

TERMAL ETKİLEŞME

Bu tür etkileşme sistemlerin dış parametreleri, böylece enerji düzeyleri sırt kaldığı için basit ve çevremizde en olağan biçimde meydana gelen süreçlerden biridir.

- 10) Bırsırleri ile termal etkileşmede bulunan sistemlerin dengede olman için hangi koşullar sağlanmalıdır.?
- 20) Bu koşullar sağlanmadığı zaman ne olur.?
- 30) Hangi alanlık yorumları yapılabilir.?

4.1. Enerjinin Makroskobik sistemler Arasında Dağılımı:

Ave A' makroskobik sistemleri E ve E' enerjilerine sahip olsun. Durumların sayımını kolaylaştırmak için enerji ölçeklerinin SE büyüklüğünde çok küçük eşit aralıklara bölündüğünü varsayın.

$\Omega(E)$: A'nın ,enerjisi E ile $E+SE$ arasına düşen durumların sayımı

$\Omega'(E')$: A'nın " E' ile $E'+SE'$ " " " " "

Bütün enerjileri istin et yaklaşımında yalnız küçük SE miktar ile ayrılmış kesikli değerleri ele alarak şekilde kabul ederek, sayma problemini kolaylaştırabiliriz. Özellikle A'nın E ve $E+SE$ küçük aralığında enerjisi olan bütün durumların, bir araya getirilebilir ve bunların her biri E'ye eşit bir enerjiye olduklarını kabul ederiz; böyle $\Omega(E)$ durumu vardır. Benzeri A' için söyleyebiliriz. Bu yolu kabullenerek A'nın enerjisinin E olman söm fiziksel olarak A'nın E ve $E+SE$ arasında herhangi bir enerjisi olmanın anlamına gelir.

A ve A' sistemlerinin dış parametreleri sbt.tlr, fakat enerji akışı verisi de bulunmalarının serbest olduğu varsayılır. (ısı şeklinde). Her sistemin enerjisi aynı anda sbt olmamalıdır. Bu şekilde $A^* = A + A'$ sistemi, toplam E^* enerjisi sbt olacak şekilde yazılabilir.

$$E + E' = E^* = \text{sbt.}$$

$$E' = E^* - E$$

A^* 'in dengede olduğu durumu gözönüne alalım. O zaman A 'ın enerjisi birçok mümkün değeri alabilir. Düşündüğümüz son şudur ??... A 'ın enerjisinin E 'ye eşit olmasının yani $E, E + SE$ aralığında herhangi belirli bir E değerine eşit olmasının $P(E)$ olasılığı nedir? [O zaman A' 'in enerjisi E' değerindedir.] Dikkatimizi yazdığımız A^* 'a toplarız. Temel postüla bu sistemin her bir girebilir durumda eşit olasılıkla bulunabileceğini söyler. Sadece bir doğru formeldir. A^* 'in girebilir toplam Ω^* toplam durum saymı ise, A alt sisteminin E 'ye eşit enerjiye olduğu A^* 'in $\Omega^*(E)$ durum saymı nedir?

$$P(E) = \frac{\Omega^*(E)}{\Omega^*_{\text{top}}} = C \cdot \Omega^*(E)$$

$$C = (\Omega^*_{\text{top}})^{-1} \quad E \text{ 'den bağımsızdır sbt.tlr.}$$

$\Omega^*(E)$ A ve A' 'in girebilir durumlar saymı olduğundan ifade edilebilir.

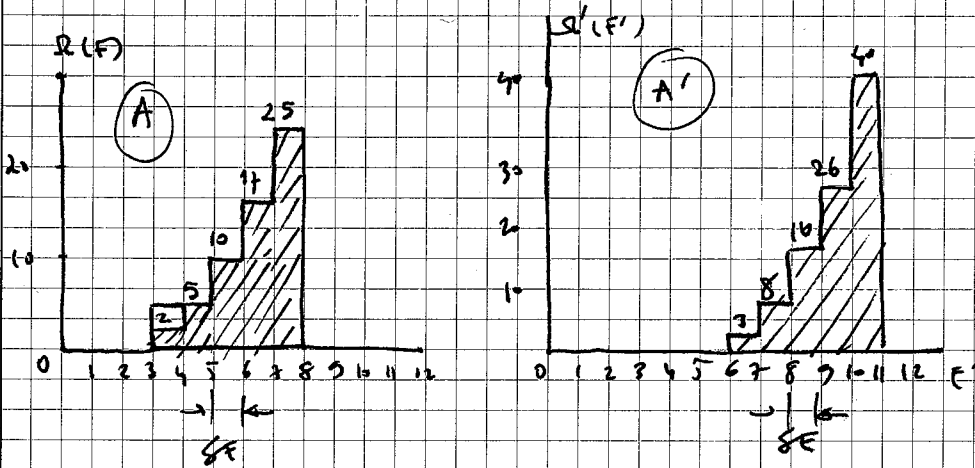
A enerjisi E olduğunda $\Omega(E)$ mümkün durumdan herhangi birine olabilir. O zaman A' sisteminin enerjisi enerjinin tamamına göre E' alınabilir. A' $\Omega'(E') = \Omega'(E^* - E)$ durumunun herhangi birine olabilir. A 'ın her mümkün durumun ile, toplam A^* sisteminin farklı mümkün bir durumun vererek sonuçta yazılabilir. Bu yüzden A 'ın enerjisi E olduğunda A^* 'in birbiriyle farklı girebilir durumların saymı

$$\Omega^*(E) = \Omega(E) \Omega'(E^* - E)$$

Buna karşılık olarak A sisteminin bir E enerjisine sahip olmasının olasılığı

$$P(E) = C \cdot Q(E) \cdot Q'(E^* - E).$$

Örnek: (Makroskobik sist.lerde bulunmayan çok küçük sayılar kaldıracağız.)



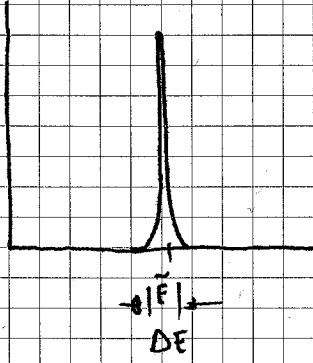
Burada E ve E' enerjileri hep aynı düzlerden seçilebilir ve bir enerji aralığına bölünmüşlerdir. E^* 'in 13 birime eşit olduğunu düşünürüz. Mükemmel bir durumda $E = 3$ ve böylece $E' = 10$ olduğu durum olabilir. Bu durumda A mükemmel 2 düzden seçilebilir A' de 40 düzden seçilebilir. Örneğin A*'ın toplam yüksekliği durum $2^* = 2 \times 40 = 80$.

E	E'	Q(E)	Q'(E')	Q*(E)
3	10	2	40	80
4	9	5	26	130
5	8	10	16	160
6	7	17	8	136
7	6	25	3	75

en düşük hal.

$P(E)$ 'nin E bağımlılığı gösterelim. $Q(E)$ ve $Q(E')$, E ve E'nin hızla artan bir farkındadır. $P(E)$ 'i artan E enerjisinin bir farkı olarak düşünürsek $Q(E)$ çarpım hızla artarken $Q'(E^* - E)$ hızla azalır. Sonuçta $P(E)$ olanla E'nin belirli bir $\tilde{E}$ değeri için çok hızlı bir maksimum gösterir. →

$P(E)$



$\Delta E \ll \tilde{E}$ olmak üzere ΔE genişliğine ait algede $P(E)$ 'nin yakındır. Bir büyüklüğü almada.

Aslında $P(E)$ 'nin darlığı, yarı $\ln P(E)$ 'nin darlığıdır. Çünkü logaritma E 'nin çok daha yavaş değişen bir fonksiyonudur.

$$\ln(P(E)) = \ln C + \ln \Omega(E) + \ln \Omega'(E') \quad E' = E^* - E$$

$P(E)$ 'nin maksimumuna karşılık gelen

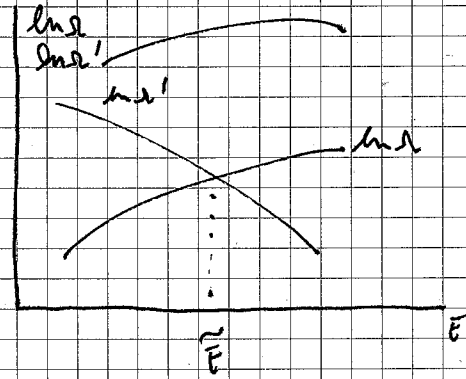
$E = \tilde{E}$ değeri

$$\frac{\partial \ln P}{\partial E} = \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial E} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \ln \Omega(E)}{\partial E} + \frac{\partial \ln \Omega'(E')}{\partial E'} (-1) = 0$$

$$\beta(E) = \beta'(E')$$

$$\beta(E) = \frac{\partial \ln \Omega(E)}{\partial E} = \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial E}$$



$$\ln \Omega \sim \ln(E - E_0) + \text{const.}$$

$\beta(E) = \beta'(E')$ bağıntıdan A 'nın en büyük $P(E)$ olasılığı ile neyden gelen E değeri (ve buna karşılık A' 'nin $E' = E^* - E$ değeri) belirlenebilir.

$P(E)$ 'nin maksimum genişliği

$\ln P(E)$ 'nin maksimum yakınladaki darlığına inceleyerek E , E' 'den farklı olduğunda $P(E)$ 'nin hızla azaldığını herne hesaplayabiliriz. E, E' 'den habere

$$\Delta E \sim \frac{\tilde{E}}{\beta}$$

örneğin bir ΔE miktarında farklılık olduğunda önemsenmeyecek kadar küçük olacağı görülebilir. $\Delta E \sim 10^{-12} \tilde{E}$

Tanımlar :

β parametresi tanımına göre enerjinin tersi boyuttur. Aynı zaman β^{-1} 'i enerji boyutunda ve böylece erg olarak ifade edilmesini pratik bir k sht. için katı olarak yazmamız faydalıdır.

$$\frac{1}{\beta} = kT$$

T parametresine karşılık gelen sistemin mutlak sıcaklığıdır.

$$\beta = \frac{1}{k} \frac{\partial S}{\partial E} \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}$$

$S = k \ln \Omega$ sistemin entropisi adı verilir. (enerji boyutunda)

PLE) olasılığının maksimum olma koşulu, tüm sistemin $S^* = k \ln \Omega^*$ entropisinin A alt sisteminin E enerjisiyle göre maksimum olma olasılığıdır. Maksimum olasılık koşulu

$$S^* = S + S' = \text{Maksimum.}$$

$$T = T'$$

İşte bu koşul da sağlanır. A'nın E enerjisinin kendisini, toplam yekün A^* 'in entropisinin minimum olduğu kadar büyük yekün serbest enerjiyle ayarlandığını gösterir. O zaman A^* sistemi minimum en büyük olma sağlama koşuluyla dengeleşir. yani en rastgele makrodur.

4.2. Sıcaklık Dengesine Tabela:

PLE) olasılığının $\bar{E} = \tilde{E}$ enerjisinde çok küçük bir maksimum vardır. Böylece A ve A' sıcaklık dengesinde bulunduğu durumda, A sisteminin hemen her zaman $\tilde{E}$ 'ye çok yakın bir E enerjisi varken A' 'nin de buna karşılık $\tilde{E}' = \bar{E} - \tilde{E}$ 'ye çok yakın bir E' enerjisi vardır. Çok iyi bir yaklaşımla, sist.lerin ort enerjileri de o zaman, sırasıyla $\bar{E}$ enerjilere eşittir.

$$\bar{E} = \tilde{E} \quad \bar{E}' = \tilde{E}'$$

Şimdi A ve A' başlangıçta birbirlerinden yalıtık ve ayrı ayrı dengede bulundukları ve ort. enerjilerinin sırası ile $\bar{E}_i$ ve $\bar{E}'_i$ olduğu bir hali gözönüne alalım. Birbirleri ile enerji alışverişinde bulunabilecekleri sıcaklık değerlerine bırakılırlar. Meydana gelen durum, sistemlerin başlangıçta sırası ile $\bar{E}$ ve $\bar{E}'$ 'ye çok yakın oldukları özel hal dışında başka bir hali belirlemeye bir durumdur. Son denge durumu elde edilinceye kadar enerji alışverişinde bulunma eğilimindedirler.

$$\bar{E}_f = \bar{E} \quad \bar{E}'_f = \bar{E}'$$

$P(E)$ maksimum olur.

$$\beta_f = \beta'_f \text{ olur.}$$

$$\beta_f = \beta(\bar{E}_f) \quad \beta'_f = \beta(\bar{E}'_f)$$

Entropileri maks. olmaya olan enerji alışverişinde bulunmaları kısıtlısı ne esastır. Böylece son olasılık (veya entropi) hiçbir zaman ilkindeki az olamaz.

$$S(\bar{E}_f) + S(\bar{E}'_f) \geq S(\bar{E}_i) + S(\bar{E}'_i)$$

$$\Delta S + \Delta S' \geq 0 \quad (1)$$

$$\Delta S \equiv S(\bar{E}_f) - S(\bar{E}_i)$$

$$\Delta S' \equiv S(\bar{E}'_f) - S(\bar{E}'_i)$$

Enerji alışverişi sırasında sistemlerin toplam enerjisi değişmez olarak kalır.

$$Q + Q' = 0 \quad (2)$$

(A ve A' tarafından sağlanan enerji). (1) ve (2) belirtilen temel etki kısımlarına göre sağlanan gerçekteki kısımlardır.

Tartışma ilmi münaka durumu ortaya çıkardığını gösterir.

(i) Sistemlerin başlangıç enerjileri $\beta_i = \beta_i'$ olacak şekilde seçilmiştir. Burada $\beta_i \equiv \beta(\bar{E}_i)$, $\beta_i' \equiv \beta(\bar{E}_i')$. 0 zaman sistemler zaten en olan durumdadırlar, yani toplam entropileri maksimumdur. Bu nedenle sistemler dengede kalırlar ve aralarında hiç bir ısı alışverişi olmaz.

(ii) Daha genel olarak sistemlerin başlangıç enerjileri $\beta_i \neq \beta_i'$ olacak şekilde seçilir. 0 zaman sistemler entropilerinin maksimum olmadığı daha az olan bir durumdadırlar. Bu nedenle durum zamanla değişecek ve sistemler sonunda toplam entropinin maksimum ve $\beta_f = \beta_f'$ olduğu bir denge durumu elde edilecektir. Bu ısı değişiminde enerji alıp vereceklerdir.

4.3. Sıcaklık

β parametresinin ve eşdeğer olarak $T = (k\beta)^{-1}$ parametresini, ısı ıvıllığını gördük.

(i) Her biri kendi başına dengede olan iki ayrı sistem parametresi aynı değeriyle karakterize edildiyse ve sistemler birbirlerine değitilince de denge konacak ve hiç bir ısı alışverişi olmayacaktır.

(ii) Parametreleri farklı ve birbirlerine değitilince ısı alışverişi olacaktır.

* İki sistem bir 3. ile sıcaklık dengesinde ise zaman bağılları ile sıcaklık dengesinde olmalıdırlar. (Termodinamiğin 0. kanunu)

* İki sistem birbirlerine değitirilince, eğer yalnız ve yalnız aynı termometreye göre aynı sıcaklıklarda iseler, bu iki sistem dengede kalırlar.

* * * Eğer β bir termometrenin termometrik parametresi olarak kullanılırsa, 0 zaman böyle bir termometre, özel bir sistemin sıcaklığını ölçmek için kullanıldığında zamanla aynı sıcaklık ölçeğinin verir. Bu sıcaklık ölçeği altında bu sistemin durum sayısının temel ıvıllığını sağlar.

Mutlak sıcaklığın özellikleri:

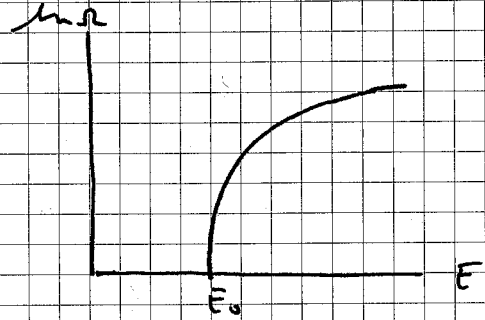
$$\frac{1}{kT} \equiv \beta \equiv \frac{\partial \ln \Omega}{\partial E}$$

$\Omega(E)$ E 'nin hızla artan bir fonksiyondur, dolayısıyla herhangi bir sistem için $\beta > 0$ veya $T > 0$. Başka bir deyişle "herhangi adı bir sistemin mutlak sıcaklığı pozitiftir." Bir sistemin mutlak sıcaklığını büyüklük basamağını hesaplayabiliriz.

$$\Omega(E) \propto (E - E_0)^f$$

$$\ln \Omega \sim f \ln (E - E_0) + \text{sabit}$$

$$\beta = \frac{\partial \ln \Omega}{\partial E} \sim \frac{f}{E - E_0}$$



T 'nin büyüklüğü sistemin $E = \bar{E}$ enerjisi kullanılarak hesaplanabilir.

$$kT = \frac{1}{\beta} \sim \frac{\bar{E} - E_0}{f}$$

" T mutlak sıcaklığında herhangi adı bir sistem için, kT niceliği kabaca sistemin her serbestlik derecesi başına düşen (temel durum istisnasıyla) ortalama enerjisidir".

Denge şartı: $\beta(E) = \beta'(E')$: etkileşen sistemlerin toplam enerjisinin, her iki sistem için eşit olacak şekilde paylaşılmasını.

β veya T parametresi, bir sistemin E enerjisi ile nasıl değişir?

β niceliği, E 'ye göre çizilmiş $\ln \Omega$ eğrisinin eğimini ölçer. E arttıkça eğimin azalması gerekir, yani

$$\frac{\partial \beta}{\partial E} < 0$$

Adi bir sistem halinde,

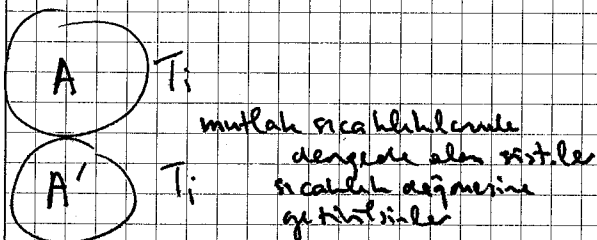
$$\frac{\partial \beta}{\partial E} \sim - \frac{f}{(E - E_0)^2} < 0$$

E arttıkça β azalır dolayısıyla "herhangi bir sistemin mutlak sıcaklığı enerjisinin artan bir fonksiyonu'dur.

$$\frac{\partial T}{\partial E} = \frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{1}{k\beta} \right) = - \frac{1}{k\beta^2} \frac{\partial \beta}{\partial E}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial E} > 0$$

Bu son bağıntı ısı akımının mutlak sıcaklıkla ısı akımının yönü arasında bağlantı kurmanıza izin verir.



A ısı kaynağı, sürekli enerji kaynağı sist. alın.

$$T_f > T_i$$

A' ısı verneli ve sürekli enerji kaynağı sist.

$$T_f < T_i'$$

$$T_i < T_f < T_i'$$

1. İki adi sist. birbirine değdirilince ısı, daha büyük mutlak sıcaklığı olan sistem tarafından verilir ve daha küçük mutlak sıcaklığı olan sistem tarafından soğutulur.

4. Daha sıcak sist. ısı veren ve daha soğuk sist. ısı soğuyan sist. olarak tanımladı. gizli ısı bu söz daha sıcak bir sist. in mutlak sıcaklığı, daha soğuklarından daha güçsüzler demeye epeydenar.

4.4. Küçük Isı Aktarımı:

Bir (A) sistemi başka bir sisteme değiştirilince,

$$|Q| \ll \bar{E} - E_0$$

olacak şekilde, yani $\Delta E = Q$ ortalama enerji değişimi, temel düzeyin üstündeki $\bar{E}$ ile karşılaştırılabilirliğine çok küçük olacak şekilde A'nın Q ısıya karşılık gelen varlığını. A'nın mutlak sıcaklığı önemsenmeyen şekilde değişir.

$$E = \bar{E} \quad \Delta \beta = \frac{\partial \beta}{\partial E} \Delta E = \frac{\partial \beta}{\partial E} Q \sim - \frac{\beta}{(\bar{E} - E_0)^2} Q \sim - \frac{\beta}{(\bar{E} - E_0)} Q$$

$$|\Delta \beta| = \left| \frac{\partial \beta}{\partial E} \Delta E \right| = \left| \frac{\partial \beta}{\partial E} Q \right| \ll \beta$$

$$T = \frac{1}{k\beta} \Rightarrow \ln T = - \ln \beta - \ln k$$

$$\frac{\Delta T}{T} = - \frac{\Delta \beta}{\beta} \Rightarrow |\Delta T| \ll T$$

bunlar geçerli olduğu her zaman bir sist. in yattığı Q ısı küçük olduğu için.

A'nın Q ısıya karşılık

$$\left. \begin{array}{l} \bar{E} : \text{ortalama} \\ \bar{E} + Q : \text{ısı enerjisi alm.} \end{array} \right\} \Omega(\bar{E}) \text{ değeri.}$$

$$\ln(\Omega(\bar{E} + Q)) - \ln(\Omega(\bar{E})) = \ln \Omega(\bar{E}) + \left(\frac{\partial \ln \Omega}{\partial E} \right) Q + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \ln \Omega}{\partial E^2} \right) Q^2 + \dots - \ln \Omega(\bar{E})$$

$$\approx \beta Q + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \ln \Omega}{\partial E^2} \right) Q^2 + \dots$$

A'nın mutlak sıcaklığı değeri, önemsenmeyen.

$$\Delta \ln \Omega = \frac{\partial \ln \Omega}{\partial E} Q = \beta Q$$

$$\boxed{\Delta S = \frac{Q}{T}}$$

Q küçük.

birim küçük $\rightarrow$

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

4.5. Bir Isı Hazinesine Değer Sistem:

Gözlem altındaki sist. ler kümesine göre büyük olan ve böylece bu sistemlere değeriğince sıcaklığı ısıt. helen makroskobik sistemler.

küçük A A' ısı hazinesine değeriğince durumu alın.

* Denge koşulları altında, A sistemini E_r enerjili herhangi özel bir r durumunda bulmanın P_r olasılığı nedir?

A' ye göre az serbestlik dereceli.

İnerji ölçөгünü SE aralıklarına bölelim. A' 'nin enerjisi E' (yani $E' = E + SE$ aralığında da iken) qılabilir durumlar sayı $\Omega'(E')$ alın.

$$A : E, \text{ de iken } A' : E' = E^* - E,$$

$$\downarrow$$

$$\Omega'(E^* - E_r).$$

Temel partikül A^* 'in kılabilirliği) qılabilir durumların kılabilirliği eğiit olasılıkla bulunmasını gerektirir.

$$P_r \propto \Omega'(E^* - E_r) \quad E_r \ll E^*$$

$E' = E^*$ civarında asıgarm.

$$\ln \Omega'(E^* - E_r) = \ln \Omega'(E^*) - \left[\frac{\partial \ln \Omega'}{\partial E'} \right] E_r$$

$$= \ln \Omega'(E^*) - \beta E_r$$

$$\Rightarrow \Omega'(E') = \Omega'(E^*) e^{-\beta E_r}$$

$$P_r = C e^{-\beta E_r} \quad \text{Boltzmann qaparı:}$$

kanonik dağılım.

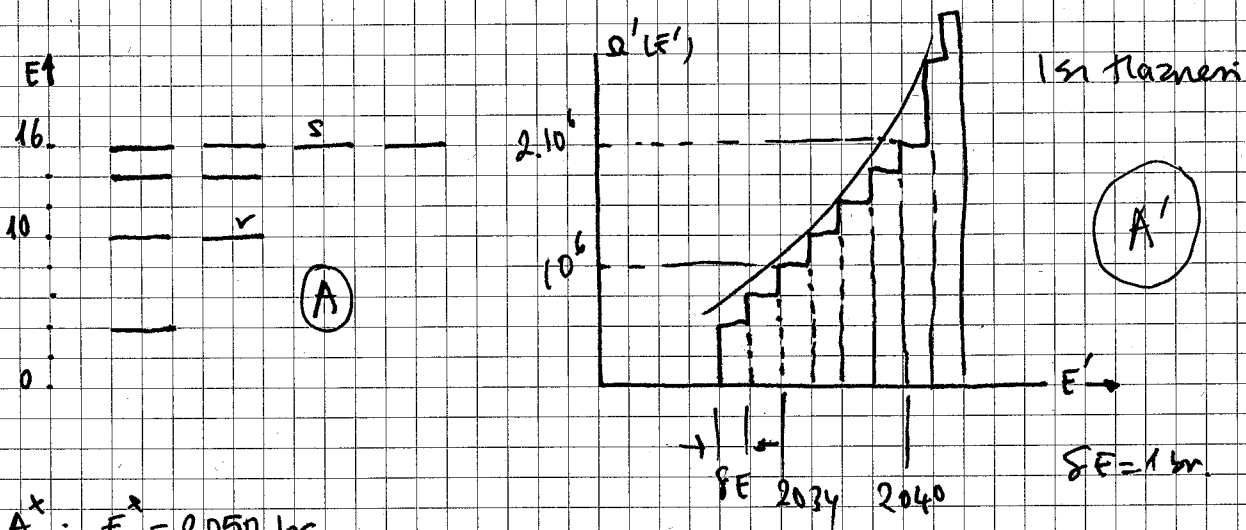
Böylece T sıcaklığında bir ısı hazinesine değeriğince sistemler kümesine kanonik küme denir.

$$\sum_r P_r = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{\sum_r e^{-\beta E_r}}$$

$$P_r = \frac{e^{-\beta E_r}}{\sum_r e^{-\beta E_r}}$$

$$\bar{y} = \sum_r P_r y_r = \frac{\sum_r e^{-\beta E_r} y_r}{\sum_r e^{-\beta E_r}}$$

Örnek:



$$A^*: E^* = 2050 \text{ br.}$$

$$\textcircled{A}: E_r = 10 \text{ br olarak}$$

$$\Rightarrow E' = E^* - E_r = 2040 \Rightarrow A': \Omega'(2040) = 2 \cdot 10^6 \text{ minimum durumdan ziyade olacaktır.}$$

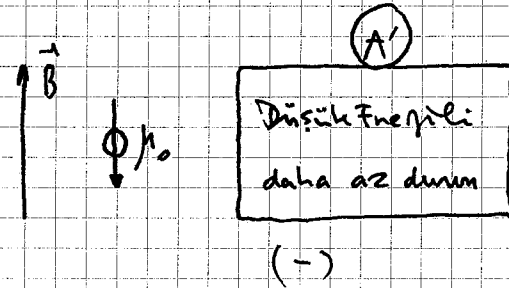
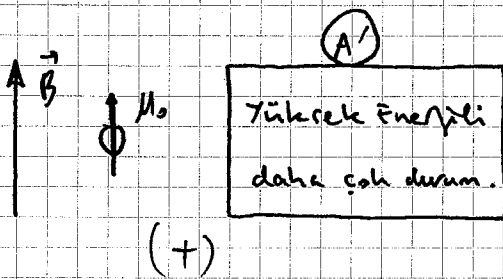
A ve A' den meydana gelen ~~birçok yalıtılmış kütleye~~, A^* den sistemleri kapsayan ~~çok yalıtılmış kütleye~~ A' nin r kütlesi bulunduğu durumdan sayım 2×10^6 ile orantılı olacaktır.

$$A^*: E_s = 16 \text{ br. de } \Rightarrow A': E' := 2034 \quad \Omega'(2034) = 10^6$$

Sistemler kütlesinde A' nin s kütlesi bulunduğu durumdan sayım 10^6 .

4.6. Paramanyetizma:

Birim hacminde N_0 manyetik atoma olan ve bir dış $\vec{B}$ manyetik alanına konulmuş bir maddenin manyetik özelliklerini inceleyelim. Her manyetik atomun $1/2$ spininin ve bağlı μ_0 manyetik momentinin olduğu basit hali düşünelim. Manyetik özellikleri manyetik momentlerinin her ikisinin yönüne bağlı olan maddelere paramanyetik maddeler denir. Madde bir T mutlak sıcaklığında olsun. Atomlardan birinin manyetik mom. ini $\vec{B}$ yönündeki $\vec{\mu}$ bileşeni nedir?



$$\vec{\mu} \parallel \vec{B} \Rightarrow \epsilon_+ = -\mu_0 B$$

$$\vec{\mu} \nparallel \vec{B} \Rightarrow \epsilon_- = \mu_0 B$$

$$P_+ = C e^{-\beta \epsilon_+} = C e^{\beta \mu_0 B}$$

$$P_- = C e^{-\beta \epsilon_-} = C e^{-\beta \mu_0 B}$$

Daha düşük enerjili durum (atomun daha fazla olasılık ile bulunduğu durum)

Daha yüksek enerjili durum (daha az olasılıkla bulunur)

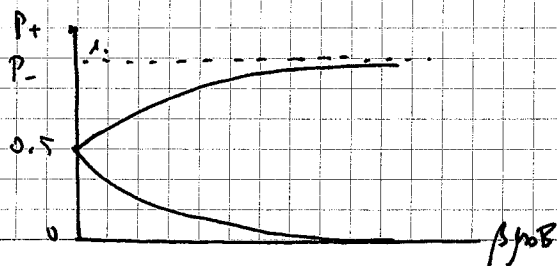
$$P_+ + P_- = C (e^{\beta \mu_0 B} + e^{-\beta \mu_0 B}) = 1$$

$$\Rightarrow C = (e^{\beta \mu_0 B} + e^{-\beta \mu_0 B})^{-1}$$

$$W = \beta \mu_0 B = \frac{\mu_0 B}{kT}$$

T çok büyük ise ($W \ll 1$) $\vec{\mu}$ 'nin $\vec{B}$ 'ye paralel olma olasılığı olmama olasılığı ile hemen hemen eşittir.

$$\Rightarrow \bar{\mu} \approx 0$$



T cukup kecil ($w \gg 1$) magnetisasi akan paralel dengan antiparalel dengan arah daridat. $\bar{\mu} \approx \mu_0$

$$\bar{\mu} \equiv p_+(+\mu_0) + p_-(-\mu_0) = \mu_0 \frac{e^{\beta\mu_0 B} - e^{-\beta\mu_0 B}}{e^{\beta\mu_0 B} + e^{-\beta\mu_0 B}} = \mu_0 \tanh(\beta\mu_0 B)$$

$$\bar{\mu} = \mu_0 \tanh\left(\frac{\mu_0 B}{kT}\right)$$

$$\tanh(w) = \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}}$$

$$\bar{M}_0 = N_0 \bar{\mu}$$

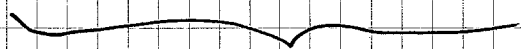
$$w \ll 1 \Rightarrow e^w = 1 + w + \dots$$

$$w \gg 1 \Rightarrow e^w \gg e^{-w} \text{ so } \tanh w = 1.$$

$$e^{-w} = 1 - w + \dots$$

$$\Downarrow$$

$$\tanh w = \frac{(1+w+\dots) - (1-w+\dots)}{2} = w$$



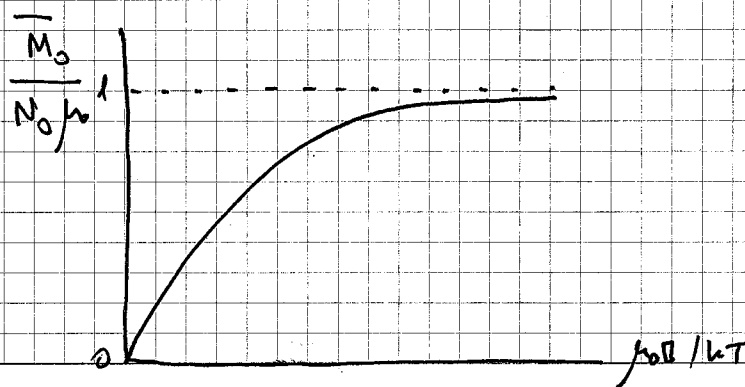
$$\bar{\mu} = \mu_0 \frac{\mu_0 B}{kT} = \frac{\mu_0^2 B}{kT}; \mu_0 B \ll kT$$

$$\bar{\mu} = \mu_0 \quad \mu_0 B \gg kT$$

$$\bar{M}_0 = N_0 \bar{\mu} = \frac{N_0 \mu_0^2}{kT} B \equiv \chi B$$

$$M_0 = N_0 \mu_0$$

$$\chi = \frac{N_0 \mu_0^2}{kT} \text{ Curie law.}$$



4.7. İdeal Gazın Ortalama Enerjisi

Kenar uzunlukları L_x, L_y ve L_z olan bir kutuya konmuş herbiri m kütleli özdeş N moleküllü bir gazı gözönüne alınız. Gazı yeteri kadar seyreltilmiş, yani moleküller uzaklık bğıyık olacak şekilde, $V = L_x L_y L_z$ hacmindeki N moleköl sayısını, yeterince küçük olduğunu varsayınız. Sonuçta:

- Moleküller arasındaki karşılıklı etkileşimin ortalama potansiyel enerjisi ortalama kinetik enerjisi ile karşılaştırıldığında çok küçüktür. (ideal gaz)
- Aslında moleküller ayırt edilemezler bile olsak, tanımlanabilir belirli bir varlık olarak herhangi bir moleköl üzerinde toplamamız mümkündür. (Gaza 0 zaman değere değere değıştir demir)

Gaz bu koşulları ihis de sağlayacak şekilde yeterince seyreltilmiş sayacağız.

Gaz bir T mutlak sıcaklığında dengede olsun. Tek bir molekölü diğerleri ile sıcaklık değışmesinde bulunan küçük bir sistem olarak ele alınız. Molekölün enerjisinin E_r olduğu r kuantum durumlarından herhangi birinde bulma olasılığı

$$P_r = \frac{e^{-\beta E_r}}{\sum_i e^{-\beta E_i}} \quad \beta = \frac{1}{kT}$$

E_r 'yi hesaplamak da (i) kışık diğer moleküller ile etkileşimi koymamış izi ver.

Örneğin her molekölün tek bir atomdan meydana geldiği (He, Ar) özelliğe sahip tek atomlu gaz halini gözönüne alınız.

$$E_r = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right)$$

Öte yandan çok atomlu gaz halinde,

$$E = E^{(u)} + E^{(i)}$$

E_k : mol. in K.M. 'nin öteleme hareketinin K.E

E_i : K.M. 'ne göre dönme ve titreşim hareketleri ile ilgili iç enerji.

K.M. , kütlesi moleküler kütlesi gibi hareket ettiği için yine $\{n_x, n_y, n_z\}$ kuantum sayı kümesi ile belirtilir. İa hareket düzlemi atomların moleküler içinde dönme ve titreşim durumları bir veya daha fazla kuantum sayı vardır. $\Sigma^{(i)}$

$$\epsilon_r = \Sigma^{(k)} (n_x, n_y, n_z) + \Sigma^{(i)} (n_i)$$

Öteleme hareketi kalın duvarlar ile ilişkilendirir ama dönme ya da titreşim hareketi kalın duvarlardan bağımsızdır.

Ortalama enerjiyi hesap:

$$\bar{\epsilon} = \sum_r p_r \epsilon_r = \frac{\sum_r e^{-\beta \epsilon_r} \epsilon_r}{\sum_r e^{-\beta \epsilon_r}}$$

$$\sum_r e^{-\beta \epsilon_r} \epsilon_r = - \sum_r \frac{\partial}{\partial \beta} (e^{-\beta \epsilon_r}) = - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sum_r e^{-\beta \epsilon_r} \right)$$

$$Z \equiv \sum_r e^{-\beta \epsilon_r}$$

$$\bar{\epsilon} = - \frac{\partial Z / \partial \beta}{Z} = - \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}$$

$$= - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$$

$$Z = \sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z} \exp \left[- \frac{\beta \hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right) \right]$$

$$e^{-\frac{\beta \hbar^2 \pi^2}{2m} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)} = e^{-\frac{\beta \hbar^2 \pi^2}{2m} \frac{n_x^2}{L_x^2}} e^{-\frac{\beta \hbar^2 \pi^2}{2m} \frac{n_y^2}{L_y^2}} e^{-\frac{\beta \hbar^2 \pi^2}{2m} \frac{n_z^2}{L_z^2}}$$

$$Z = Z_x Z_y Z_z$$

$$Z_x = \int_0^{\infty} \exp \left[- \frac{\beta \hbar^2}{2m} \frac{u^2}{L_x^2} \right] dx$$

$$= \left(\frac{2m}{\beta} \right)^{1/2} \left(\frac{L_x}{\hbar} \right) \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-u^2} du}_{\sqrt{\pi}/2} \quad u = \left(\frac{\beta}{2m} \right)^{1/2} \left(\frac{\hbar}{L_x} \right) u$$

$$= b \frac{L_x}{\beta^{1/2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = ?$$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy$$

r, φ koördinaat woorde teken

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

$$dx dy = r dr d\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = 2\pi \left(-\frac{1}{2} \right) \int_0^{\infty} d(e^{-r^2}) = -\pi e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} = -\pi(0-1) = \pi$$

$$I = \sqrt{\pi} \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$Z = b^3 \frac{\sqrt{\pi}}{\beta^{3/2}}$$

$$\ln Z = \ln V - \frac{3}{2} \ln \beta + 3 \ln b$$

$$\bar{\epsilon} = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = - \left(-\frac{3}{2} \frac{1}{\beta} \right) = \frac{3}{2} kT \quad \text{tek atomer bin molekul is}$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{3}{2} kT + \bar{\epsilon}^{(li)}(\tau)$$

Gaz ideal olduğun için

$$\bar{E} = N \bar{\epsilon}$$

ideal bir gaz için $\bar{E} = \bar{E}(T)$ ıkan büyüklükten bağımsızdır.

4.8. ideal Gazın Ortalama Basıncı:

Tek bir molekülün, gazı içine alan kutunun sağ duvarına ($x = L_x$) x doğrultusunda uyguladığı kuvveti F_x ile gösterelim. Molekül ϵ_r enerjiler aralığında ϵ_r ile kuvvetin değeri F_r ile gösterelim. Kutunun sağ duvarına dx genişlikte dx kadar çekildiğini varsayalım. Bu süreçte molekül, duvar üzerinde molekülün enerjisinin $-d\epsilon_r$ azalmasına eşit olan $F_r dx$ işi yapar.

$$F_r dx = -d\epsilon_r$$

$$F_r = -\frac{d\epsilon_r}{dx} = -\frac{\partial \epsilon_r}{\partial x}$$

$$\bar{F} = \sum_r p_r \bar{F}_r = \frac{\sum_r e^{-\beta \epsilon_r} \frac{\partial \epsilon_r}{\partial x}}{\sum_r e^{-\beta \epsilon_r}}$$

$$\sum_r e^{-\beta \epsilon_r} \frac{\partial \epsilon_r}{\partial x} = -\sum_r \left(-\frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial}{\partial x} (e^{-\beta \epsilon_r})$$

$$\bar{F} = \frac{1}{\beta} \frac{\frac{\partial Z}{\partial x}}{Z} = \frac{1}{\beta} \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial L_x}$$

$$\bar{F} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial L_x}$$

$$V = L_x L_y L_z$$

$$= \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln V}{\partial L_x} = \frac{1}{\beta} \frac{1}{L_x} = \frac{kT}{L_x}$$

$$F_r = -\frac{\partial}{\partial L_x} (\epsilon_r^{(h)} + \epsilon_r^{(i)}) = -\frac{\partial \epsilon_r^{(h)}}{\partial L_x}$$

Bu somen Lytz alanına bşleşek g ren b n d nce uyg lenen b rnc  bel rme.

$$\bar{p} = \frac{N\bar{F}}{LyLz} = \frac{NkT}{V} = \frac{N}{V}kT$$

$$\bar{p}V = NkT$$

$$\bar{p} = nkT$$

Mol b s ne meke sel saym  , tanm dan Na Avogadro saym a er t  lanm da

$$N = \nu N_a$$

$$\bar{p}V = \nu RT$$

İmm Der lemi.

$$k = 1.38054 \times 10^{-16} \text{ erg/der e}$$

$$R = 8.3143 \times 10^7 \text{ erg/mol. r e}$$

burc da

$$R \equiv N_a k$$

(i) ideal  lacak yetek l kte seyre t l m , ger s t s c l l kte tutulur 

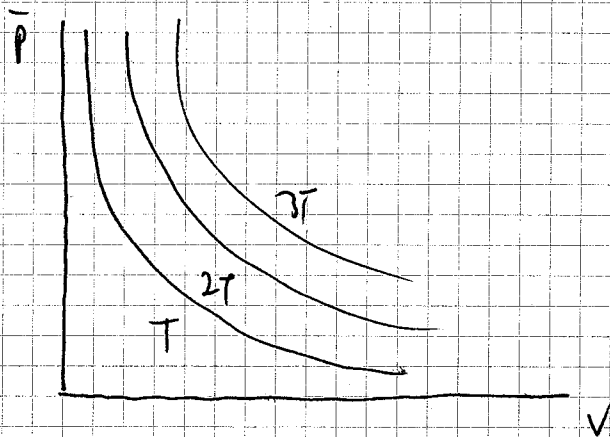
$$\bar{p}V = \text{s t.}$$

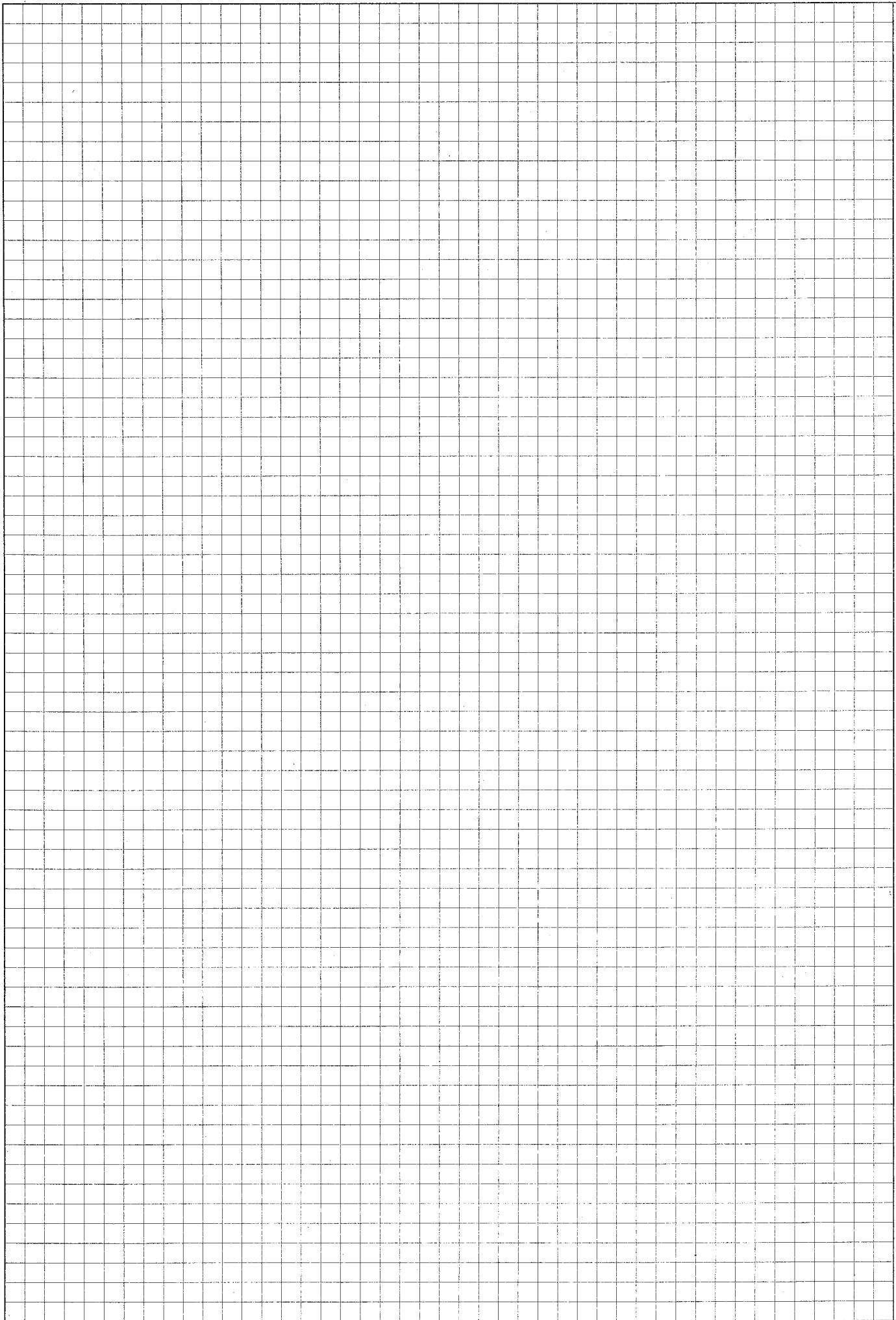
Boyle kanun .

(ii) S t. hac mde tutulur 

$$\bar{p} \propto T \quad \text{mutlak s c l l    l me g nt r m }$$

iii) Her ang    r ge t r  g r r.





BS K

4.3. Durum sayısının enerji ile gerçekte değişmesi: Oda sıcaklığında herhangi bir makroskobik sistemi gözönüne alınız. (a) Sistemin enerjisi 10^{-3} eV arttırıldığında zaman girileşilen durumların sayısındaki yüzdelik artmayı bulmada mutlak sıcaklığın tanımını kullanınız.

β : sbt kalacak şekilde ΔE çok küçük ise

$$\frac{\Omega(E+\Delta E)}{\Omega(E)} = e^{\beta \Delta E}$$

$\beta \Delta E \ll 1$ için $\frac{\Delta \Omega}{\Omega} = e^{\beta \Delta E} - 1 \approx \beta \Delta E$

$\Delta E = 10^{-3} \text{ eV}$ $\beta = 40 (\text{eV})^{-1} \Rightarrow \frac{\Delta \Omega}{\Omega} = 0.04$

(b) Böyle bir sistemin (5×10^{-5} cm'lik dalga boyu olan) görülebilen ışığın tek bir fotonunun yuttuğunu düşününüz. Sonuç olarak sistemin girileşilen durumlarının sayını hangi çaparla artır.

$\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ cm 'lik dalga boyu olan bir fotonun enerjisi

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda} \approx 4 \cdot 10^{-12} \text{ erg} = 2.5 \text{ eV}$$

sistemin girileşilen durumları foton sağlanması ile artır.

$$\frac{\Omega(E+\Delta E)}{\Omega(E)} = e^{\beta \times 2.5} = e^{100} \approx 5 \times 10^{43}$$

4.4. Atomik spin kuantumlanmasının meydana gelmesi: $1/2$ spinli ve μ_B manyetik momentli manyetik atomlardan meydana gelen bir maddenin gözünü ne alınız. Bu moment çiflenmemiş bir elektron yüzünden olduğu için Bohr magnetonu $\mu_B \approx 10^{-20}$ erg/Gauss basamağındadır. Spinleri verilen bir yönü yeğ tutarak kutiplanmış atomlarla saçılma deneyi yapmak için büyük bir B manyetik alan uygulanır ve fark edilebilir derecede kutiplanma elde etmek için madde yeter derecede düşük bir mutlak sıcaklığa kadar soğutulur. $B = 50.000$ Gauss. Alana paralel olan atomik momentlerin momentlerin sayısından antiparalel olan momentlerin sayısından en az 3 kat fazla olmaları için elde edilmeleri gereken T mutlak sıcaklığı bulunur. T/T_0 oranından T_0 : oaa sıcaklığı.

$$P_+ = C e^{\beta \mu_B B} \quad P_- = C e^{-\beta \mu_B B} \quad \frac{P_+}{P_-} = 3$$

$$\frac{C e^{\beta \mu_B B}}{C e^{-\beta \mu_B B}} = 3 \Rightarrow e^{2\beta \mu_B B} = 3 \Rightarrow 2\beta \mu_B B = \ln 3 \Rightarrow \beta = \frac{\ln 3}{2\mu_B B}$$

$$T/T_0 \approx 1.1 \times 10^{-2} \quad T \sim 3^\circ K$$

4.6. Çekirdek manyetik rezonans sağurman: Bir su örneği B dış manyetik alana konulmuştur. H_2O molekülünün her protonunun $1/2$ çekirdek spin ve kin μ_B bir μ_B manyetik man. vardır. Her proton $\uparrow$ ve $\downarrow$ durumlarından $\pm \mu_B B$ enerjili iki mümkün durumdan birinde olabilir. $h\nu = 2\mu_B B$ rezonans koşuluyla sağlayan $\rightarrow$ frekansla bir radyo frekansı manyetik alanına uygulandığını düşününüz. P zaman ısıtım alan bir iki durum arasında geçişler meydana getirir, protonlar $\uparrow$ durumdan $\downarrow$ duruma veya tersine eşit olasılıklarla geçimleri sağlar. Protonların ısıtım alanından sağurmanları güç (net), iki durumdaki proton sayıları farkı ile orantılıdır. Protonların T sıcaklığında her zaman dengese yakın oldukları varsayınız. Sağurman güç T sıcaklığına nasıl bağlıdır?

Sağurman güç: $w \propto P_+ - P_-$

$$P_+ = C e^{\beta \mu_B B} \sim C (1 + \beta \mu_B B) \quad \beta \mu_B B \ll 1$$

$$P_- = C e^{-\beta \mu_B B} \sim C (1 - \beta \mu_B B)$$

$$w \propto \beta \mu_B B = \mu_B B / kT$$

$$w \propto \frac{1}{T}$$

$$P_+ + P_- = 1 \Rightarrow C \approx \frac{1}{2}$$

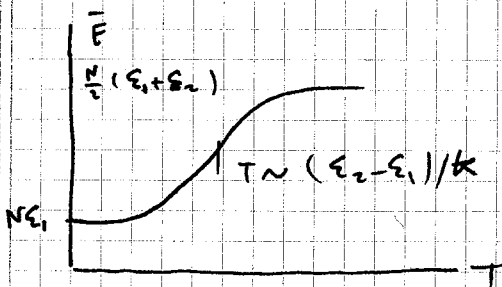
(4.8.) Kesikli iki enerji düzeyli bir sistemin ortalama enerjisi: Bir sistem her birinin sayıya ϵ_1 ve ϵ_2 enerjili iki durum birinde bulunabildiği, zayıf etkileşen N parçacıktan oluşmaktadır. $\epsilon_1 < \epsilon_2$ (a) Ağırlık hesaplamadan sistemin $\bar{E}$ enerjisinin, T mutlak sıcaklığının bir fonksiyonu olarak nitel bir çizimini yapınız. ~~Böylelikle, en yüksek sıcaklık sınır değerine $\bar{E}$, en düşük sıcaklık sınır değerinden, yüksek sıcaklık sınır değerine kabaca hangi sıcaklık yakınında geçer.~~

Düşük sıcaklıklarda parçacıklar en düşük enerji durumlarında bulunacaklardır. Yüksek sıcaklıklarda hemen hemen eşit olarak bulunacaklardır. düşük sıcaklıklarda, $kT \ll \epsilon_1$

$$\bar{E} \rightarrow N\epsilon_1$$

$$kT \gg \epsilon_2 \quad \bar{E} \rightarrow \frac{N}{2} (\epsilon_1 + \epsilon_2)$$

Düşükten $\rightarrow$ yüksek sıcaklığa geçiş durumu: sıcaklık, kT termal enerji olarak ~~enerji~~ $\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_2$ 'ye geçiş yaptırarak haddi olduğu zaman olacaktır. $kT \sim \epsilon_2 - \epsilon_1$



(b) Bu sistemin ortalama enerjisi için bir ifade bulunur.

$$P_1 = C e^{-\beta \epsilon_1} \quad P_2 = C e^{-\beta \epsilon_2}$$

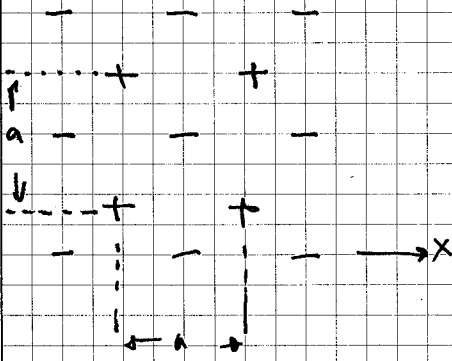
$$\bar{E} = N \frac{\epsilon_1 e^{-\beta \epsilon_1} + \epsilon_2 e^{-\beta \epsilon_2}}{e^{-\beta \epsilon_1} + e^{-\beta \epsilon_2}} = N \epsilon_1 \frac{1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} e^{-\beta(\epsilon_2 - \epsilon_1)}}{1 + e^{-\beta(\epsilon_2 - \epsilon_1)}}$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \bar{E} \rightarrow N\epsilon_1$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{E} \rightarrow N\epsilon_1 \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)$$

4.10. T mutlak sıcaklığında bir katı, birim hacminde N_0 negatif yüklü iyon içine almaktadır. Katı, bir bütün olarak, elektrik bakımından yalınsızdır. Çünkü her $-e$ yüklü negatif iyonun yakınında $+e$ yüklü pozitif bir iyon vardır. Pozitif iyon kısıtlıdır ve böylece örgün boşlukları arasında hareket etmekte sınırlıdır. Bundan dolayı elektrik alan uygulandığında pozitif iyon, durgun negatif iyon çevresinden eşit uzaklıktaki dört köşenin her birinde eşit olasılıklarla bulunacaktır. x doğrultusunda küçük bir E elektrik alan uygulandığında, elektrik kutuplaşmaya, yani x doğrultusundaki birim hacme düşen ortalama elektrik dipol momentini hesaplayınız.

E yönünden birim hacim başına elektriksiz dipol moment sıfır



4.14. Bir ideal gaz karışımının durum denklemini: Bir cinsten N_1 molekül, başka bir cinsten N_2 molekülden oluşan bir gaz içine alan V hacimli bir kabın görünüşüne alalım. Gazın ideal olacak kadar yeterince seyreltilmiş olduğunu varsayarak gazın T mutlak sıcaklığındaki $\bar{p}$ basıncının bulunuz.

$\bar{p}V = NkT$ gazın moleküllerinin özelliklerinden bağımsız.

$\therefore$ Her bir gaz kabın duvar ile aynı aynı etkilensin

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_1 &= \frac{N_1}{V} kT \\ \bar{p}_2 &= \frac{N_2}{V} kT \end{aligned} \right\} \bar{p} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 = (N_1 + N_2) kT / V$$

4.15. Bir ideal gazın basıncı ve enerji yoğunluğu: Bir gazın $\bar{p}$ ortalaması basıncı ve $\bar{\epsilon}$ enerjisi için $\bar{p} = \frac{2}{3} \bar{\epsilon}$ oranındaki bağlantıyı bulunuz. $\bar{\epsilon}$: gazın birim hacme düşen ort. kinetik enerji.

$$\bar{\epsilon} = \frac{3}{2} kT \quad \bar{p} = \frac{N}{V} kT = \frac{N}{V} \frac{2}{3} \bar{\epsilon} = \frac{2}{3} \frac{N\bar{\epsilon}}{V} = \frac{2}{3} \bar{\epsilon}$$

4.16.) Kenar uzunlukları L_x, L_y ve L_z olan bir kutu içine kapatılmış N tane atomun parçacığının bir ideal gazını görünüşüne alınız. Parçacık göresiz ise, ϵ enerjisi $\hbar^2 k^2$ momentumuna

$$\epsilon = \frac{(\hbar \vec{k})^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \quad k_x = \frac{n_x \pi}{L_x}, \dots$$

(a) Bir $(n_x, n_y, n_z) \equiv r$ durumunda i ten kabın sağ duvarına uyguladığı F_r kuvvetini hesaplamak için bu ifadeyi kullanınız.

$$\begin{aligned} F_r &= - \frac{\partial \epsilon_r}{\partial L_x} = - \frac{\hbar^2}{2m} 2k_x \frac{\partial k_x}{\partial L_x} = \frac{\hbar^2}{2m} 2k_x \cdot \left(- \frac{n_x \pi}{L_x^2} \right) \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{2}{L_x} k_x^2 \end{aligned}$$

b) $\bar{F}$ kuvveti için $\bar{\epsilon}$ üzerinden bir ifade türetelimiz. Gaz dengede iken $\overline{k_x^2} = \overline{k_y^2} = \overline{k_z^2}$ simetrisini kullanınız.

$$\bar{\epsilon} = \frac{3\hbar^2}{2m} \overline{k_x^2} \Rightarrow \bar{F} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{2}{L_x} \frac{2m}{3\hbar^2} N \bar{\epsilon} = \frac{2}{3} \frac{N\bar{\epsilon}}{L_x}$$

c) Burada gazı uyguladığı $\bar{p} = \frac{2}{3} \bar{u}$ basıncı bulunur.

Sap duvarı alanı $L_y L_z$

$$\bar{p} = \frac{\bar{F}}{L_y L_z} = \frac{2}{3} \frac{\bar{\epsilon} N}{L_x L_y L_z} = \frac{2}{3} \bar{u}$$

4.17.) Elektromanyetik ışımanın basıncı ve enerji yoğunluğu: $L_x L_y$ ve L_z kenarlı bir kutu içine kapatılmış olan elektromanyetik ışımayı (yani fotonların bir gazını) göz önüne alınız. Foton c hızı ile hareket ettiği için göreceli bir parçacıktır ve enerjisi

$$\epsilon = c h k = c h (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} \quad k_x = \frac{n_x \pi}{L_x}, \dots$$

(a) Bir foton $(n_x, n_y, n_z) \equiv r$ durumunda iken kutu-sap duvarına uyguladığı F_r kuvveti bulunur.

$$F_r = - \frac{\partial \epsilon_r}{\partial L_x} = - c h \frac{1}{2} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{-1/2} \cdot 2 k_x \left(\frac{\partial k_x}{\partial n_x} \right) = - \frac{n_x \pi}{L_x} = - \frac{k_x}{L_x}$$

$$= c h (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{-1/2} \frac{k_x^2}{L_x}$$

(b) $\bar{F}$ için fotonun $\bar{\epsilon}$ enerjisi cinsinden bir ifade türetiniz. (c) Burada ışımanın duvarlara uyguladığı $\bar{p}$ basıncını $\bar{p} = \frac{2}{3} \bar{u}$ ile veritlenişini gösteriniz.

$$\bar{F} = N c h (\overline{k_x^2} + \overline{k_y^2} + \overline{k_z^2})^{-1/2} \frac{\overline{k_x^2}}{L_x} = N c h \frac{(\overline{k_x^2})^{1/2}}{\sqrt{3} L_x} \quad \bar{\epsilon} = c h \sqrt{3} (\overline{k_x^2})^{1/2}$$

$$\bar{F} = N c h \frac{1}{\sqrt{3} L_x} \cdot \frac{\bar{\epsilon}}{c h \sqrt{3}} = \frac{N \bar{\epsilon}}{3 L_x}$$

$$\frac{\bar{F}}{L_y L_z} = \frac{1}{3} \frac{N \bar{\epsilon}}{V} = \frac{1}{3} \bar{u}$$

4.18.) $T = (k\beta)^{-1}$ mutlak sıcaklığında bir ısı kaynağı ile sıcaklık dengesinde olan bir kuantum sistemi göz önüne alınır. $\bar{E}$ ve β arasındaki ilişkiyi bulunuz.

$$\bar{E} = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$$

Gösteriniz.

$$P_r = C e^{-\beta E_r}, \quad \beta = 1/kT, \quad \bar{E} = \left(\sum_r E_r e^{-\beta E_r} \right) / \sum_r e^{-\beta E_r}, \quad \sum_r P_r = 1$$

$$\bar{E} = \sum_r E_r e^{-\beta E_r} / \sum_r e^{-\beta E_r} \quad Z = \sum_r e^{-\beta E_r}$$

$$\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = - \sum_r E_r e^{-\beta E_r}$$

$$\Rightarrow \bar{E} = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$$

4.19. Bir önceki problemi göz önüne alınır. A L_x, L_y, L_z her biri bir boyutlu kuantum sistemi, her biri bir boyutlu kuantum sistem, göz önüne alınır.

a) $\bar{E} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial L_x}$ olduğunu gösteriniz.

$$\bar{E} = \sum_r E_r P_r = \sum_r e^{-\beta E_r} (-\partial E_r / \partial L_x) / \sum_r e^{-\beta E_r} \quad Z = \sum_r e^{-\beta E_r}$$

$$\frac{\partial \ln Z}{\partial L_x} = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial L_x} = \frac{1}{Z} (-\beta) \sum_r \frac{\partial E_r}{\partial L_x} e^{-\beta E_r}$$

$$\Rightarrow \bar{E} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial L_x}$$

b) Herhangi bir izotropik sistem halinde, Z fonk. u tek tek L_x, L_y, L_z boyutlarına bağlı değildir. Fakat sadece V ile fonk. olur. $\bar{P} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial V}$ olduğunu gösteriniz.

$$\bar{E} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial L_x} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial V} L_y L_z$$

$$\bar{P} = \frac{\bar{E}}{L_y L_z} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial V}$$

4.

4.20. N tek atomlu molekülde oluşan bir ideal gazı gözönüne alınız. (a) Bu gazın kütlesinin Z bölünüm fonksiyonunu ifadesini türetiniz.

N tane monoatomik molekül için:

$$\epsilon_i = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right)$$

$$Z = \sum_{i, n_x, n_y, n_z} \exp \left[- \frac{\beta \hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right) \right] \quad i=1, \dots, N$$

i . mi atom

$$= \left\{ \sum_{n_x, n_y, n_z} \exp \left[- \frac{\beta \hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right) \right] \right\}^N$$

$$= Z_0^N$$

$$Z_0 \sim \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{V}}{\beta^{3/2}}$$

b) $\bar{E}$ nedir?

$$\bar{E} = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_0^N = N \left(- \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_0 \right) = N \bar{\epsilon}$$

c) $\bar{p}$ nedir?

$$\bar{p} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial V} = N \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z_0}{\partial V} = N \bar{p}_0$$

tek molekülün enerjisi ve basıncı.

4.21.) Bir manyetik momentin ortalama enerjisi: T mutlak sıcaklığında bir iyon karne sine değen tek bir $1/2$ spinini gözönüne alınız. Spin manyetik moment μ_B 'dir ve bir $\vec{B}$ m. manyetik alan içine yerleştirilmiştir. (a) Bu spinin Z bölünüm fonksiyonunu hesaplayınız.

$$Z \equiv \sum_r e^{-\beta E_r} = e^{\beta \mu_B} + e^{-\beta \mu_B}$$

b) Z için bulduğumuz sonucu kullanarak $\bar{E}$ 'yi bulunuz.

$$\bar{E} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\mu_B \frac{[e^{\beta \mu_B} - e^{-\beta \mu_B}]}{e^{\beta \mu_B} + e^{-\beta \mu_B}} = -\mu_B \tanh(\beta \mu_B)$$

$$\bar{E} = -\mu_B \tanh\left(\frac{\mu_B}{kT}\right)$$

c) $\bar{E} = -\bar{\mu} B$ şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.

$$\bar{\mu} = \mu_B \tanh\left(\frac{\mu_B}{kT}\right) \Rightarrow \bar{E} = -\bar{\mu} B$$

4.22.)

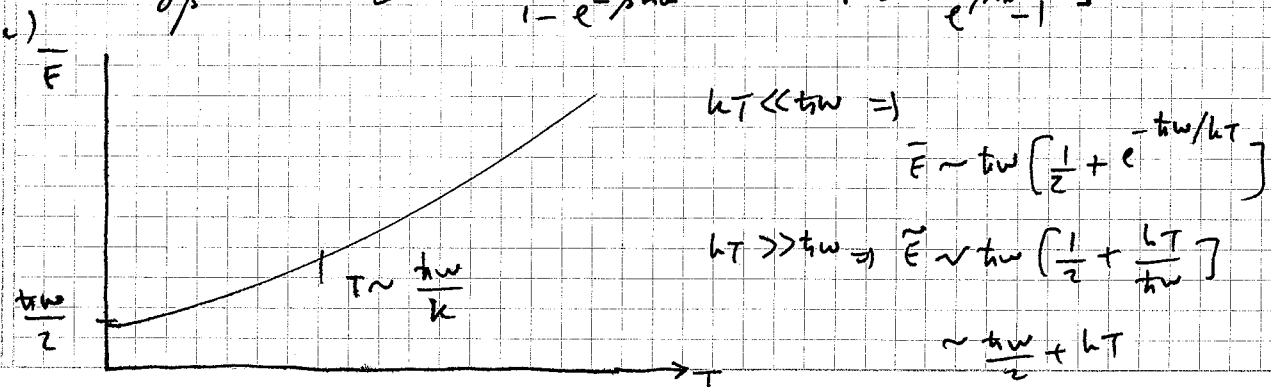
a) $E_r = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$

$$Z = \sum_r e^{-\beta E_r} = e^{-\beta \hbar \omega / 2} \sum_n e^{-\beta n \hbar \omega} = e^{-\beta \hbar \omega / 2} \sum_n (e^{-\beta \hbar \omega})^n$$

$$= \frac{e^{-\beta \hbar \omega / 2}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}}$$

b) $\bar{E} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$ $\ln Z = -\beta \frac{\hbar \omega}{2} - \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega})$

$$-\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = \frac{\hbar \omega}{2} + \frac{\hbar \omega e^{-\beta \hbar \omega}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} = \hbar \omega \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \right]$$



6.

d) $\hbar T \ll \hbar \omega$ olduğunda zaman osilatör taban durumundadır. $\bar{E} \rightarrow \frac{\hbar \omega}{2}$

e) $\hbar T \gg \hbar \omega$ ise: $\bar{E} \rightarrow \frac{\hbar \omega}{2} + \hbar T$ osilatör yavaş yavaş hareket etmeye başlar.

4.23. İki atomlu bir molekülün ortalama dönme enerjisi: İki atomu birleştiren gizeye dik bir eksen etrafında dönen iki atomlu bir molekülün kinetik enerjisi, klasik olarak

$$E = \frac{\vec{J}^2}{2A} = \frac{J^2}{2A}$$

ile verilir J : açısal mom. A : molekülün eylemsizlik mom. Kuantum mekaniğinde

$$E_j = \frac{\hbar^2 j(j+1)}{2A} \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

j 'nin her değeri için, $\vec{J}$ açısal mom. vektörünün mümkün her iki uzaysal yönelimlerine karşı gelen, birbirinden farklı $(2j+1)$ kuantumla durum vardır. İki atomlu molekülün T mutlak sıcaklığında bir gaz içinde dengede bulunduğunu varsayın. Bu iki atomlu molekülün ort. dönme enerjisi hesaplayınız.

a)

$$Z = \sum_r e^{-\beta E_r}$$

j açısal mom. me karşı gelen $2j+1$ durumun her biri aynı enerjiye sahiptir.

$$Z = \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) e^{-\beta (\hbar^2/2A) j(j+1)}$$

$T: kT \gg \frac{\hbar^2}{2A}$ yeterince büyük. $\beta \hbar^2/2A \ll 1$ toplamda çok küçük terimler azdır.

$$Z \approx \int_0^{\infty} (2j+1) e^{-\beta \frac{\hbar^2}{2A} j(j+1)} dj$$

$$j(j+1) = u \Rightarrow (2j+1)^2 = du$$

$$Z \approx \int_0^{\infty} e^{-\beta \frac{\hbar^2}{2A} u} du = \frac{2A}{\beta \hbar^2}$$

$$\ln Z = \ln 2A - \ln \beta - \ln \hbar^2$$

b)

$$\bar{E} = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = - \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{1}{\beta} = kT$$

8

4.29. Her birinin μ_B manyetik momenti olan ve bir B manyetik alanı içine yerleştirilmiş bulunan N tane $1/2$ spinli bir sistemin $\Omega(E)$ durum sayısı 3.9'da hesaplanmıştır.

(a) Sistemin E enerjisinin T 'ye bağımlılığını bulmak için $\beta = \partial \ln \Omega / \partial E$ tanımını kullanınız.

$$\ln \Omega(E) = N \ln(2N) - \frac{1}{2} (N+E') \ln(N+E') - \frac{1}{2} (N-E') \ln(N-E')$$

$$E' = E / \mu_B$$

$$\beta = \partial \ln \Omega / \partial E = \frac{\partial \ln \Omega}{\partial E'} \frac{\partial E'}{\partial E}$$

$$= \frac{1}{\mu_B} \left[-\frac{1}{2} \ln(N+E') - \frac{1}{2} \ln(N-E') \right] = -\frac{1}{2\mu_B} \ln \frac{N-E'}{N+E'}$$

$$= -\frac{1}{2\mu_B} \ln \frac{N-E'}{N+E'}$$

$$\frac{N-E'}{N+E'} = e^{-2\mu_B \beta} \Rightarrow N-E' - (N+E') e^{-2\mu_B \beta} = 0$$

$$-E' (1 + e^{-2\mu_B \beta}) + N (1 - e^{-2\mu_B \beta}) = 0 \Rightarrow E' = N \frac{1 - e^{-2\mu_B \beta}}{1 + e^{-2\mu_B \beta}}$$

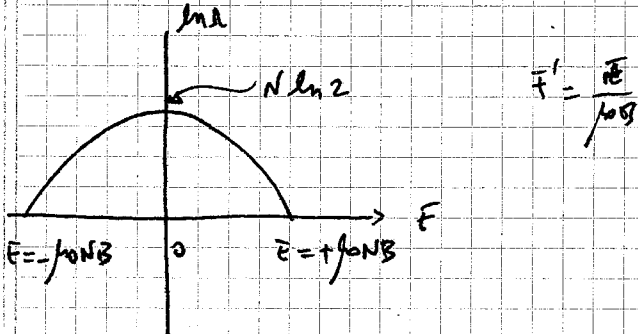
$$E = \mu_B N \frac{e^{\mu_B \beta} - e^{-\mu_B \beta}}{e^{\mu_B \beta} + e^{-\mu_B \beta}} = \mu_B N \tanh \left(\frac{\mu_B \beta}{2} \right)$$

(b) $M = ?$

$$E = -MB \Rightarrow M = N \mu_B \tanh \left(\frac{\mu_B \beta}{2} \right) \checkmark$$

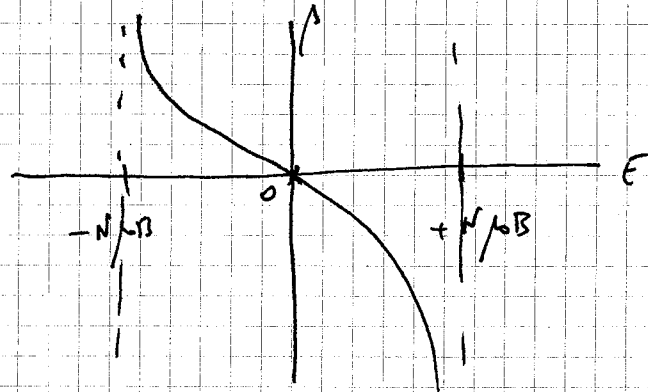
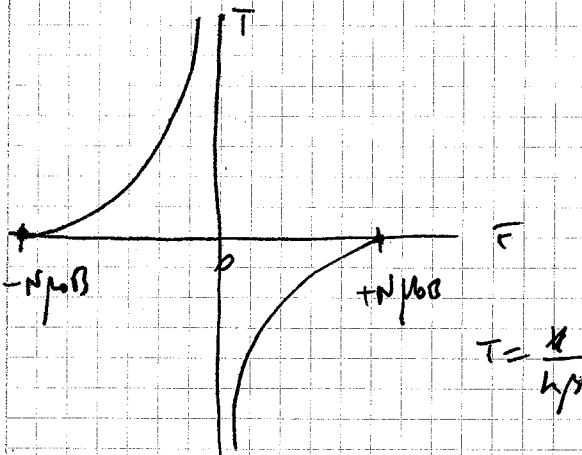
4.30.) Negatif mutlak sıcaklık ve bir spin sisteminde ısı akışı: Bir sistem her biri μ_B manyetik momenti olan ve bir B dış manyetik alanında yerleştirilmiş N tane $1/2$ spinin oluşuyor. Bu sistemin $\Omega(E)$ durum sayı daha önce prob 3.9'da E 'nin fonk. olarak hesaplanmıştır. (a) $\ln \Omega$ 'nin E 'nin fonk. olarak davranışını gösteren yaklaşımları çizilmiştir.

$$\ln \Omega(E) = N \ln(2N) - \frac{1}{2} (N+E') \ln(N+E') - \frac{1}{2} (N-E') \ln(N-E')$$



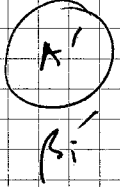
b) β 'yi E 'nin fonk. olarak yazınız. $\beta = \frac{2}{T} \ln \Omega(E)$

c) T 'nin E 'ye bağımlılığını.



1) T 'nin $E=0$ da bir sınırlılığı olduğunu göre β ile çalışarak daha uygun. $2\beta / \partial E$ 'nin daima negatif olduğunu gösterir. Bununla ilgili sistem değişime bürünmelerinde, ısıyı daima büyüte β değeri sistemin soğukluğunu gösterir.

$$\frac{2\beta}{\partial E} = \frac{1}{(2\mu_B)^2} \frac{[-1-N-E']}{[N^2-E'^2]} = -\frac{1}{(2\mu_B)^2} \frac{(1+N+E')}{(N+E')(N-E')} \leq 0$$



dengece β_f A'ın iç sınırından ve A'ın dış sınırından geçiyor.

$\frac{\partial f}{\partial \beta} \leq 0$ olduğundan A enerji karesi için $\beta_f \leq \beta_i$

A' " enerji karesi için $\beta_f > \beta_i'$

$$\beta_i' < \beta_f < \beta_i \quad \checkmark$$