek bir deney üzerine söz söylenmese bile büyük sayıda benzer deneyin sonucu üzerine anlamlı öngörüler yapılabilir. Böylece sistemin istatistik anlatımına yani olasılıklar cinsinden anlatımına varır.

Dikkatimizi yalnız ilgilendiğimiz A sistemi üzerinde toplayacağımıza, çok büyük bir N sayısında "benzer" sistemlerden meydana gelen bir topluluğun (kümenin) gözönüne alırız. N keyfi büyüklükte ($N \rightarrow \infty$) kabul edilir. Sistemler her biri A sisteminin sağladığı koşulları aynı sağladığı anda "benzer" sayılırlar. Buna göre ^{her} sistemin A ile aynı şekilde hazırlandığı ve A ile aynı deneye uygulandığı anlaşılar. O zaman deneyin belirli bir sonucunun, hallerin hangisi keri ile meydana geldiğini sayabiliriz. Kesin olmak için koşullar, deneyin birbirinden bağımsız mümkün bütün sonuçlarını birer birer sayabileceğimiz uygun bir şekilde ayarlanır. Deneyin belirli bir sonucunun r ile gösterildiğini ve kümenin N sistemi arasından N_r sisteminin bu sonucu gösterdiğini varsayarsak

$$(N \rightarrow \infty \text{ için}) P_r \equiv \frac{N_r}{N}$$

keri r sonucunun meydana gelme olasılığıdır. Bu tartışma tek bir sistem üzerindeki deneyin mümkün herhangi bir sonucunun meydana gelme olasılığının büyük N sayıda benzer sistemler üzerinde yapılan deneylerle tekrar ile nasıl ölçülebileceğini gösterir. İstatistik bir teoremin görevi deneyin mümkün sonuçlarının herbirinin meydana gelme olasılığını öngörmektir.

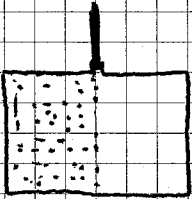
Para Atışı: Bu deneyin mümkün iki sonucu vardır. "yazı", "tura". Deneyin istatistik formülasyonu basittir. N sayıda ($\rightarrow \infty$) benzer paraların meydana getirildiği kümeyi alalım. Paralar benzer şekilde atıldığı zaman sonucu bir yazı olduğu, bir tura olduğu hallerin oranını hesaplayabiliriz. Kesirler sıra ile yazı elde edilmesinin p ve tura elde edilmesinin q ölçülen olasılıklarını verir. Paranın K.M. geometrik mecha ile çabucuk ise deneysel sonuçların yazı ve tura alınmalıdır. $p = q = 1/2$. Daha geniş bir düşünme N paraya atalım. N para kümesi 2^N (herbir paranın 2 mümkün sonucu var) mümkün sonuçtan herhangi birisi olabilir. İlgi çekici diğer bir sonuç da kümedeki paraların n tanesinin yazı $N-n$ tanesinin tura gösterdiği bir sonucu bulma olasılığı olabilir.

Çok parçacıklı sistemlere uygulama:

Çok sayıda parçacıktan meydana gelen makroskobik bir sistem: N molekülü ideal gaz, N spinli sistem, bir sıvı veya baki parçası olabilir. A (tek bir sistem) ya da A' 'ye benzer N sayıdaki kümeyi düşünelim. t anında N sistem üzerinde gözlem yapalım. t anında gözlemin belirli bir sonucunun r sonucunun $P_r(t)$ olasılığını belirleyelim. Bu kümedeki her sistemin filmin çekildiğini düşünerek anlayabiliriz. (N film). Kümedeki k sayılı sistemin, zamanla farklı olarak davranışı k . filme sahne olarak bulunur. Herhangi bir t anında sistem üzerindeki olasılık yitirilebilir, t anında çekilen bütün filmlere sahne olarak bulunur.

Yalıtık bir makroskobik sist., eğer benzer sist.lerin istatistikli kümesi zamanla değişmez ise dengededir demir.

Örnek:



$t > t_0$ anlarında ne olduğunu istatistiksel anlatımını nasıl yapar?

Herhangi bir molekülün kutun sol yarısında bulunma olasılığı $q(t)$ nedir?

veya N tane n 'nin kutun sol yarısında " " $P(n, t)$ " ?

t_0 .

$$P(t_0) = 1 \quad q(t_0) = 0 \quad P(N, t_0) = 1 \quad \text{ve } n \neq N \text{ için } P(n, t_0) = 0$$

Zaman ilerledikçe $p = q = 1/2$.

2.2. Olasılıklar Arasındaki Bağıntılar:

Kümelerdeki N sist. sayısı sonsuz büyük alınacaktır.

Bir A sistemi üzerindeki deneylerin birbirinden ayrı α sonuç verdiğini düşünelim. Böyle her sonuç veya olay r indisi ile gösterebiliriz. r indisi α sayılarından herhangi birini ifade edebilir. $r = 1, 2, 3, \dots, \alpha$. Benzer sist.lerin bir kümesinde N_1 tanesinin 1 olayını, N_2 tanesinin 2 olayını, $\dots$, ve N_α tanesinin α olayını gösterdiği görülür. Bu α olay birbirinden ayrı oldukları ve bütün olayın halleri içine aldıklarından

$$N_1 + N_2 + \dots + N_\alpha = N$$

$$P_1 + P_2 + \dots + P_\alpha = 1 \quad \left(P_r = \frac{N_r}{N} \text{ } r \text{ olayının meydana geliş olasılığı} \right)$$

$$\sum_{r=1}^{\alpha} P_r = 1 \quad (\text{Normalizasyon})$$

r veya s olayının meydana gelme olasılığı nedir? Kümelerde r olayını gösteren N_r ve s olayını gösteren N_s sistem vardır. Böylece $N_r + N_s$ tane ya r ya da s olayını gösteren sistem vardır. Buna karşılık iki şıktan birinin, r veya s olayının meydana geliş olasılığı $P(r \text{ veya } s)$

$$\begin{aligned} P(r \text{ veya } s) &= \frac{N_r + N_s}{N} \\ &= P_r + P_s \end{aligned}$$

Örnek:

Altı yüzlüden birinin eşit $1/6$ olasılığı ile olduğu bir zarın atılışını gözönüne alalım. 1 sayısını gösterme olasılığı 2 sayısını gösterme olasılığı una olduğu gibi aynıdır ve $1/6$ 'dır. Zarın 1 veya 2 sayılarını gösterme olasılığı $1/6 + 1/6 = 1/3$ 'dür.

Bu bağıntı ikiden fazla şıkkı olaylara genelleştirilebilir. Böylece bir kaç olaydan herhangi birinin meydana gelme olasılığı basit olarak herbirinin olasılıkları toplamına eşittir.

Bağıl Olasılıklar :

Gözönündeki sistemin farklı iki tip olaya yani r ile belirtilen ($r=1,2,\dots,\alpha$) α tane mümkün olay tipini ve s ile belirtilen ($s=1,2,\dots,\beta$) β tane mümkün olay tipini gösterebileceğini düşünelim. P_{rs} ile hem r ve hem de s olaylarının birlikte meydana geliş olasılığını göstereceğiz. Yani büyük N sayı da benzer sistemden meydana gelmiş bir kümede N_{rs} tane sistem hem 1. tip r olayının hem de 2. tip s olayının meydana geliş ile karakterize edilir. O zaman $P_{rs} = N_{rs}/N$ olur. P_r ile s tipi olayların meydana geliş olasılığından bağımsız olarak r olayının meydana geliş olasılığını gösteriyoruz. $P_r = N_r/N$. Benzeri P_s için geçerlidir.

Özel fakat önemli bir halde, s tipi olayın meydana gelişinin r tipi bir olayın meydana geliş veya meydana gelmesi ile etkilendiği haldir. O zaman r ve s tipi olaylara istatistik bağımsız veya bağımlıdır denir. Şimdi kümede belirli herhangi bir r olayını gösteren N_r tane sistem olsun. Bu sist.lerin r 'nin belirli değerinden bağımsız olan P_s hem de s olayını gösterecek. Böylece hem r ve hem de s 'yi birlikte gösteren N_{rs} sayım,

$$N_{rs} = N_r P_s$$

Buna karşılık hem r ve hem de s 'nin birlikte meydana geliş olasılığı

$$P_{rs} = \frac{N_{rs}}{N} = \frac{N_r}{N} P_s = P_r P_s \quad r \text{ ve } s \text{ istatistik bağımsız.}$$

Örnek:

$A = A_1 + A_2$ zarlarından oluşsun. r tipeli bir olay A_1 zarının 6 yüzünden herhangi birinin üstte görünmesi iken s de A_2 zarının 6 yüzünden herhangi birinin üstte görünmesi olasılık. O zaman A sist. nin bir olayı A_1 ve A_2 zarlarının hangi yüzlerde üstte oldukları söylenerek belirtilir. $6 \times 6 = 36$ mümkün sonuç var.

$$P_{rs} = P_r P_s = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Eğer zarlar birbirleri ile etkilenseler ve tamamen özdeş şekilde atılmalara ise istatistik bağımsızdırlar.

2.3. Binom Dağılımı :

μ_0 manyetik momentinin bağlı olduğu N tane $1/2$ spinli ideal bir sistemi gözönüne alalım. Ve bu sistem $\vec{B}$ dış manyetik alanı içine yerleştirilsin. O zaman her manyetik moment ya $\vec{B}$ 'ye paralel ya da antiparalel olacaktır. Spin sisteminin dengede olduğunu varsayalım. Böyle N spin sist. inden meydana gelen istatistik bir küme zamandan bağımsızdır. Tek bir spin üzerine dikkatimizi toplarsak p ile manyetik momentinin yukarı, q ile de aşağı doğru almasının olasılığını gösterirsek

$$p + q = 1$$

veya $q = 1 - p$. $\vec{B} = 0$ iken $p = q = 1/2$. Alan varlığında $\vec{\mu}_0$ daha çok $\vec{\mu}_0 \parallel \vec{B}$ iktir yani $p > q$. Spin sistemi ideal olduğunda aralıklı olarak etkilenebilir hemen hemen örensizdir. Dolayısıyla yönelimleri istatistik bağımsızdır.

Spin sisteminin N manyetik momenti arasında n ile yukarı alan n' ile de aşağı alan manyetik mom. leri sayısını göstererek,

$$n + n' = N$$

$n' = N - n$. istatistik kümedeki spin sist. leri alalım. Yukarı alan mom. leri n sayısını her sistemde farklıdır. $n = 0, 1, 2, \dots, N$ değerlerinden herhangi birini alabilir. O zaman soru şudur : n 'nin her mümkün değeri için N manyetik mom. den n 'sinin yukarı almasının olasılığı $P(n)$ nedir?

Herhangi bir manyetik momentin yukarı alma olasılığı p , aşağı alma olasılığı $q = 1 - p$ 'dir. Bütün manyetik momentler istatistik bağımsız oldukları için

$$\left[\begin{array}{l} N \text{ mom. in yukarı gelmesi} \\ \text{hemen } n' \text{ 'nin aşağı doğru} \\ \text{bir özel görünüşü} \\ \text{meydana gelme olasılığı} \end{array} \right] = \underbrace{p p \dots p}_n \underbrace{q q \dots q}_{n'} = p^n q^{n'}$$

$C_N(n) \equiv N$ mom. in n tanesinin yukarı alanın gerçekleşme sayısını.

N moment 'den n 'sinin yukarı almasının istenen $P(n)$ olasılığı, $C_N(n)$ 'nin ya 1. veya 2. veya sayısının mümkün şekillerden birinin gerçekleşme olasılığına eşittir. $P(n)$ yukarıdaki olasılığı $C_N(n)$ mümkün görünüşlerinden toplanması yani bütün $C_N(n)$

ile carparak elde edilir.

$$P(n) = C_n(n) p^n q^{N-n} \quad ; \quad n' = N-n$$

Yalnız keyfi N ve n için $C_n(n)$ görünüş sayısını hesaplıyoruz.

1	2	3	4	n	n'	$C_n(n)$	N mom. in mümkün bütün görünüşlerini	1	2	3	4	
U	U	U	U	4	0	1	yazdığımız soldaki çizelgeye benzer soldaki çizelgeyi görünüşüne aldığımızı varsa	$U_1 U_2 D D$				a
U	U	U	D	3	1		yalnız $C_n(n)$ U harfinin n defa görüldüğü hallerin sayısını gösterir. Böyle	$U_1 D U_2 D$				b
U	U	D	U	3	1	4	kac tane hal aldığını bulmak için, ya	$U_1 D D U_2$				c
U	D	U	U	3	1		karşılaşan n tane mom. alalım ve	$U_2 U_1 D D$				a
D	U	U	U	3	1		ve bunları $U_1, \dots, U_n$ ile gösterelim.	$D U_1 U_2 D$				d
U	U	D	D	2	2		Bunları (yandaki çizelgeye $N=4$ $n=2$ için	$D U_1 D U_2$				e
U	D	U	D	2	2	6	halinde olduğu gibi) kaç şekilde yazabiliriz.	$U_2 D U_1 D$				b
U	D	D	U	2	2			$D U_2 U_1 D$				d
D	U	U	D	2	2			$D D U_1 U_2$				f
D	U	D	U	2	2			$U_2 D D U_1$				c
D	D	U	U	2	2			$D U_2 D U_1$				e
U	D	D	D	1	3			$D D U_2 U_1$				f
D	U	D	D	1	3	4						
D	D	U	D	1	3							
D	D	D	U	1	3							
D	D	D	D	0	4	1						

- U_1 tablonun bir satırındaki N farklı yerden herhangi birine yazılabilir.
- U_1 'in her konumu için U_2 harfi geri kalan $N-1$ yerden herhangi birine yazılabilir
- U_1 ve U_2 'nin mümkün her konumu için U_3 geri kalan $N-2$ " " "
- $U_1, \dots, U_{n-1}$ 'in her konumu için U_n geri kalan $(N-n+1)$ yerden herhangi "

Bu şekilde oluşturulan tablodaki farklı girişlerin sayısı (mümkün) $J_N(n)$, $U_1, \dots, U_n$ harflerinin mümkün yerleşme sayısına eşittir.

$$J_N(n) = N(N-1) \dots ((N-n)+1)$$

$$= \frac{N(N-1) \dots (N-n+1)(N-n) \dots (1)}{(N-n)(N-n-1) \dots (1)} = \frac{N!}{(N-n)!}$$

Ayrıntı olmayan durumlar ekersik gelir. n alt indisinin mümkün permutasyon sayısı $n!$ olduğuna göre eğer yalnız eşdeğer olmayan haller görünüşe alınacak ise soldaki çizelge $n!$ tane farklı hal göstermektedir. (ile alt indis n mümkün deperden herhangi birini, ... ve n. alt indis geri kalan tek deperi alabilir $n(n-1) \dots (1) \equiv n!$

İstenen yukarı ve aşağı momentlerin belirli görünümlerinin $C_N(n)$ sayının 0 zaman $J_N(n)$ 'yi $n!$ ile bölünce elde edilir.

$$C_N(n) = \frac{J_N(n)}{n!} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

$$P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \quad (\text{Binom Dağılımı})$$

$$= \frac{N!}{n!n'!} p^n q^{n'} \quad n' = N-n$$

Özel olarak $p=q=1/2 \Rightarrow P(n) = \frac{N!}{n!n'!} \left(\frac{1}{2}\right)^N$

Uygama: $(p+q)^N$ şeklindeki bir ifadenin binom açılımında $p^n q^{N-n}$ terimi min sayının p çarpanını tam n kere q çarpanını $(N-n)$ kere içine alan terimlerin $C_N(n)$ sayısına eşittir.

$$(p+q)^N = \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}$$

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!} x^2 + \dots$$

$$(p+q)^N = q^N \left(1 + \frac{p}{q}\right)^N = q^N + N p q^{N-1} + \frac{N(N-1)}{2!} p^2 q^{N-2} + \dots$$

teradifen $p+q=1$ olduğundan $\sum_{n=0}^N P(n) = 1$.

Tartışma: $P(n)$ min n 'ye bağımlılığı incelemek için $C_N(n)$ davranışını bilmemiz gerekir. $C_N(n)$ n ve $N-n=n'$ altında simetrik

$$C_N(n') = C_N(n)$$

Ayrıca $C_N(0) = C_N(N) = 1$

$$\text{ve} \quad \frac{C_N(n+1)}{C_N(n)} = \frac{n!(N-n)!}{(n+1)!(N-n-1)!} = \frac{n!(N-n)(N-n-1)!}{(n+1)n!(N-n-1)!} = \frac{N-n}{n+1}$$

$n=0$ ile başlayarak ardarda gelen $C_N(n)$ katarlarının oranı başlangıçta N mertesinde de ileri sürer geçer. $n < \frac{1}{2}N$ için $\frac{N-n}{n+1} > 1$ dir $n \geq \frac{1}{2}N$ için < 1 olur. $C_N(n)$ $N/2$ civarında bir maks. a sahiptir.

$$p = q = \frac{1}{2} \Rightarrow P(n') = P(n).$$

$\vec{B} = 0$ iken uzayda belirli yön yoktur ve $P(n)$ $n = N/2$ yakınında bir maks. a sahiptir (N çift ise $N/2$ dardır.)

Bir spin sisteminin manyetik momenti deneysel olarak hemen ölçülebilen bir niceliktir. "Yukarı" yöndeki toplam manyetik momenti M ile gösterelim. M hütün N spinin manyetik momentinin "yukarı" yöndeki bileşenlerinin cebirsel toplamı olduğun için ve μ_0 spinin manyetik mom. inin büyüklüğünü göstermek üzere

$$M = n\mu_0 - n'\mu_0 = (n - n')\mu_0$$

$$= m\mu_0$$

$$m \equiv n - n'$$

$m = M/\mu_0$ uisinden ölçülebilen toplam manyetik mom. dir.

$$m = n - n' = n - (N - n) = 2n - N$$

Bu terasla ifen, m 'nin mümkün değersinin N tek iken tek ve N çift iken çift olması gerektiğini gösterir.

$$n = \frac{1}{2} (N + m)$$

0 zaman M 'nin belirli bir değeri almasının $P'(m)$ olasılığı

$$P'(m) = P\left(\frac{N+m}{2}\right)$$

Bu ifade spin sisteminin toplam manyetik mom. inin herhangi bir mümkün değeri alma olasılığını verir. $p = q = 1/2$ olduğun özel halde

$$P'(m) = \frac{N!}{\left(\frac{N+m}{2}\right)! \left(\frac{N-m}{2}\right)!} \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

0 zaman en olası durum M 'nin sıfır olduğun $m = 0$ veya yakınıdadır.

Binom dağılımının genelliği:

İstatistikî olarak bağımsız N olay verilsin. Böyle her olayın p olasılığı ile olageldiğini varsayalım; böylece olagelme olasılığı $q=1-p$ ile verilir. O zaman N olaydan n 'sinin olagelmesinin (geri kalanının olagelmediği) $P(n)$ olasılığı nedir? Binom dağılımı.

2.4 Ortalama Değerler:

Herhangi bir sistemin bir u değişkeninin mümkün

$$u_1, u_2, \dots, u_\alpha$$

gibi α ayrı değerden herbirini

$$P_1, P_2, \dots, P_\alpha$$

olasılıklar ile aldığı varsayalım. P_n , benzer N sistemli ($N \rightarrow \infty$) bir kümede, u değişkeni belirli u_r değerini bu sistemlerden $N_r = NP_r$ taneinde alır demektir. u değişkeninin α tane u_r değerinden hepsi için P_r olasılıklarının belirtilmesi sistemin en mühim mülakatını verir. Bununla birlikte kümede u 'nun mümkün değerlerinin daha az ayrıntılı bir şekilde dağılımını karakterize eden parametreleri tanımlamak yerinde olur. Bunlar ortalama değerlerdir. Kümede u 'nun ortalama değeri her mümkün u_r değerini kümede bu değeri alan sistem sayısı N_r ile çarpıp, u 'nun mümkün bütün değerleri için bu çarpımları toplayıp kümedeki toplam sist. sayısına bölerek bulunur.

$$\bar{u} = \frac{N_1 u_1 + N_2 u_2 + \dots + N_\alpha u_\alpha}{N} = \frac{\sum_{r=1}^{\alpha} N_r u_r}{N}$$

$$= \sum_{r=1}^{\alpha} P_r u_r$$

$$\boxed{\bar{u} \equiv \sum_{r=1}^{\alpha} P_r u_r}$$

Benzer şekilde $f(u)$ 'nün herhangi bir fonksiyonu ise f 'nin ort. değeri

$$\bar{f}(u) \equiv \sum_{r=1}^{\infty} P_r f(u_r)$$

Örneğin; $f(u)$ ve $g(u)$ 'nün herhangi iki fonksiyonu ise

$$\begin{aligned} \overline{f+g} &\equiv \sum_{r=1}^{\infty} P_r (f+g)(u_r) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} P_r f(u_r) + \sum_{r=1}^{\infty} P_r g(u_r) = \bar{f} + \bar{g} \end{aligned}$$

; $C = \text{sbt}$ ise

$$C \bar{f} = \sum_{r=1}^{\infty} P_r C f(u_r) = C \bar{f}$$

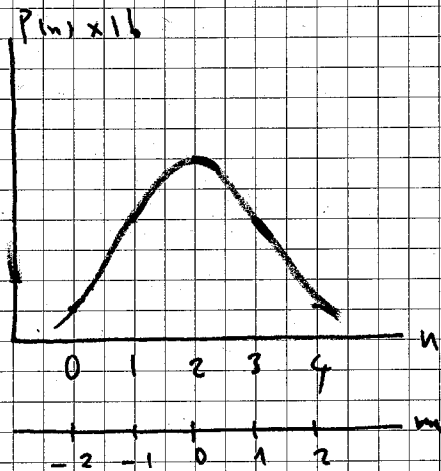
Örnek:

$p=q=1/2$ olan 4 spinli sist. alalım. Yukarı doğru olan moment. sayım

$n=0,1,2,3,4$.

$$P(n) = \frac{N!}{n!n!} \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

$$N=4 \Rightarrow \begin{cases} P(n=0) = 1/16 \\ P(n=1) = 4/16 \\ P(n=2) = 6/16 \\ P(n=3) = 4/16 \\ P(n=4) = 1/16 \end{cases}$$



Yukarı doğru olan momentlerin ort. sayım ;

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^4 P(n)n = \left(\frac{1}{16} \times 0\right) + \left(\frac{4}{16} \times 1\right) + \left(\frac{6}{16} \times 2\right) + \left(\frac{4}{16} \times 3\right) + \left(\frac{1}{16} \times 4\right) = 2$$

$$\bar{n}' = \overline{N-n} = \bar{N} - \bar{n} = 4 - 2 = 2$$

$$\bar{m} = \overline{n-n'} = \bar{n} - \bar{n}' = 2 - 2 = 0$$

$$= \sum_{m=-2}^{+2} P'(m) m = 0$$

$u_1, u_2, \dots, u_x$ } değerlerini alan u ve v gibi değişkenlerin
 $v_1, v_2, \dots, v_p$ } kullanıldığını düşünelim.

P_r : u 'nın r değerini alma olasılığı

P_s : v nin s " " " " " gösterelim.

u ve v değişkenleri istatistik bağımsız ise hem r ve hem de s 'nin birlikte meydana gelme olasılıkları

$$P_{rs} = P_r P_s$$

$f(u)$: u 'nın herhangi bir fonk.'n $g(v)$ 'de v 'nin herhangi bir fonk.'n alması.

$$\begin{aligned}
 \overline{f(u)g(v)} &= \sum_{r=1}^x \sum_{s=1}^p P_{rs} f(u_r) g(v_s) \\
 &= \sum_r \sum_s P_r P_s f(u_r) g(v_s) \\
 &= \left[\sum_r P_r f(u_r) \right] \left[\sum_s P_s g(v_s) \right]
 \end{aligned}$$

u ve v istatistik bağımsız iseler

$$\overline{fg} = \overline{f} \overline{g}$$

Dağılganlık :

Bir u değişkeninin u_r mümkün değerlerini P_r olasılıklarla aldığını varsayalım. $\bar{u}$ değeri (parametresi) u_r değerlerinin etrafında dağıldığı u 'nın merkezi değerini gösterir. O zaman Δu u 'nın $\bar{u}$ 'den sapmasını gösterecek şekilde

$$\Delta u \equiv u - \bar{u}$$

$$\overline{\Delta u} = \overline{(u - \bar{u})} = \bar{u} - \bar{u} = 0$$

$$\overline{(\Delta u)^2} \equiv \sum_{r=1}^x P_r (\Delta u_r)^2 \equiv \sum_{r=1}^x P_r (u_r - \bar{u})^2 \geq 0 \quad \text{'nın dağılganlığı (veya değisişi)}$$

$$\Delta u \equiv \left[\overline{(\Delta u)^2} \right]^{1/2}$$

u 'nin standart sapması

Örnek:

$p = q = \frac{1}{2}$ olan 4 spinli örnek. $n=2$ olduğunda n 'nin dağılımı

$$\overline{(\Delta n)^2} \equiv \sum_n P(n) (n-2)^2$$

$$= \left(\frac{1}{16}\right) \times (-2)^2 + \left(\frac{4}{16}\right) \times (-1)^2 + \left(\frac{6}{16}\right) \times (0)^2 + \left(\frac{4}{16}\right) \times (1)^2 + \left(\frac{1}{16}\right) \times (2)^2$$

$$= 1$$

n 'nin standart sapması $\Delta n = \sqrt{1} = 1$

Manyetik mom. n dağılımı $m=0$ olduğundan

$$\overline{(\Delta m)^2} \equiv \sum_m P'(m) (m-0)^2$$

$$= \left(\frac{1}{16}\right) \times (-4)^2 + \left(\frac{4}{16}\right) \times (-2)^2 + \left(\frac{6}{16}\right) \times (0)^2 + \left(\frac{4}{16}\right) \times (2)^2 + \left(\frac{1}{16}\right) \times (4)^2$$

$$= 4$$

$$\Delta m = \sqrt{4} = 2$$

Not: $\bar{n} = \bar{n}' = 2$ iken $m=0$ olduğundan m ve n 'in tüm değerleri için

$$\Delta m = m = n - n' = n - (4 - n) = 2n - 4 = 2(n - 2)$$

$$= 2(n - \bar{n}) = 2 \Delta n \Rightarrow \overline{(\Delta m)^2} = \overline{(\Delta n)^2}$$

2.5. Bir Spin Sistemi için Ort. Değerlerin Hesabı :

N tane $1/2$ spinli ideal sistem. (istatistik bağımsız). Bu spin sisteminin yukarı yöndeki M manyetik momentini araştıralım. i . spinin yukarı yönündeki bileşenini μ_i ile gösterelim

$$M = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_N$$

$$= \sum_{i=1}^N \mu_i$$

M 'nin ort. değerini ve dağılımını hesaplamak istiyoruz.

$$\bar{M} = \overline{\sum_{i=1}^N \mu_i} = \sum_{i=1}^N \bar{\mu}_i \quad ; \quad (\overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g})$$

Herhangi bir manyetik mom.'in verilen bir yönelmesinin (yukarı veya aşağı olması) olasılığı her moment için aynıdır. $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = \dots = \bar{\mu}_N = \bar{\mu}$

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^N \bar{\mu} = N \bar{\mu}$$

M 'nin dağılımı için: $\Delta M \equiv M - \bar{M}$

$$M - \bar{M} = \sum_{i=1}^N (\mu_i - \bar{\mu}) = \sum_{i=1}^N \Delta \mu_i \quad , \quad \Delta \mu_i \equiv \mu_i - \bar{\mu}$$

$$(\Delta M)^2 = (\Delta \mu_1 + \Delta \mu_2 + \dots + \Delta \mu_N)(\Delta \mu_1 + \Delta \mu_2 + \dots + \Delta \mu_N)$$

$$= (\Delta \mu_1)^2 + (\Delta \mu_2)^2 + \dots + (\Delta \mu_N)^2$$

$$+ [\Delta \mu_1 \Delta \mu_2 + \Delta \mu_1 \Delta \mu_3 + \dots + \Delta \mu_1 \Delta \mu_N]$$

$$+ [\Delta \mu_2 \Delta \mu_1 + \Delta \mu_2 \Delta \mu_3 + \dots + \Delta \mu_2 \Delta \mu_{N-1}]$$

$$= \sum_{i=1}^N (\Delta \mu_i)^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N (\Delta \mu_i)(\Delta \mu_j)$$

$\overline{(\Delta \mu_i)(\Delta \mu_j)} = \overline{(\Delta \mu_i)(\Delta \mu_i)}$
ista. bağımsız.

$$\overline{(\Delta M)^2} = \sum_{i=1}^N \overline{(\Delta \mu_i)^2} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \overline{(\Delta \mu_i)(\Delta \mu_j)}$$

$$i \neq j \text{ için } (\overline{\Delta \mu_i})(\overline{\Delta \mu_j}) = (\overline{\Delta \mu_i})(\overline{\Delta \mu_j}) = 0$$

$$\text{Çünkü } \overline{\Delta \mu_i} = \overline{\mu_i} - \overline{\mu} = \overline{\mu} - \overline{\mu} = 0$$

$$(\overline{\Delta M})^2 = \sum_{i=1}^N (\overline{\Delta \mu_i})^2$$

Herhangi bir mom. in herhangi bir yönüne alma olasılığı her mom. için aynıdır; böylece $(\overline{\Delta \mu_i})^2$ dağılımı her spin için aynıdır.

$$(\overline{\Delta \mu_1})^2 = (\overline{\Delta \mu_2})^2 = \dots = (\overline{\Delta \mu_N})^2 = (\overline{\Delta \mu})^2$$

$$\Rightarrow (\overline{\Delta M})^2 = \sum_{i=1}^N (\overline{\Delta \mu})^2 = N (\overline{\Delta \mu})^2$$

$$\boxed{\Delta M = \sqrt{N} (\Delta \mu)} \quad , \quad \boxed{(\Delta M)^2 = N (\Delta \mu)^2}$$

Burada

$$\Delta M = [(\overline{\Delta M})^2]^{1/2} \quad \Delta \mu = [(\overline{\Delta \mu})^2]^{1/2}$$

Toplam manyetik mom. in ve spin başına many. mom. in standart sapmaları.

M ile karşılaştırılınca ΔM 'in bağıl büyüklüğü

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{\sqrt{N} (\Delta \mu)}{N \overline{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{\Delta \mu}{\overline{\mu}} \right)$$

$N^{-1/2}$ ile azalır.

1/2 Spinli Parçacıklar Sistemi

Manyetik momentin $\mu_i = \mu_0$ olacak şekilde yukarı doğru olma olasılığını p ve $\mu_i = -\mu_0$ olacak biçimde aşağı doğru olma olasılığını $q = 1-p$ sayıyoruz. Zuhun yönündeki ortalama moment

$$\bar{\mu} = p\mu_0 + q(-\mu_0) = (p-q)\mu_0 = (2p-1)\mu_0$$

$p=q$ simetrik halde $\bar{\mu} = 0$. Bir spinin manyetik momentinin dağılımı

$$(\Delta\mu)^2 = (\mu - \bar{\mu})^2 = p(\mu_0 - \bar{\mu})^2 + q(-\mu_0 - \bar{\mu})^2$$

$$\begin{cases} \mu_0 - \bar{\mu} = \mu_0 - (2p-1)\mu_0 = 2\mu_0(1-p) = 2\mu_0 q \\ \mu_0 + \bar{\mu} = \mu_0 + (2p-1)\mu_0 = 2\mu_0 p \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\Delta\mu)^2 = p(2\mu_0 q)^2 + q(2\mu_0 p)^2 = 4\mu_0^2 pq \stackrel{①}{=} (p+q)$$

$$(\Delta\mu)^2 = 4pq\mu_0^2$$

$$\bar{M} = N\bar{\mu} = N(p-q)\mu_0$$

$$(\Delta M)^2 = N(\Delta\mu)^2 = 4Npq\mu_0^2$$

$$\Delta M = \sqrt{N} \Delta\mu = 2\sqrt{Npq}\mu_0$$

$m = M/\mu_0$ tam sayı toplam manyetik momenti μ_0 birimleri cinsinden verecek şekilde $M = m\mu_0$ yazarsak

$$\bar{m} = N(p-q) = N(2p-1)$$

$$(\Delta m)^2 = 4Npq$$

$$\Delta m = 2\sqrt{Npq}$$

Örnek:

Uygulanan $\vec{B}$ manyetik alan karşısında spinlerin yukarı yönüne olasılığı $p=0.51$ ile $\vec{B}$ 'ye paralel $q=0.49$ ile $\vec{B}$ 'ye antiparalel alın. N spinli sistem için ortal manyetik mom.,

$$\bar{M} = N(p-q)\mu_0 = 0.02 N\mu_0$$

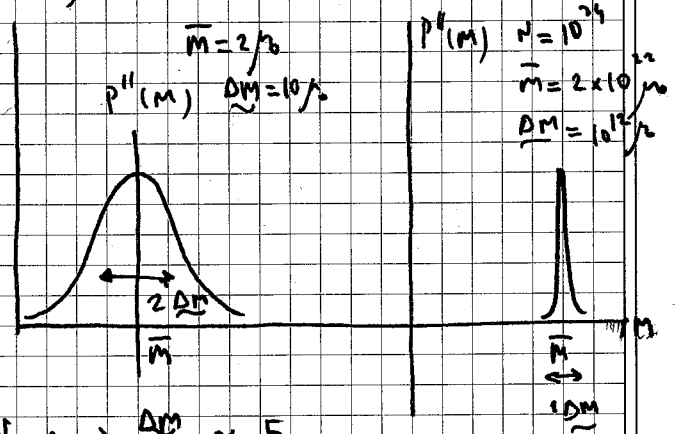
standart sapması,

$$\Delta M = 2\sqrt{Npq}\mu_0 \approx \sqrt{N}\mu_0$$

göreceli dağılıklık,

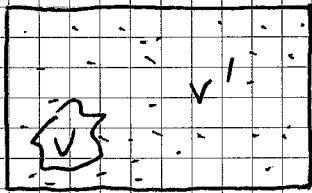
$$\frac{\Delta M}{\bar{M}} = \frac{\mu_0 \sqrt{N}}{0.02 N\mu_0} = \frac{50}{\sqrt{N}}$$

$$N=100 \Rightarrow \frac{\Delta M}{\bar{M}} \approx 5$$



N çokluca sistem içindeki dalgalanmalar küçük olacaktır.

İdeal Gazda Moleküllerin Dağılımı,



V alt hacminde bulunan molekül sayısı n' 'yi hesapla.

Gaz dengede ise V hacminde molekül bulunan p olasılığı

$$N = n + n'$$

$$n - n' = m \text{ alın.}$$

$$p = \frac{n}{N} \rightarrow p = \frac{V}{V_0}$$

$$\bar{n} = Np$$

$$\bar{n} = N - \bar{n}' = N - \bar{n} + \bar{m}$$

$$\Rightarrow 2\bar{n} = N + \bar{m}$$

$$\bar{n} = \frac{1}{2}(N + \bar{m})$$

$$= \frac{1}{2}N(1 + p - q)$$

$$= Np$$

$$= 1 - p$$

$$\Delta n \equiv n - \bar{n} = \frac{1}{2}(N + \bar{m}) - \frac{1}{2}(N + \bar{m}) = \frac{1}{2}(m - \bar{m})$$

$$\Delta n = \frac{1}{2}\Delta m$$

$$(\Delta n)^2 = \frac{1}{4}(\Delta m)^2 \approx Npq$$

$$(\Delta n) = \sqrt{Npq}$$

Göreceli sapma

$$\frac{\Delta n}{\bar{n}} = \frac{\sqrt{Npq}}{Np} = \sqrt{\frac{q}{pN}}$$

$$p=q=1/2 \Rightarrow \frac{\Delta n}{\bar{n}} = N^{-1/2}$$

2.6. Sürekli Olasılık Dağılımları:

Çok büyük N tane $1/2$ spin'den oluşan ideal bir spin sistemini elelim. Toplam manyetizasyon

$$M = m\mu_0 = (2n - N)\mu_0$$

böylece M , $(N+1)$ mümkün değerden herhangi birini alabilir.

$$M = -N\mu_0, (2-N)\mu_0, (4-N)\mu_0, \dots, (N-4)\mu_0, (N-2)\mu_0, N\mu_0$$

(N+1)

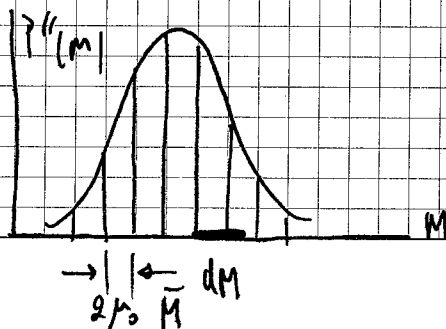
Toplam manyetik mom.'ün belirli bir M değerini almasının $P''(M)$ olasılığı karşılık gelen n veya n değerinin gelir olasılığına $P'(n)$ 'ye veya $P(n)$ 'ye eşittir.

$$P''(M) = P'(n) = P(n)$$

$$n = \frac{M}{\mu_0}, \quad n = \frac{1}{2}(N+m)$$

$P''(M)$ olasılığı M 'nin bir değerinden yarımdaki değere geçmesinde forklantacak kadar değişmez, yani

$$|P''(M+2\mu_0) - P''(M)| \ll P''(M)$$



M ile $M+dM$ arasında toplam manyetik mom.'ün dağılımı olasılığı nedir?

$$P(M)dM \text{ kadardır.}$$

↑ olasılık yoğunluğu.

$\frac{dM}{2\mu_0}$ manyetik mom. sayımı ver.

Tukandaki elastik toplam manyetik mom. in M keneli değeri $P''(M)$ olma elastikliğinin içinde ifade edilebilir. Elastik küçük dM miktarında çok fazla değiştiğinden M ile $M+dM$ arasında M 'in miktarı değeri aynı $P''(M)$ olduğu ile belirlir. Böylece

$$P''(M) \cdot \frac{dM}{2\mu_0} = P'(M) dM.$$

2.1. 3 zar ile 6 veya daha az atma olasılığı nedir?

n	Z ₁	Z ₂	Z ₃	C _N (n)
3	1	1	1	1
4	1	1	2	3
4	1	2	1	
4	2	1	1	
5	1	1	3	6
5	1	3	1	
5	3	1	1	
5	1	2	2	
5	2	1	2	
5	2	2	1	10
6	1	1	4	
6	1	4	1	
6	4	1	1	
6	1	2	3	
6	1	3	2	
6	3	2	1	
6	2	1	3	
6	3	1	2	
6	2	3	1	
6	2	2	2	

$$\sum_{6 <} C_N(n) = 20$$

tüm sonuçların sayı $6 \times 6 \times 6 = 216$

$$P(6 <) = \frac{20}{216} = 0.092$$

2.2. Bir sayı 0 ile 1 arasında gelişi güzel seçiliyor. İlk 10 ondalık basamağından tam 5'inin 5'den küçük sayılardan meydana gelmesinin olasılığı nedir?

0, X X X X X X X X X X

0, 1, 2, 3, 4 bunlardan birini kayma olasılığı $1/10$. Bunların tümünün bulunma olasılığı

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$p = q = \frac{1}{2}$$

5, 6, 7, 8, 9 da $1/2$ olasılıkla.

$$P(5) = \frac{10!}{5! (10-5)!} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0.25$$

2.3. Bir zarın her yüzünün eşit şansa üste gelebileceğini varsayalım. Böyle 5 zarın atılması ile ilgili bir oyun gözüne alınız. "6"nın (a) yalnız tek bir zarla, (b) en az bir zarla, (c) tam iki zarla üste gelme olasılığı bulunuz.

a. Bir zarla "6" gelme olasılığı $p = 1/6$
 " " "6" gelme " " $q = 5/6$

$$P(1) = \frac{5!}{1! 4!} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.4$$

b. -

$$P(0) = \frac{5!}{0! 5!} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0.4 \quad P(\text{en az bir}) = 1 - P(0) = 0.6$$

c. -

$$P(2) = \frac{5!}{2! 3!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.16$$

2.8. Ortalama değerin genel özelliklerini kullanarak u 'nın dağılımının $(\Delta u)^2 \equiv (\overline{u - \bar{u}})^2 = \overline{u^2} - \bar{u}^2$ genel bağıntısı ile hesaplanabileceğini gösteriniz. $\overline{u^2} \geq \bar{u}^2$ olduğunu gösteriniz.

$$\begin{aligned} (\Delta u)^2 &= (\overline{u - \bar{u}})^2 = \overline{(u - \bar{u})^2} = \overline{u^2 + \bar{u}^2 - 2u\bar{u}} = \overline{u^2} + \bar{u}^2 - 2\overline{u\bar{u}} \\ &= \overline{u^2} - \bar{u}^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{u^2} \geq \bar{u}^2$$

2.9. Bir $1/2$ spinin manyetik momentinin yukarı yöndeki bileşeninin $+\mu_0$ 'a eşit olması olasılığı p ve $-\mu_0$ 'a eşit olması olasılığı $q=1-p$ 'dir.
 (a) $\bar{\mu}$ ve $\bar{\mu}^2$ 'yi hesaplayınız. (b) $(\Delta\mu)^2$ 'yi hesaplayınız.

$$(a). \bar{\mu} = \sum_i P(i) \mu_i = p \mu_0 - q \mu_0 = (2p-1) \mu_0$$

$$\bar{\mu}^2 = \sum_i P(i) \mu_i^2 = p \mu_0^2 + q (-\mu_0)^2 = (p+q) \mu_0^2 = \mu_0^2$$

$$(b) (\Delta\mu)^2 = \bar{\mu}^2 - \bar{\mu}^2 = \mu_0^2 - (2p-1)^2 \mu_0^2 \\ = \mu_0^2 [1 - (4p^2 + 1 - 4p)] = 4p \mu_0^2 (1-p) = 4pq \mu_0^2$$

2.10. u değişkeninin u_r mümkün değerlerini P_r karşılık gelen olasılıklar ile aldığını varsayınız. (a) $\bar{u}$ ve $\bar{u}^2$ tanımlarını kullanarak ve $\sum_r P_r = 1$ normallik koşuluyla hatırlayarak

$$\bar{u}^2 - \bar{u}^2 = \frac{1}{2} \sum_r \sum_s P_r P_s (u_r - u_s)^2$$

olduğunu gösteriniz.

$$\bar{u}^2 = \sum_r P_r u_r^2, \quad \bar{u} = \sum_r P_r u_r, \quad \sum_r P_r = 1$$

$$\bar{u}^2 = \sum_r \sum_s P_r P_s u_r u_s$$

$$\begin{aligned} \bar{u}^2 - \bar{u}^2 &= \sum_r P_r u_r^2 - \sum_{rs} P_r P_s u_r u_s \\ &= \sum_{rs} P_r P_s u_r^2 - \sum_{rs} P_r P_s u_r u_s = \frac{1}{2} \sum_{rs} P_r P_s u_r^2 + \frac{1}{2} \sum_{rs} P_r P_s u_s^2 - \sum_{rs} P_r P_s u_r u_s \\ &= \frac{1}{2} \sum_{rs} P_r P_s (u_r^2 - 2u_r u_s + u_s^2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{rs} P_r P_s (u_r - u_s)^2 \end{aligned}$$

2.13. Spini 1 (yani spin açışal mom. $\hbar$) olan bir çekirdeğin çözümlerini alınız. Manyetik mom. inin verilen bir yöndeki μ bileşeninin üç mümkün değeri olabilir yani $+\mu_0, 0$ ve $-\mu_0$. Çekirdeğin küresel simetrisi olma eğilimi fakat çekirdeğin elipsoidal olduğunun varsayımı. Bunun sonucu çekirdeğin bütünü ekseri içinde bulunduğu katı kristalde verilen bir doğrultuya paralel olma eğilimindedir. Böylece $\mu = \mu_0$ olmasının bir p olasılığı ve $\mu = -\mu_0$ olmasının bir p olasılığı vardır. 0 zannan $\mu = 0$ olmasının olasılığı $1-2p$ ye eşittir. (a) $\bar{\mu}$ ve $\bar{\mu}^2$ 'yi hesaplayınız. (b) $(\Delta\mu)^2$ 'in hesaplayınız.

$$(a) \quad \bar{\mu} = \sum_i p_i \mu_i = p\mu_0 - p\mu_0 + (1-2p)0 = 0$$

$$(b) \quad \bar{\mu}^2 = \sum_i p_i \mu_i^2 = p\mu_0^2 + p(-\mu_0)^2 + (1-2p)0^2 = 2p\mu_0^2$$

$$(c) \quad (\Delta\mu)^2 = \bar{\mu}^2 - \bar{\mu}^2 = 2p\mu_0^2 - 0 = 2p\mu_0^2$$

2.14. $\bar{n}$ ve $(\Delta n)^2$ 'nin doğrudan hesabı: N tane $1/2$ spinli bir ideal sistemi göz önüne alınız. Yukarı doğru olan manyetik momentleri n sayın $n = u_1 + u_2 + \dots + u_N$ şeklinde yazılabilir ($u_i = 0$ aşağı, $u_i = 1$ yukarı.) (a) $\bar{n} = N\bar{u}$ olduğunu (b) $(\Delta n)^2 = N(\Delta u)^2$ olduğunu, (c) Manyetik mom. leri p olasılığı ile yukarı doğru ve $q = 1-p$ olasılığı ile aşağı doğru olduğunu varsayın $\bar{u}$ ve $(\Delta u)^2$ nedir? (d) Sonuçları emvelli bulduğunuz sonuçlarla karşılaştırın.

$$n = u_1 + u_2 + \dots + u_N = \sum_{i=1}^N u_i$$

$$(a) \bar{n} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \dots + \bar{u}_N = N\bar{u}$$

$$(b) (\Delta n)^2 = \overline{n^2} - \bar{n}^2$$

$$\bar{n}^2 = \overline{n \cdot n} = \overline{\left(\sum_{i=1}^N u_i \right) \left(\sum_{j=1}^N u_j \right)} = \overline{\sum_{i=1}^N u_i^2} + \overline{\sum_{i \neq j} u_i u_j}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \overline{u_i^2} &= N\bar{u}^2 \\ \sum_{i \neq j} \overline{u_i u_j} &= \sum_{i \neq j} \bar{u}_i \bar{u}_j = N(N-1)\bar{u}^2 \end{aligned} \right\} \bar{n}^2 = N\bar{u}^2 + N(N-1)\bar{u}^2$$

$$(\Delta n)^2 = [\overline{n^2} - \bar{n}^2] = [N^2\bar{u}^2 + N(N-1)\bar{u}^2] - N^2\bar{u}^2$$

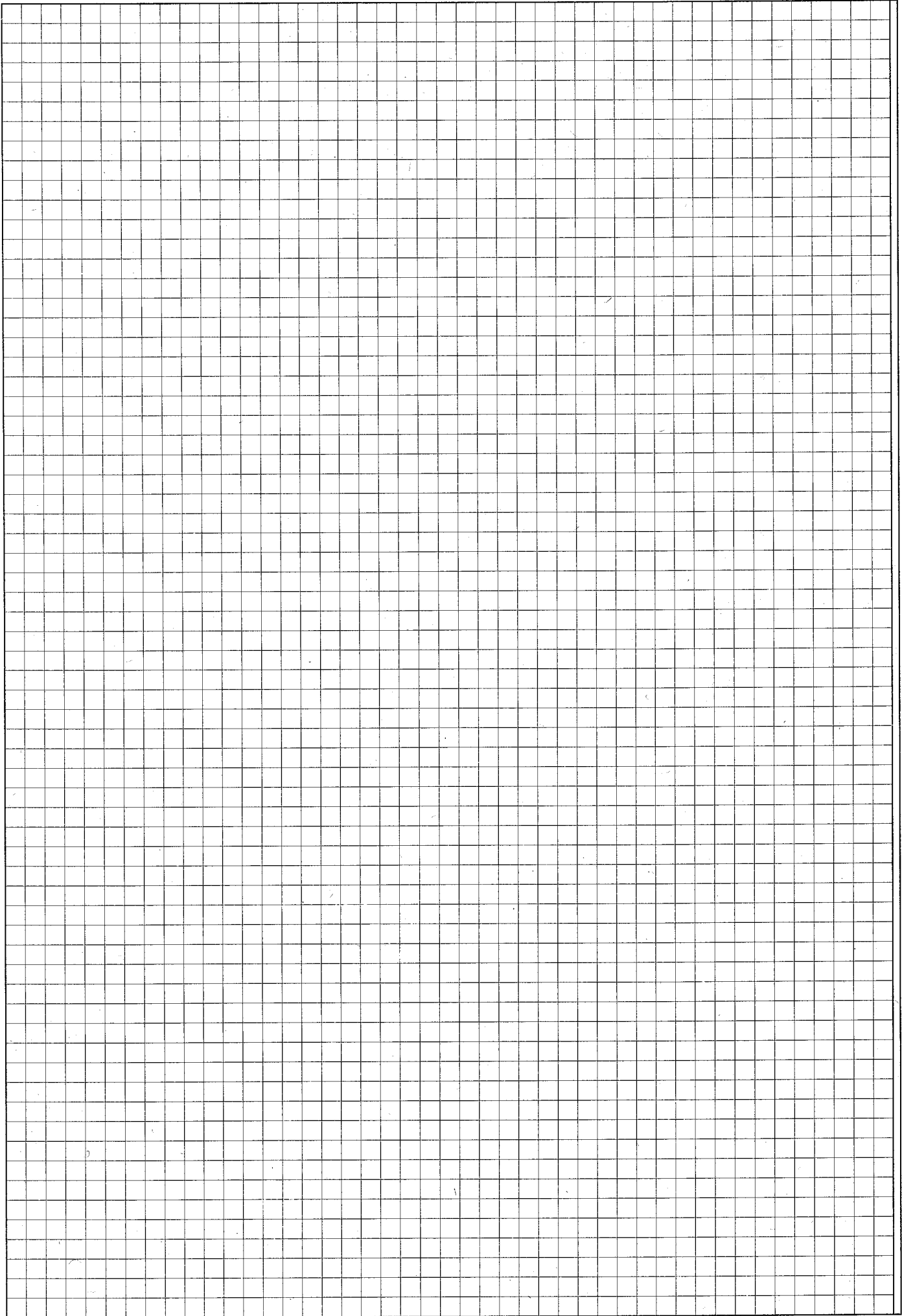
$$= N[\bar{u}^2 - \bar{u}^2] = N(\Delta u)^2$$

$$(c) \bar{u} = p \times 1 + q \times 0 = p$$

$$\bar{u}^2 = p \times 1 + q \times 0 = p$$

$$(\Delta u)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

$$(d) \bar{n} = N\bar{u} = Np, \quad (\Delta n)^2 = Npq$$



BS K